

MEMORIE

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

S1106 E1.

Accademia, etc. — Naples — Società Reale Borbone

MEMORIE

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DAL 1852 IN AVANTI

RIPARTITE NELLE TRE CLASSI

DI

MATEMATICHE, SCIENZE NATURALI, E SCIENZE MORALI

VOL. I.

CHE CONTIENE QUELLE DAL 1852 AL 1854.



NAPOLI

STABILIMENTO TIPOGRAFICO DEL CAV. GAETANO NOBILE

1856

BREVE NOTIZIA

PER LA PRESENTE PUBBLICAZIONE

L'Accademia napoletana delle scienze chiudeva col volume VI., pubblicato nel 1831, la 1^a serie de'suoi Atti, promettendo cominciarne una 2^a, uniforme pel sesto alla precedente, ma in forma tipografica più conveniente, atta anco a contenere più materia in ciascun foglio di stampa, che non ne presentava la precedente. Alcuni ostacoli impedirono che dal 1832 in poi potesse mandar essa ad effetto tal suo proponimento; e però molte Memorie de'suoi soci, stimate da essa meritevoli della considerazione de' dotti giacevansi abbandonate, e quasi dimenticate.

A rimuoverle da questo stato non mancarono insistenze de' soci, e varî spedienti veniva, a volta a volta, proponendo il segretario perpetuo, cui incumbeva più che ad altri l'obbligo per tali pubblicazioni. Finalmente meritò la Superiore approvazione quello di andar, a mano a mano, pub-

blicando quelle Memorie, che l'Accademia giudicasse meritevoli di una pronta divulgazione, proposto fin dal febbrajo *c. a.*, ed approvato con Real Rescritto del dì 27 giugno.

In vista di questo, il segretario perpetuo presentava all'Accademia, nella tornata del 25 luglio il piano di tale stampa, che avendoglielo approvato, permetteva si divulgasse con un così detto *Manifesto*, col quale dichiaravasi il seguente modo di pubblicazione.

Per ciascun bimestre verrà dato fuori un fascicoletto del *Rendiconto*, contenente le notizie delle occupazioni accademiche in siffatto periodo di tempo, da servire come storia delle Memorie, che sarebbero di seguito pubblicate.

Le Memorie verranno ripartite secondo le Classi; e però il 1.º fascicolo di ciascun anno conterrà Memorie per la Classe Matematica; il 2.º per quella di Scienze Naturali; il 3.º per l'altra di Scienze Morali, ritornandosi per gli altri tre bimestri con l'ordine stesso.

Ciascuna Classe avrà un frontespizio ed una numerazione a se propria; sicchè in fine dell'anno i due fascicoli per ognuna riuniti, e collegati convenevolmente formeranno il volume delle Memorie per esso, al quale saranno premessi, anche riunendoli tutti insieme quelli del *Rendiconto*, che avranno però ancor essi una continuata numerazione romana.

Laddove una Classe manchi di Memorie, o non ne abbia sufficienti a compiere un fascicolo di dieci fogli, vi si supplirà con estender quella che più ne abbonda; sicchè ad ogni modo il volume dovrà annualmente risultare di fogli 70; 10 cioè pel *Rendiconto*, e 60 per le Memorie.

Trovandosi, per questo nuovo sistema di pubblicazione, un non piccol numero di Memorie arretrate, dal 1832 in

avanti , saranno queste da ora pubblicate , rimettendo per le notizie loro correlative a' *Rendiconti* corrispondenti , ne quali ne fu riportata la lettura fattane all'Accademia, e seguentemente poi l'approvazione di questa ; ed intanto che si raggiunga l'anno corrente verrà sospesa la pubblicazione del *Rendiconto* , da ripigliarla giunto che si sarà alle Memorie per questo anno.

Or avvegnachè per l'anno 1852 non s'ebbe alcuna Memoria da pubblicare per la Classe di scienze Naturali, avendo i soci che n'ebbero presentate preferito vederle inserite nel *Rendiconto*, ed essendo pure tal Classe distratta da altre occupazioni commessele dall'Accademia ; e che nè tampoco alcuna lettura ebbe luogo da quella di scienze Morali, ne segue , che per tale anno non potranno comparire al pubblico , che le sole seguenti Memorie Matematiche.

1. *Fergola (Nicola)* — *Sulle Concussioni* , Memoria dal socio *V. Flauti*, estratta da' mss. di questo insigne geometra, letta da lui nella tornata del 23 gennajo 1852, ed approvata per gli Atti in quella del 21 settembre dello stesso anno.

Il motivo ch'ebbe determinato il *Flauti* a presentare all'Accademia questo lavoro di un nostro antico e meritevolissimo socio , mancato di vita fin dal 1824 , può rilevarsi dall'articolo letto all'Accademia intorno a' mss. del *Fergola* nella tornata del 9 gennajo 1852 (1).

2. *Flauti (V.)* — *Divinazione del modo come i geometri antichi potettero pervenire a distinguere la diversa natura de' problemi, all'occasione di quelli della trisezione dell'angolo, e delle due medie proporzionali.* — Letta nella torna-

(1) Vedi *Rendiconto* del 1852 da pag. 46 a 48, e da pag. 20 a 22 il sunto di essa memoria.

ta del 20 febbrajo 1852; approvata per gli Atti in quella del 26 novembre dello anno (1).

Da questo lavoro del *Flauti* prese occasione il professor *Padula* di presentare all'Accademia, nella tornata del 5 marzo, una sua elegantissima divinazione dell'analisi geometrica dal principio de' geometri *Archimede* recata al problema della *divisione della sfera in data ragione*, che venne inserita nel *Rendiconto* da pag. 45 a 47.

3. *Padula (F.)* — Questo distinto geometra, ora nostro socio ordinario, nella stessa anzidetta tornata, leggeva un suo lavoro: *sulle curve del 4.º grado, che hanno tre punti di regresso di 1.ª specie*, la quale risultava anche approvata per gli Atti in quella del 26 novembre (2).

4. *Tucci (F. P.)* — *Sulla minima superficie di un quadrilatero storto.*

Questo socio ordinario leggeva, nel dì 26 aprile, una introduzione a tal suo lavoro, che poi esponeva nella tornata dell'11 giugno, e risultava approvato per gli Atti nel giugno 1853; di essa ne recava il sunto che leggesi da pag. 73 a 75 del *Rendiconto*.

1) Di essa leggesene il sunto a pag. 97 e 98 del *Rendiconto* per tale anno.

2) Di essa riportavasi il sunto nel *Rendiconto* da pag. 29 a 32.

MEMORIE

APPROVATE PER L'ANNO 1853.

MATEMATICHE

Non fu meno operosa la Classe di Matematiche, nell'anno 1853.

1. Il professor *Trudi* ben rimeritava l'Accademia della nomina ottenuta di socio ordinario, da corrispondente che già prima l'era, con una Memoria di : *Ricerche riguardanti la moltiplicazione e l'addizione geometrica delle funzioni ellittiche*, che leggeva nella tornata del 1° aprile, della quale ne veniva inserito un sunto nel *Rendiconto* corrispondente, da pag. 66 a 69; e gli era in seguito approvata.

Una tal Memoria, nell'atto di pubblicarla ben dopo quattro anni da che l'ebbe presentata, ha da lui meritati grandi ed essenziali cambiamenti; e ciò è necessario che da me si avverta: ne ha quindi egli mutata l'intitolazione, che gli ebbe già prima data, nell'altra di : *Rappresentazione geometrica immediata dell'equazione fondamentale della teorica delle funzioni ellittiche*.

Questo giudizioso lavoro del nostro socio *Trudi* mi ebbe recato a memoria quello, che in siffatto argomento aveva da antica data eseguito il *Fergola*, che vedesi fin dal 1780 recato ne' mss. di *Calcolo Integrale*, ad uso di sua Scuola privata, che per di lui opera non mancò mai, fin dalla sua origin prima, di buone istituzioni in Analisi sublime, mentre altrove ve n'era penuria: e certamente che se la di lui estrema ritenutezza in pubblicarle, e la mancanza de' mezzi (1) non gliene avesse mai fatto venir pure il pensiero, la nostra Italia si avrebbe avuto una buona istituzione di Analisi sublime, e la nostra Scuola avrebbe ben mostrato con quanto successo in essa attendevasi al coltivamento de' metodi geometrici ed analitici, e come vantaggiavasi in accoppiarli opportunamente; nè sarebbero rimasti pressochè inutilizzati sì pregevoli lavori dal tempo, e dal cattivo governo che ne fu fatto nella sua ultima malattia di anni, e dopo sua morte, in mano di persone idiote, dalle quali non mancarono anche taluni profittarne.

Ritornando al mio proposito dirò dunque, che messomi a far diligenza tra le carte del *Fergola* mi riuscì a fortuna, rinvenirvi ciò che cercava sì nel ms. dell'epoca antica già detta, che nell'altro posteriore del 1804, da lui rifatto per servirsene nelle lezioni, che dava nella regia Università degli studi, alla quale fu chiamato ad insegnarvi nel 1801, e vi ebbe a suo malgrado acconsentito (2).

1) Veggasi in fine del *Preliminare all'Analisi algebrica* del *Flauti*, la lettera, che il general francese *Tugny* scriveva al *Fergola*, il dì 8 giugno 1814, nell'atto medesimo che partiva da Napoli, avendo rinunciato al Ministero di Guerra e Marina che teneva.

(2) Veg. l' *Elogio storico* del *Fergola*, letto dal *Flauti* in una pubblica tornata generale della Società Reale, tenuta espressamente nel dì 26 settembre 1824, ed a sue spese pubblicato; o anco le *brevi notizie* di lui, premesse da esso *Flauti* alla 2^a e 3^a edizione in 1^a delle *Sezioni Coniche analitiche*, e de' *Luoghi solidi*.

Nell'eseguire tale rivista del suo lavoro, nell'argomento in parola, egli mostrommi desiderio di conoscere la *Mémoire sur les transcendentes elliptiques* ec., letta dall'illustre analista *Legendre* all'Accademia delle scienze di Parigi, nell'aprile 1792, e pubblicata ivi dall'autore nell'anno seguente, che gli ebbi procurata, non senza grandi difficoltà, come in quei tempi aveva luogo presso noi, nel commercio librario specialmente con la Francia; nè egli poté ulteriormente vedere la grande estensione, che da sì ristretti principii prese, nelle mani di questo insigne analista un tale argomento, nel quale si rese tanto benemerito della scienza analitica de'moderni; poichè afflitto da lunga e grave affezione nervosa, degenerata finalmente, in una apoplezia, che il rese imbecille, tenendolo in sì infelice stato per più di due anni, terminò di vivere e soffrire nel giugno del 1824.

Dopo queste brevi notizie, darò quì, per ora il solo cap. XI delle sue *Istituzioni di Calcolo Integrale* del 1804, serbandomi a presentare all'Accademia, altre ricerche del *Fergola* correlative a tale argomento, come mel permetteranno le altre occupazioni non poche, pel grave incarico, che solo, e senza ajuti di sorte alcuna, sono obbligato a sostenere per essa, nell'età avanzata alla quale la Divina Provvidenza mi ha concesso giugnere.

CAP. XI.

DEGL' INTEGRALI CHE DIPENDONO DALLA RETTIFICAZIONE DELL' ELLISSI
O DELLE IPERBOLI.

INTRODUZIONE.

Per esibirvi un prospetto didascalico di quanto si è detto in questo argomento, e a dir ne resta, convien sapere primamente esser due le operazioni di tale scienza, e che dir si possono di lei postulati, cioè:

1° Ogni monomio algebrico differenziale può integrarsi. E questo integrale in un sol caso è log-mico, ed algebrico negli altri.

2° Il differenziale di una variabile diviso pel di lei quadrato accresciuto dell'unità ha per integrale quell'arco circolare, di cui la detta variabile n'è la tangente trigonometrica, cioè, $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc. tang. } x$

A questi due postulati or potremo aggiungere il terzo, cioè:

3° L'integrale del seguente fratto $dv \sqrt{\left(\frac{1-e^2v^2}{1-v^2}\right)}$ è quanto l'arco, che corrisponde all'ascissa dal centro di un'ellisse, di cui 1 n'è il semiasse maggiore, ed e l'eccentricità. E l'integrale del fratto analogo $dv \sqrt{\left(\frac{e^2v^2-1}{v^2-1}\right)}$ ne disegna un simigliante arco iperbolico.

Inoltre deve sapersi, che le integrazioni delle formole quì su recate, e di altre simili, che si potrebbero proporre, non consistono in altro, che nel ridurle in modo, che per que' principii ne riesca integrarle. E tali riducimenti di una formola o sono semplici trasformazioni di esse, o pur sostituzioni di una nuova variabile avente un certo rapporto alla prima; o risoluzioni di detta formola nelle sue parziali, o conversione di essa in serie, o congrue semplificazioni che le si arrechino, o altri simiglianti lavori di Analisi praticati sulla medesima formola.

Ma di qual natura sian poi i risultati delle integrazioni, quì appresso vel dichiaro. cioè:

I risultati delle integrazioni o sono algebrici, o sono trascendenti; e

questi possono essere di prima trascendenza, cioè logaritmici, o circolari, e di seconda trascendenza, cioè ellittici, ed iperbolici. E così più appresso si potrebbe trarre una tale classificazione.

I risultati algebrici si possono ne' casi particolari ridurre in grandezze discrete colla sola Aritmetica volgare. E volendoli geometricamente esibire, si potran con la guida della Geometria Cartesiana dinotar per rette.

I risultati log-mici, e circolari se vogliansi avere aritmeticamente, convien pe' primi avvalersi dei log-mi iperbolici, che da' tabulari trar si possono, e del Canone trigonometrico per gli altri. Ed i primi saran geometricamente espressi per archi di cerchi, e per quei delle parabole i secondi.

Finalmente i risultati ellittici ed iperbolici restan geometricamente esibiti per archi di ellissi, e d'iperboli rispettivamente. Ma se questi vogliansi aritmeticamente in certi casi dinotare, converrebbe avere delle tavole delle trascendenti ellittiche, ed iperboliche, delle quali ne do un saggio (*).

Dunque tutti gli anzidetti risultati si possono geometricamente esibire per quelle linee, che nascono nella superficie del cono, segandolo con un piano in varii siti; le quali, come è noto dagli Elementi, sono rette, archi di cerchio, ed archi di parabola, di ellisse, o d'iperbole rispettivamente.

(*) Questo saggio, che certamente dal *Fergola* fu fatto, non mi è riuscito rinvenirlo ne' suoi mss. E qui mi convien notare come il *Legendre*, nella Memoria pubblicata nel 1793, di cui sopra ho accennato, nella quale ebbe esposto ciò che di più importante sapevasi allora in tale argomento, aggiugnendo pure sue ricerche per agevolare il calcolo di queste *trascendenti*, che egli designò con l'epiteto proprio di *ellittiche*, che tuttavia ritengono, ebbe invero preparata la formazione di tali tavole, per l'uso dal *Fergola* quassù indicato.

L E M M A

PER LE SEGUENTI ANALITICHE INVESTIGAZIONI.

Sia l'asse primario di un ellisse $= 2a$, e $2c$ il suo parametro, e dal centro in su quell'asse di tronchi un'ascissa x ; l'arco ellittico che gli corrisponde sarà espresso dall'integrale della seguente formola

$$dx \sqrt{\left(\frac{a^2 - x^2 + \frac{c}{a} x^2}{a^2 - x^2} \right)} \dots \dots A$$

Dim. — Si chiami y la semiordinata corrispondente all'ascissa x , sarà per l'equazione di questa curva $y \sqrt{\frac{a}{c}} = \sqrt{(a^2 - x^2)}$; e differenziando

$$\text{questa equazione avrassi } dy = \frac{-x dx \sqrt{\frac{c}{a}}}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}, \text{ e quindi } dy^2 = \frac{x^2 dx^2 \cdot \frac{c}{a}}{a^2 - x^2}.$$

Dunque l'elemento di quell'arco ellittico sarà espresso, fatte le sostituzioni,

$$\text{da } \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx \sqrt{\left(\frac{a^2 - x^2 + \frac{c}{a} x^2}{a^2 - x^2} \right)}$$

E così per l'iperbole l'arco corrispondente alla x sarà espresso dal-

$$\text{l'integrale di } dx \sqrt{\left(\frac{x^2 - a^2 + \frac{c}{a} x^2}{x^2 - a^2} \right)} \dots \dots B$$

COR. I. Queste due formole le chiamo *primitive*, perchè le altre da queste ne deduco, non solo nelle presenti indagini, ma nella stessa rettificazione dell'una curva e dell'altra.

COR. II. In fatti facendo $a=1$, e ponendo l'eccentricità $= e$, nell'ellisse, posto il semiasse conjugato $= \epsilon$, la formola

$$A = dx \sqrt{\left(\frac{1 - x^2 + \frac{\epsilon^2}{2} - x^2}{1 - x^2} \right)} = dx \sqrt{\left(\frac{1 - e^2 x^2}{1 - x^2} \right)}. \text{ E così per l'iperbole.}$$

COR. III. — Ma per avere il risultato del seguente teorema dee farsi il numeratore di A uguale ad ax . O se quello è concepito in v , come più acconciamente convien fare, dovrebbero fare uguale ad ax il trinomio $a^2 - v^2 + \frac{c}{a} v^2$.

PROP. I. TEOR.

Se formisi un' ellisse, che abbia $2a$ per asse maggiore, e $2c$ per di lei parametro, sarà l'integrale del fratto $\frac{dx\sqrt{ax}}{2\sqrt{(x-a)(c-x)}}^{(*)}$ uguale a quell'arco di quest'ellisse, il quale abbia per ascissa dal centro la grandezza $a\sqrt{\left(\frac{a-x}{a-c}\right)}$.

E se descrivasi un'iperbole di cui l'asse principale sia $2a$ e $2c$ il suo parametro, l'integrale del fratto $\frac{dx\sqrt{ax}}{2\sqrt{(x+a)(x-c)}}$ sarà espresso da quell'arco di tal curva, il quale ha per ascissa dal centro la grandezza $a\sqrt{\left(\frac{a+x}{a-c}\right)}$; lo che geometricamente si esibisce, con legittimamente combinarvi una parabola.

Dim. p.^{ta} I. — Suppongasi $a^2 - \frac{c}{a}v^2 + v^2 = ax$, sarà $v^2 = a^2\left(\frac{a-x}{a-c}\right)$, e quindi $a^2 - v^2 = a^2\left(\frac{x-c}{a-c}\right)$, e $\pm v = \pm a\sqrt{\left(\frac{a-x}{a-c}\right)}$, che differenziandola avrassi $dv = \frac{adx}{2\sqrt{(a-x)(c-x)}}$. Dunque se nell'espressione dell'arco ellittico, esibita nel lemma precedente, riporremo i valori delle grandezze dv , $\sqrt{a^2 - v^2 + \frac{c}{2a}v^2}$, e $\sqrt{a^2 - v^2}$ quì su trovati, tal arco dovrà dinotarsi per quest'altra formola $\frac{dx\sqrt{ax}}{2\sqrt{(x-a)(c-x)}}$, come la riduzione del calcolo dimostra. Per la qual cosa sarà l'integrale di $\frac{dx\sqrt{ax}}{2\sqrt{(x-a)(c-x)}}$ uguale all'arco ellittico, che abbia per ascissa dal centro la grandezza v , o la sua uguale $a\sqrt{\left(\frac{a-x}{a-c}\right)}$.

P. II. Nello stesso modo supponendo $ax = v^2\left(1 + \frac{c}{2a}\right) - a^2$, si dimostrerà l'assunto della II.^a parte del teorema.

(*) Sarebbe meglio scriver nel seguente modo l'addotta formola, cioè, $\frac{dx\sqrt{ax}}{2\sqrt{(a-x)(x-c)}}$.

PROP. II TEOR.

L'integrale della formola $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(x^2 \pm 2hx - k^2)}}$ dipende dalla rettificazione dell'ellisse, quando i due termini x^2 e k^2 del denominatore sieno insieme negativi.

Ed ci dipenderà dalla rettificazione dell'iperbole, quando sia negativa una sola delle dette grandezze x^2 e k^2 .

Dim. cas. 1. — Supponiamo in 1° luogo esser negativi entrambi i termini x^2 e k^2 , in tal caso non dovrà essere h^2 minore di k^2 . Imperocchè la grandezza $\sqrt{(2hx - x^2 - k^2)}$ può avere quest'altra forma $\sqrt{[h^2 - k^2 - (h-x)^2]}$, la quale sarà immaginaria se trovisi $h^2 < k^2$. Ed essendo $x-h = \sqrt{(h^2 - k^2)}$, ed $h - \sqrt{(h^2 - k^2)} = x$ i fattori del trinomio $2hx - x^2 - k^2$, sarà

$$\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(2hx - x^2 - k^2)}} = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{[x-h-\sqrt{(h^2-k^2)}](h-\sqrt{(h^2-k^2)}-x)}}$$

Ma quest'altro integrale dipende dalla rettificazione di quell'ellisse, di cui il semiasse maggiore è uguale ad $h + \sqrt{(h^2 - k^2)}$, e ad $h - \sqrt{(h^2 - k^2)}$, il suo semiparametro; dunque anche dalla rettificazione di tale ellisse ne dipende il primo.

Caso 2. — Che se suppongasi negativa la k^2 solamente, sicchè quel dato trinomio sia $2hx + x^2 - k^2$, i fattori di questo dovranno essere le due grandezze reali $x + h + \sqrt{(h^2 + k^2)}$ ed $x + h - \sqrt{(h^2 + k^2)}$, dunque sarà

$$\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(2hx + x^2 - k^2)}} = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{[x+h+\sqrt{(h^2+k^2)}](x+h-\sqrt{(h^2+k^2)})}}$$

E quindi il 1° di questi due integrali al par del secondo dovrà dipendere dalla rettificazione di quell'iperbole, che abbia $2h + \sqrt{(h^2 + k^2)}$ per un de' suoi semiasse, e per $\sqrt{(h^2 + k^2)} - h$ il semiparametro che gli appartiene, e con le condizioni del teorema precedente.

Caso 3. — Finalmente se il proposto fratto abbia quest'altra forma $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(2hx - x^2 + k^2)}}$, ove siavi negativa la sola x^2 , dovrà porsi $x = \frac{k^2}{z}$, ed

essa con tal sostituzione diverrà uguale a $\frac{k^2 dz}{z\sqrt{z} \cdot \sqrt{(z^2 + 2hz - k^2)}}$, come il calcolo il dichiara. Ma questa espressione si scompone in queste due parti

$$\frac{-dz(z^2 + k^2)}{z\sqrt{z} \cdot \sqrt{(z^2 + 2hz - k^2)}} + \frac{z^2 dz}{z\sqrt{z} \cdot \sqrt{(z^2 + 2hz - k^2)}},$$

e la prima di esse divisa sì nel numeratore, che nel denominatore per z^2 ,

acquista la seguente forma $\frac{-dz\left(1 + \frac{k^2}{z^2}\right)}{\sqrt{\left(z + 2h - \frac{k^2}{z}\right)}}$, il di cui integrale è

$-2 \sqrt{\left(z + 2h - \frac{k^2}{z}\right)}$; e la seconda diviene uguale a $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(z^2 + 2hz - k^2)}}$,

dividendone il numeratore e denominatore per $z\sqrt{z}$, ed il suo integrale dipende da quello del caso precedente.

Scol. 1. — Il primo e il secondo caso di questo teorema si potrebbero dimostrare nel seguente modo: cioè pel 1° si paragoni la proposta formola

$$\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(2hx - x^2 - k^2)}} \text{ alla } \frac{dx\sqrt{ax}}{2\sqrt{(x(a+c) - x^2 - ac)}}$$

(che è l'espressione dell'arco ellittico rapportata nella 1.^a parte dell' antecedente teorema, nel denominatore della quale si è praticata l'indicata moltiplicazione); e vi si pareggino i coefficienti de' termini analoghi de' denominatori loro. Sarà $2h = a + c$, e $k^2 = ac$. Dunque risolvendo queste due equazioni per vi determinare le ignote a e c , si rileverà essere $a = h + \sqrt{(h^2 - k^2)}$, e $c = h - \sqrt{(h^2 - k^2)}$. E' l 1° di questi due valori sarà il semiasse maggiore della richiesta ellisse, il secondo ne sarà il di lei semiparametro. Dove vuol avvertirsi, che non possono essere immaginari i detti valori, perchè dee essere, per la realtà del proposto denominatore, $\sqrt{(2hx - x^2 - k^2)}$ sempre h^2 maggiore di k^2 .

Pel 2° caso di questo teorema si paragoni l'altra formola

$$\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(x^3 \pm 2hx - k^3)}} \text{ alla } \frac{dx\sqrt{ax}}{2\sqrt{(x^3 + x(a-c) - ac)}}$$

e vi si pareggino, come si è detto nel 1° caso, i coefficienti de' termini analoghi de' denominatori di esse. Sarà 1° $\pm 2h = a - c$ e $k^3 = ac$. E maneggiando queste due equazioni per determinare le ignote a e c , si troverà $a = h + \sqrt{(h^3 + k^3)}$, e $c = \sqrt{(h^3 + k^3)} - h$, nel caso di $+2h$, e nell'altro di $-2h$ sarà $a = \sqrt{(h^3 - k^3)} - h$, e $c = h + \sqrt{(h^3 + k^3)}$. Cioè il semiasse principale delle richieste iperbole, il quale si è disegnato per a , ed il suo semiparametro c avranno gl'indicati valori.

PROP. III. TEOR.

L'integrale dell'espressione $\frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{(x^3 + 2hx + k^3)}}$, qualunque sieno le grandezze h , e k , dipende dalla rettificazione delle curve coniche.

Dim. Caso 1. Il trinomio, che è sotto al secondo radicale dell'espressione data abbia la seguente forma $k^3 \pm 2hx - x^3$. Ei necessariamente dovrà risolversi in due fattori delle seguenti forme $n - x$ ed $m + x$; e la proposta espressione potrà recarsi in questi altri modi identici tra loro

$$\begin{aligned} \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot (n-x)(m+x)} &= \frac{m+x-x}{\sqrt{(n-x)(m+x)}} \cdot \frac{dx}{m\sqrt{x}} \\ &= \frac{dx}{m\sqrt{x}} \sqrt{\left(\frac{m+x}{n-x}\right)} - \frac{dx\sqrt{x}}{m(n-x)(m+x)} \end{aligned}$$

come ben si vede.

Intanto facciasi $m + x = z$, e nella prima dell'ultima parte di queste tre espressioni surrogarsi $z - m$ per x , ne diverrà

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} \sqrt{\left(\frac{m+x}{n-x}\right)} = \frac{dz\sqrt{z}}{m(z-m)(n+m-z)}$$

E quindi sarà la data formola

$$\frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{(k^2 \pm 2hx - x^2)}} = \frac{dz \sqrt{z}}{m \sqrt{(z-m)(n+m-z)}} - \frac{dx \sqrt{x}}{m \sqrt{(n-x)(m+x)}}$$

Ma l'integrale del 1° termine del 2° membro di quest' equazione dipende dalla rettificazione dell'ellisse, e quello del 2° dalla rettificazione dell' iperbole (imperocchè detto termine è lo stesso che $\frac{dx \sqrt{x}}{m \sqrt{(k^2 \pm 2hx - x^2)}}$, che pel caso 3 prop. prec. ne dipende). Dunque anche dalla rettificazione di tali curve, ne dipenderà l'integrale del 1° membro.

Caso II. Che se propongasi ad integrare la formola

$$\frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{(x^2 \pm 2hx - k^2)}}$$

facendovi la variabile $x = \frac{k}{z}$, ella si cangerà in un' altra identica a quella del 1° caso, cioè nella

$$\frac{dz}{\sqrt{z} \cdot \sqrt{(k^2 \pm 2hz - z^2)}}$$

Caso III. Diasi ad integrare un' altra simigliante espressione, che abbia insiem positivi i quadrati k^2 ed x^2 , ond'ella siane

$$\frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{(x^2 \pm 2hx + k^2)}}$$

e suppongasi esserne immaginari i fattori del trinomio $x^2 \pm 2hx + k^2$ (imperocchè se essi per avventura sien reali, vi si praticherebbe il calcolo del caso 1°), e si faccia $x + h = z$, diverrà la detta formola eguale a

$$\frac{dz}{\sqrt{(z-h) \sqrt{(z^2 - h^2 + k^2)}}}, \text{ o a quest' altra } \frac{dz}{\sqrt{(z-h) \sqrt{(z^2 + r^2)}},$$

facendo $r^2 = k^2 - h^2$.

Ciò posto suppongasì $\sqrt{(z^2 + r^2)} = v - z$, sarà quadrando e riducendo questa equazione

$$1^{\circ} \quad z = \frac{v^2 - r^2}{2v},$$

$$2^{\circ} \quad dz = \frac{v^2 + r^2}{4v^2} 2dv,$$

$$3^{\circ} \quad \sqrt{(z^2 + r^2)} = \frac{v^2 + r^2}{4v},$$

$$4^{\circ} \quad \frac{1}{z-h} = \sqrt{\left(\frac{2v}{v^2 - 2hv - r^2} \right)}$$

onde sostituendo nell'ultima formola i valori esibiti ne' numeri 2, 3, 4, diverrà

$$\frac{dz}{\sqrt{(z-h)}\sqrt{(z^2 + r^2)}} = \frac{dv}{\sqrt{v} \cdot \sqrt{(v^2 - 2hv - r^2)}}$$

ma l'integrale dell'ultima di queste due formole appartensi alla rettificazione delle curve coniche, pel 2° caso. Dunque anche dovrà appartenere la proposta.

Caso IV. — Finalmente se diasi ad integrare quest'altra formola

$\frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{(2hx - x^2 - k^2)}}$, o la sua equivalente $\frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{(n-x)(x-m)}}$ (imperocchè i fattori del trinomio $2hx - x^2 - k^2$ sono reali, e delle seguenti forme $n-x$ ed $x-m$), potrà porsi nell'ultima di esse la z per $n-x$; ed ella si trasformerà in quest'altra

$$\frac{-dz}{\sqrt{z} \cdot \sqrt{(n^2 - nm - 2nz + mz + z^2)}}$$

la quale appartensi al 3° o al 2° caso di questo teorema, secondochè la n si ritrovi maggiore o minore della m .

PROP. IV. TEOR.

L'integrale della formola $\frac{x^{\pm \frac{1}{2}} dx}{\sqrt{x^2 + 2hx + k^2}}$ può ridursi alla rettificazione delle curve coniche.

Dim. Questo assunto vuol dimostrarsi nel solo caso, che sien positivi i quadrati x^2 e k^2 del denominatore, e l'indice $\frac{1}{2}$ del numeratore. Imperocchè i rimanenti casi vengon dimostrati nelle due proposizioni 2 e 3.

Ciò posto sien reali i fattori del trinomio $x^2 \pm hx + k^2$. Questi, come dall'Algebra si rileva, dovranno avere la forma $x+m$ ed $x+n$ nel caso di $+2hx$, e di $x-m$ ed $x-n$ nell'altro caso di $-2hx$. Perlocchè se facciasi $x+m=z$, nel primo di questi due casi, la proposta formola dovrà cangiarsi in

$$\frac{(z-m)dz}{\sqrt{z} \cdot \sqrt{(z-m)(z-m+n)}} = \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(z-m)(z-m+n)}} - \frac{m dz}{\sqrt{(z-m)(z-m+n)}}$$

E queste due ultime espressioni sono integrabili per la rettificazione delle curve coniche, come anteriormente l'ho dimostrato.

E ad una consimil conseguenza si perverebbe quando que'fattori avessero l'altra delle indicate forme, cioè $x-m$ ed $x-n$, sostituendovi z per $x-m$.

Ma se mai si ritrovino immaginari i due fattori del trinomio $x^2 \pm 2kx + k^2$, dovrà farsi $x+h=z$, nel 1° caso di $+2hx$. Onde sarà $x^2 + 2hx + k^2 = z^2 - h^2 + k^2 = z^2 + r^2$, facendovi $k^2 - h^2 = r^2$. E la proposta formola, in virtù di tal sostituzione, dovrà diventare

$$\frac{(x-h) dz}{\sqrt{(z-h)} \cdot \sqrt{(z^2 + r^2)}} = \frac{dz\sqrt{(z-h)}}{\sqrt{(z^2 + r^2)}} \dots \dots S$$

Inoltre si ponga la nuova variabile v uguale a $z + \sqrt{(z^2 + r^2)}$, o che è lo stesso, $\sqrt{(z^2 + r^2)} = v - z$. Quadrando quest'equazione, e fattevi le proprie riduzioni, sarà $z = \frac{v^2 - r^2}{2v}$. Sicchè sostituendo in S questo valore di z , ne verrà, come nel 3° caso della proposizione precedente il rilevammo,

$$\frac{dz\sqrt{z-h}}{\sqrt{z^2+r^2}} = \frac{dv(v^2-2hv+k^2)}{v\sqrt{zv}\sqrt{v^2+2hv-k^2}}$$

e la seconda di queste due espressioni chiaramente si disgrega nelle sue parti.

$$\frac{v^2 dv \sqrt{\frac{1}{v}}}{v\sqrt{v}\sqrt{v^2+2hv-k^2}} - \frac{dv \cdot 2h \sqrt{\frac{1}{v}}}{\sqrt{v}\sqrt{v^2+2hv-k^2}} - \frac{dv \cdot k^2 \sqrt{\frac{1}{v}}}{v\sqrt{v}\sqrt{v^2+2hv-k^2}}$$

Or l'integrale della 1^a di queste tre formole appartenenti alla rettificazione dell'iperbole, la seconda è il 2^o caso della proposizione precedente ; e la terza di essa può suddividersi in queste sue parti,

$$\frac{v^2 dv + k^2 dv}{v\sqrt{v}\sqrt{v^2+2hv-k^2}} - \frac{dv \sqrt{v}}{\sqrt{v^2+2hv-k^2}} = \frac{dv + \frac{k^2}{v^2} dv}{\sqrt{v+2h-\frac{k^2}{v}}} - \frac{dv \sqrt{v}}{\sqrt{v^2+2hv-k^2}}$$

la prima delle quali è integrabile algebricamente , e l'altra dipende dalla rettificazione dell'iperbole.

PROP. V. TEOR.

L'integrale della formola $\frac{x^{\pm(q+\frac{1}{2})}dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$ dipende dalla rettificazione delle curve coniche.

Dim.—Si differenzii l'espressione $x^r(a+bx+cx^2)^{\frac{1}{2}}$, ed il risultato si ordini secondo le potenze della variabile x ; sarà

$$D. x^r(a+bx+cx^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{arx^{r-1} + (\frac{1}{2}b+br)x^r + (c+cr)}{\sqrt{a+bx+cx^2}} dx$$

e trasferendo nel 1° membro dell'equazione il 1° e 2° termine del 11°, ed integrandola, ne risulterà

$$x^r(a+bx+cx^2)^{\frac{1}{2}} - ar \int \frac{x^{r-1}dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} - (\frac{1}{2}b+br) \int \frac{x^r dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = (c+cr) \int \frac{x^{r+1}dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

vale a dire l'integrale del 11° membro di quest'ultima equazione dipenderà da quelli che ritrovansi nel 1°. Sicchè ponendo $r=\frac{1}{2}$, si ricaverà, che

$$\int \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \text{ dipende da } \int \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{a+bx+cx^2}}, \text{ e } \int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

cioè dalla rettificazione delle curve coniche. E ponendo $r=\frac{3}{2}$

$$\int \frac{x^{\frac{5}{2}}dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \text{ dipenderà da } \int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}, \text{ e } \int \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

cioè dal precedente; e quindi anche dalla rettificazione delle curve coniche. E così più appresso.

Scol. — Gli insigni analisti *Eulero*, *Lagrange*, e *Legendre* sonosi saggiamente occupati ad integrar la formola

$$\frac{Pdx}{\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4)}}$$

ove P sia una funzione razionale della x , rimettendola alla rettificazione delle curve coniche; e l'ultimo di essi, che ne ha scritto un ingegnoso opuscolo, per farne intendere la natura e l'uso di queste trascendenti ellittiche, ha finalmente conchiuso, che si posson ridurre alle funzioni ellittiche le seguenti espressioni, ove la P sia una funzione razionale di x

I.
$$\int \frac{P dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4 + \delta x^6)}}$$

II.
$$\int \frac{P dx}{(\sqrt{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4})}$$

III.
$$\int \sqrt{P} dx \sqrt{(\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4)}$$

IV.
$$\int P dx \sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3)^{\pm \frac{1}{2}}}$$

V.
$$\int \frac{P dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \gamma x^4 + \beta x^5 + \alpha x^6)}}$$

VI.
$$\int \frac{P dy}{\sqrt{(\beta + \gamma y^2 + \delta y^4 + \gamma y^6 + \beta y^8)}}$$

Nota — Conviene avvertire, che nel Ms. si vede sempre lasciata in fine di ciascuna proposizione una mezza pagina ed anco una pagina bianca; da che bisogna rilevarne, che era intenzione dell'autore di altro aggiugnervi in compimento a ciascuna di esse. Persuasi che tal suo lavoro l'era incompiuto, l'è però che abbiamo colta l'occasione delle Memorie del socio *Trudi*, per qui recarlo tal quale l'ebbe il *Fergola* lasciato.

2. La seconda Memoria , che avrebbe dovuto adornare la pubblicazione di questo anno l'era quella , che il socio *Flauti* aveva pur estratta da' Mss. del *Fergola*, e che ebbe annunziata all'Accademia fin dal gennajo 1832, quando ad essa ne leggeva l'altra *sulle Concussioni*, già impressa tra quelle di questo anno.

La qualità di segretario perpetuo di esso *Flauti*, esigendo di procurare, che non mancasse in ciascuna tornata qualche lettura da occuparla convenevolmente, fece sì, che quella di questa Memoria venisse da lui differita cedendo il luogo ad altre Memorie de' suoi colleghi, e ad altre faccende accademiche. Nè poi questo lavoro del *Fergola* esigeva una pronta pubblicazione, dopo essere stato per ben 12 lustri occulto tra'suoi Mss.

Eseguitane la lettura , per quanto n'era suscettivo un lavoro intarsiato di formole algebriche, ne veniva commesso l'esame alla classe matematica, ed egli ne inseriva un articolo nel *Rendiconto*, pel mese di maggio di tale anno.

Disgrazialamente quella Memoria , per la poca diligenza di chi è addetto al servizio dell'Accademia, presso il segretario perpetuo ed i soci, o per qualunque altra siasi cagione si è dispersa; nè per diligenze praticate da esso segretario è stato possibile rinvenirla.

Giunti al segno che la medesima avrebbe dovuto porsi a stampa, il *Flauti* pensava ricomporla da' brani che ve n'erano in que' Mss.; ma convintosi , che questa sua fatica sarebbe risultata piena d'imperfezioni, e di vuoti, da deturpare il lavoro originale dell'illustre autore; e d'altronde non volendo che per questa circostanza rimanesse dimenticata , giacchè il Mss. deve esistere presso taluno , ha stimato ripetere in questo luogo quel suntuo recatone nel *Rendiconto*, non senza qualche aggiunzione. In ogni caso potrà esso servir di spinta e norma a chi volesse intraprendere un simile lavoro.

SUNTO DELLA MEMORIA DI RICERCHE AEROMETRICHE SU' VULCANI.

Non v'ha fenomeno della Natura, che non sia agli occhi del filosofo scrutatore di essa una ricca miniera di escogitazioni e di ricerche, ciascuno riguardandolo pel lato di sue conoscenze, e della scienza che coltiva. Così avviene, che in una eruzione del nostro Vesuvio il fisico ne osserva e considera i fenomeni, e cerca indagare come avvengano, e quali ne sieno le cagioni produttrici, per quanto ciò gli è concesso, quali le meteore che ne dipendono; il geologo e il mineralista ne osserva que' prodotti che li riguardano; il chimico gli decompone, e cerca conoscere le sostanze diverse che gli formano, e la loro proporzione; il geometra misura l'altezza dell'ignita colonna eruttiva; l'agronomo l'influenza che l'eruzione può avere sulla vegetazione del circondario, ec. Nessuno però aveva ancora posto mente a valutare l'energia e la quantità di calore, che dalle materie ignite eruttate producesi, e si diffonde ne' corpi circostanti, dalla cui intensità può derivarne, e ne deriva in effetto l'abbruciamento.

A ciò rivolse il pensiero il nostro illustre *Fergola*, all'occasione dell'eruzione vesuviana avvenuta nel 1794, di quante ebber luogo posteriormente la più spaventevole e rovinosa, da che per essa risultonne per la nona volta coperta di altissima lava la Torre del Greco, e vidersi desolate in un attimo quelle amene contrade, ramminghi gli abitanti, e pieni di duolo essi e la nostra Capitale, che dopo sofferta una forte scossa di tremoto, per l'apertura istantanea della cima del Vulcano, di cui saltonne una non piccola parte, rimase per più giorni nell'oscurità, e coperta di cenere. Quindi egli s'indusse a distendere alcune *ricerche aerometriche su' Vulcani*, rimaste come le tante altre sue cose imperfette, pe' mali che dopo poco cominciarono ad affliggerlo e tormentarlo, che non ebbero mai lasciato per tutto il resto di sua vita: a che si aggiunse il disordinamento e la dilapidazione de' suoi MSS. nel tempo di sua ultima lunghissima malattia, e dopo la di lui morte, finchè non riuscì, al già suo antico discepolo, e poscia continuatore e sostenitore di sua scuola *V. Flauti* di acquistarli, con intenzione di ricavarne, alla meglio che fosse possibile, ciò che stimasse ancor degno di esser pubblicato. Se non che ancor egli distratto da sue incombenze, e da non pochi affari di privato interesse, cagioni a lui di grandi dispiaceri,

non potè soddisfare tal suo proponimento. Ma poichè il tempo, ch'è grandissimo rimedio a' mali morali, ebbelo alquanto acquetato, egli non potendo adempiervi nel modo, come da prima si era proposto, anche per attendere ad altri suoi lavori, pur cominciati, e rimasti imperfetti, ha stimato men dannoso alla scienza, ed al decoro del paese, dell'Accademia, e dell'illustre suo maestro, presentarli a questa, nella miglior maniera che fosse possibile; e però fin dal gennajo del prossimo passato anno indicavale questa Memoria, che, per le altre occupazioni di essa, non ebbe potuto presentargliela che nella 1.^a tornata del mese di aprile. E per darne una sommaria notizia, qui ne recheremo le enunciazioni delle proposizioni che vi si esponevano.

PROP. I. PROBL.

In una data eruzione di un Vulcano, vuol determinarsi la legge onde il calore ne cangia la densità dell'aria adjacente.

Compinta la soluzione di questo problema egli ne avvertiva, che a procedere con rigore nelle ricerche aerometriche che trattava, bisognerebbe prima dimostrare a rigore, che le densità de' fluidi elastici sieno proporzionali alle forze comprimenti; e si dovrebbe pur sapere con certezza la vera legge della propagazione del calore ne' diversi strati dell'aria atmosferica: delle quali ricerche la prima l'è ben dura a direttamente dimostrarla, come l'ebber fatto vedere il *d'Alembert* e *Daniele Bernoulli*. Ciò non ostante egli credè potersi ben concedere i principii da lui adottati nella soluzione del problema; perchè il calore si concepisce diffuso in giro da un punto come centro; e la densità della nostra atmosfera può, in parità di altre circostanze, prendersi per proporzionale alle forze comprimenti.

Da un tal problema egli poi ne ricavava a chi risulti proporzionale la rarità del fluido atmosferico; e ciò costituiva la

PROP. II. TEOR.

PROP. III. PROBL.

Trattava in questo la ricerca di quel punto nella verticale, che parte dal centro di diffusione del calore, ove la densità atmosferica sia un massimo.

Stabiliva in una

PROP. IV. TEOR.

Qual sia la velocità iniziale dell'aria naturale, che penetra nel vuoto.

Quindi dimostrava, che: *Se l'aria trascorra da un mezzo della temperatura a in un altro della temperatura x, la velocità dell'ingresso sarà*

uguale a pied. par. $\left(\frac{x-a}{x} \right)$

Indi dimostrava nella

PROP. V. TEOR.

Se dà termini di una retta ignita conducansi due rette ad un punto, che stia fuori di essa; il calore prodotto dalla retta in quel punto, sarà direttamente come l'angolo di quelle rette tirate ad esso, ed inversamente come la distanza di quel punto dalla retta ignita.

Passava quindi a risolvere il seguente problema.

PROP. VI. PROBL.

Determinare l'intensità del calore, che una lamina rettangolare arroventata produce in un dato luogo, posto in continuazione del piano di essa.

In seguito a questi due teoremi

PROP. VII. TEOR.

Se due lamine rettangolari sieno simili e similmente poste rispetto ai punti A, A' ; facendole ugualmente arroventare, produrranno un identico calore ne' due luoghi A, A' .

E considerando esse lamine come due parallelepipedi simili, di grossezza piccolissima, que' calori prodotti in A, A' saranno proporzionali a tali grossezze.

PROP. VIII. TEOR.

Due solidi rettilinei simili, della stessa materia, e di grossezze piccolissime rispetto alle altre loro dimensioni, si arroventino ugualmente; le intensità del calore, che essi produrranno ne' luoghi A, A' posti similmente rispetto alle loro superficie, saranno come i lati omologhi di essi solidi.

Trattava in seguito il seguente problema

PROP. IX. PROBL.

Sia un pezzo di lava vesuviana fluente di figura parallelepipedica, e di grossezza piccolissima rispetto alle sue altre due dimensioni; si cerca determinare l'intensità del calore prodotto da esso in un luogo A a rinpetto la sua sponda.

L'è chiaro che tutte queste ricerche conducono come conseguenza alla soluzione de' due seguenti problemi.

PROP. X. PROBL.

Una lava vulcanica sia sparsa in un campo orizzontale; vuol determinarsi il calore, che da essa ne ridondi nelle vicine terre.

PROP. XI. PROBL.

Sia uno strato di materia ignita inclinato all'orizzonte; si vuol determinare l'intensità del calore, ch'esso produce in un qualunque punto di uno strato di aria parallelo ad esso.

E qui veggonsi interrotte nel MSS. le di lui ricerche; rimanendo solamente abbozzate alcune altre proposizioni, che tralasciamo indicare, sembrandoci le materie finora esposte bastanti allo scopo prefissoci.

SCIENZE NATURALI

1. L'illustre socio cav. *Melloni*, di cui l'Accademia con dispiacere ricorda, e ricorderà per lungo tempo la grave perdita fattane il dì 10 all'11 agosto 1854, colpito dal *Colera*, che invase nuovamente, ed intristì la nostra Capitale, e varii luoghi del Regno, nella tornata del 7 gennajo 1853 presentava all'Accademia una sua Memoria sul nuovo argomento *della polarità magnetica delle lave vulcaniche, e rocce affini*, della quale ne veniva rimessa la lettura alla tornata seguente, (21 di tal mese).

Eseguitasi questa, l'Accademia rimaneva sì persuasa della novità ed importanza dell'argomento, che senz'altra formalità l'approvava nel medesimo giorno, deliberando ancora, che il segretario perpetuo ne facesse al più presto tirare a stampa 100 esemplari per l'autore, che ne dispensava a tutt' i suoi colleghi, e ne inviava all'estero.

Egli chiudeva questo primo lavoro, che venne con gran soddisfazione accolto da tutti i fisici europei, e specialmente, dal *Faraday*, e dal *d'Humboldt* (*), con segnar le tracce per continuarlo e perfezionarlo, dicendo. « Sarebbe certo in-
» dubitatamente utile, per la Geologia, e per la Fisica del
» Globo, il variare queste sperienze, e soprattutto il ripe-
» terle, togliendo successivamente i pezzi di lave da com-
» pararsi magneticamente insieme, dal centro e dagli strati
» superiori ed inferiori d'una delle poderose correnti Vesu-
» viane, che si lavorano negli scavi della *Scala* e della
» *Villa Inglese*, onde studiare le forze magnetiche della su-

(*) Di ciò fu ben avvertita l'Accademia da lettere scritte al segretario perpetuo, ed all'autore della Memoria, specialmente da due ultimi insigni soggetti qui sopra nominati.

» perficte , del fondo , e della parte intermedia , e vedere
» se la loro distribuzione è uniforme , oppure se gli ele-
» menti superiori hanno influito sull'energia e direzione de-
» gli elementi centrali. Ma fui trattenuto dal timore d' in-
» correre in ispese eccedenti i limiti, che mi sono prescritti
» dalle circostanze attuali (*).

Ma l'Accademia non dovendo comportare ciò che le veniva dal suo rispettabile socio proposto, niuno più di lui potendo trovarsi in circostanze proprie a continuare un tale argomento, aderiva alla proposizione , che le faceva il segretario perpetuo, fondata sull'articolo 70° dello Statuto , e deliberava per lui una gratificazione , in aspettanza della quale, quel rispettabile socio, pieno di decoro, passionato per la scienza , che eminentemente coltiyava , continuando le sue osservazioni, nella tornata del 5 agosto 1853, leggeva una 2^a Memoria sullo stesso argomento, che venne, dietro la relazione favorevole de' commissari, la quale leggesi nel *Rendiconto* da pag. 141 a 156, approvata unanimemente per gli Atti, da tirarsene prontamente i 100 esemplari, come si era fatto per la prima. Ed egli quasi presagisse non essergli dato presentarne altre, come aveva in mente, estraeva dalle due già date le *principali proposizioni relative al magnetismo delle rocce*, e presentavale all'Accademia, nella 1^a tornata del novembre, per farle inserire nel *Rendiconto*, ove veggonsi, a pag. 187 e 188.

(*) La distinta casa del Melloni in Parma, con la quale egli era unito d'interessi, aveva di recente sofferta grave perdita; ed è noto, ch'esso non aveva altri mezzi pel decente sostentamento ordinario di sua propria famiglia, sebbene si fosse ridotto ad abitare in una sua villetta in un angolo del Comune di Portici, menandovi vita ritiratissima, e solo attendendo a'suoi studi, in promuovere le scienze fisiche, e ad educare due sue graziosissime ragazzine una delle quali essendo mutola, gli era di continua afflizione.

Il d.^r. *Achille Costa*, prima che fosse nostro socio corrispondente, dimandava presentare all'Accademia un suo lavoro su' *Crostacei Amphipodi del Regno di Napoli*, ed ottenerne da essa l'assenso, il presidente inviavala all'esame de' soci cav. *Tenore*, cav. *Gussone*, *Gio. Guarini*, e cav. *Vulpes*, sul favorevole parere de' quali, lettole nella tornata del 17 settembre 1853, la destinava a comparire ne' suoi Atti. Da tale epoca continuando sul medesimo soggetto i suoi studi il *Costa*, l'ebbe grandemente esteso nelle descrizioni, aggiunlevi nuove *sottofamiglie*, così denominando quelle da esso, nella Memoria già presentata all'Accademia dette *Tribù*, sicchè avendola interamente trasformata ed estesa sulle prime prove di stampa, senza alcuna intelligenza del segretario perpetuo, costui non volendo porre ostacolo a tali miglioramenti di un lavoro da publicarsi dall'Accademia, ben tre anni e mezzo da che essa l'aveva approvato, ne rimetteva tali stampe al socio cav. *Tenore*, seniore della classe di Scienze Naturali; il quale avendo, in data del 6 marzo 1857, dichiarato potersi publicare nel modo rifatto, il segretario perpetuo è nel dovere di quì avvertire, che tal Memoria non può per le novità, che possono contenervisi, prender data dal settembre 1853, sìvvero dal marzo 1857: avvertimento che egli ha creduto tanto più necessario, quanto che l'autore aveva, in fine della introduzione al suo lavoro rifatto, apposta la data del 1853, e dichiarato, che le *novità contenutevi* dovevano a quest'epoca riferirsi. È da sperare, che per l'avvenire non abbiano ad aver luogo tali arbitrii dall'autore di una Memoria, cui può ben accordarsi l'aggiugnervi, o modificarvi, sempre però intesa l'Accademia, che dovrà approvarne le giunte, o le modificazioni.

MEMORIE

APPROVATE PER L'ANNO 1854.

MATEMATICHE

Il laborioso socio *N. Trudi* dava per questa volta due Memorie , in continuazione l' una dell' altra. Esponeva nella prima *le proprietà delle curve di second' ordine circoscrivibili ad un quadrigono* ; e nell' altra : *Qual fosse la conica di area minima descrivibile per quattro punti*.

Faceva precedere tal suo lavoro , che presentava nella tornata del 9 giugno, da un breve cenno sul medesimo, per darne contezza all' Accademia , che ad essa leggeva in tale tornata ; e questa , adempite le formalità volute dallo statuto , le approvava per gli Atti , nella tornata del 1° settembre ; e può leggersene la relazione de' commissari nel *Rendiconto* a pag. 95 e 96.

Lo stesso *Trudi* aveva, nella tornata del 17 marzo, presentato all' Accademia un lavoro di un suo allievo, *Leopoldo de Majo*, di *Modi e formole generali, per le eliminazioni tra le equazioni di 1°. grado*, nel quale merita special riguardo la dimostrazione data, la prima volta, della regola di *Bezout*,

per ottenere, senza eseguire calcolazioni, talvolta lunghe, e tediose, i valori delle incognite.

L'Accademia accoglieva questo lavoro, di un giovinetto, che mostravasi sì provetto da trattare un punto difficile ed importante dell' Analisi moderna, ed ottenutone favorevole parere da' commissari destinati ad esaminarlo, che leggesi nel *Rendiconto* a pag. 72 e 73, l'approvava per gli Atti, nella tornata del 7 luglio; ed uniformandosi seguentemente ad una deliberazione da essa altre volte fatta, di riconoscere nella qualità di soci corrispondenti coloro, che le avessero presentato qualche lavoro inedito, da lei giudicato meritevole di sua piena approvazione, il nominava a tal grado.

SCIENZE NATURALI

L'operosissimo e dotto socio *cav. Melloni*, nella tornata del 7 luglio, teneva intenta l'Accademia nella lettura di una sua Memoria, *sulle correnti elettriche di varia tensione, nello stesso conduttore metallico*; e seguentemente, che fu l'ultima volta, che ci fu dato ascoltar la sua voce, ed accogliere suoi importanti lavori, occupavala con altra Memoria, *sull' induzione elettrostatica*. La prima di esse gli veniva approvata per gli Atti, dietro relazione de' commissari, nella tornata del 21 luglio, che vedesi inserita nel *Rendiconto* a pag. 77 e 78, ma l'immaturo morte, poco dopo seguitane, non gli permise di esser testimone del rispetto, che i suoi colleghi tutti avevan di lui, per la sua dottrina, e pel suo carattere mite, e rispettoso, vedendo anco approvata per gli Atti, a pieni voti, l'altra, come ebbe luogo nella tornata del 1° settembre.

Lasciava egli tra le sue carte la descrizione di un nuovo *Elettroscopio* di sua escogitazione, preparata per leggerla nella 1^a tornata dell'agosto, che doveva aver luogo nel dì 4; ma che, per cagion del *Colera*, il quale infieriva tra noi in quei giorni, veniva differita al 18; ed essendone egli disgraziatamente rimasto una delle non poche vittime, al certo però la più distinta, veniva quella raccolta dal suo collega ed amico, il nostro socio *A. Nobile*, che dimandava leggerla, come ebbe fatto nella tornata del 25. Eseguitasi tal lettura, e conosciutasi l'utilità di questo strumento, che il socio anzidetto non ebbe mancato mostrare all'Accademia, questa non solamente ne deliberava l'acquisto, quan-

do alla sua rispettabile vedova fosse piaciuto disfarsene , o pure un novello esemplare , da eseguirsi dallo stesso macchinista sig. *Gargiulo* , di cui si era prevaluto il *Melloni* , come ebbe luogo ; ma approvando il parere de' commissari destinati a fargliene rapporto , incaricava il segretario perpetuo, acciocchè in aspettativa della pubblicazione a fare negli Atti, della già detta descrizione se ne facesse una edizione in piccol numero, per render noto quello strumento, ed il suo uso, come venne eseguito, e che vedesi inserita al seguito del *Rendiconto* per l'anno 1854. Ed ora , a raccogliere tutte le di lui cose che ci rimangono , verrà riprodotta dopo le due precedenti Memorie.

MEMORIE MATEMATICHE

PRESENTATE

DA' SOCI ALL' ACCADEMIA NELL' ANNO 1852

E DA ESSA APPROVATE.

SULLE CONCUSSIONI

MEMORIA ESTRATTA DAI MANOSCRITTI

DI

NICOLA FERGOLA

Dal socio ordinario F. Flauti (1).

1. La teoria delle concussioni, che fin da'primi albori della Dinamica avrebbe dovuto impegnare al suo sviluppo i Geometri e gli Analisti, è rimasta fin oggi come spregevol cosa in non cale. E pure un fiume, che disargini le sponde, che vi rovesci robustissime parate, che porti a nuoto immense e poderose masse, come se fosser lievi galleggianti, non son potenti a spignerne il curioso genio de' dotti? Almeno un filosofo rivenuto dallo spavento che l'ira della Natura, o l'impeto di ostili schiere gli avran forse recato, potrà giocondamente intrattenersi a spiegare con questa teoria que' moltiformi, ed orribili rovesci. Ed oltre a queste gradevoli speculazioni ei potrebbe eziandio ritrarne verità utili ed illustri, lo che intendo di qui fare principalmente, e di vantaggiarne le scienze della Natura, ed i loro usi.

Ed in vero l'urto di un corpo che contro di un fermo obice si

(1) È d'uopo avvertire, che il *Fergola* fu indotto a trattare questo argomento all'occasione del tremuoto che risentissi fortemente in Napoli il 26 luglio 1805, dal quale tutta la popolazione rimase grandemente commossa e spaventata. Inoltre, che egli aveva per costume di perfezionare e rettificare i suoi lavori nell'atto della stampa, alla quale, per questo, non pose mai mente, deviato da altre occupazioni, e da' mali che continuamente l'affliggevano.

spinga, suol estimarsi dalla massa di quel corpo incorrente, dalla velocità di esso, e dal seno dell'angolo d'incidenza, cioè dal prodotto di queste tre grandezze l'intensità misurasi di quell'urto. Da un tal Principio alcuni meccanici han rilevato aver più impeto, e momento le palle da cannone, che non lo erano gli arieti degli eserciti antichi: perciocchè la massa di un ariete ha men ragione al peso di una palla di cannone da battere, che non è la velocità di questo corpo rispetto alla velocità di quello. Ed alcuni altri han detto ulteriormente esser più potenti, e più spedite le macchine belliche, con cui sogliam noi abbattere le mura ostili, e farvi la breccia, che non lo eran quelle degli antichi belligeranti. La quale altra conseguenza, ove si consideri la concussione de' corpi non può esser vera, e ciò per le seguenti ragioni.

La concussione eccitata in una massa grande, vi produce un oscillazione, ed un tremore proporzionale alla sua energia. Per tali movimenti vi si distendono le di lei fibre in un certo modo. Dalla distension delle fibre, s'ella sia eccedente, ne nasce una frattura nel corpo, ed altre separazioni del continuo. E seguitandovi le ulteriori concussioni ciascuna parte staccata è un forte percuziente dell'altra, e per tal modo rovinansi a vicenda. E qual sarà poi il rovescio della detta massa, s'ella interamente, o una sua parte distaccata da essa ne strapiombi? Siechè può dirsi che un edificio robusto, ed immenso, quando concepisca una forte commozione, diventi un fiero distruttore di se stesso.

Ma lasciamo queste ed altre indicazioni, che sarà meglio derivarle da' seguenti teoremi, ed eccone i Principii della proposta teoria:

PRINCIPIO I.

2. Ciascuna fibra di un corpo, qualunque ei sia, è suscettiva di un certo grado di distensione, oltre al quale ella si rompe nella più debole sua parte.

Dim.—Prendiamo in prestanza dalla Statica il seguente saldisimo Principio, ed è che non solo i legni, ma i metalli altresì e le pietre, e'l vetro abbian le loro fibre suscettive di distensione, e quindi anche

distraibili. E la frattura in ciascun di detti corpi non potrà poi succedervi, se una forza non v'impegni alcune fibre ad un grado maggiore di distensione, di cui son capaci.

La parte più debole di una fibra non è quella solamente, ove sieno meno coerenti i minimi di lei elementi; ma ove una forza svelente prevalga alla loro coesione più che in altra parte. Così una fibra che costi di particelle ugualmente coerenti, e gravi, se si legghi ad un forte chiodo, e poi facciasi verticalmente stirare da un peso, che penda dal suo estremo inferiore, sarà più debole nell'attaccatura a quel chiodo, che in altro punto della sua lunghezza, poichè quivi concorre al suo svellimento il peso del corpo, che vi pende, e l'intero peso della detta fibra. E se una fibra semplicissima sia composta di elementi privi di gravità, e con pari forza congiunti tra loro, se mai sarà strappata, ove dovrà ella rompersi? *Mussehenbroeck* credè dover-si ciascun di detti elementi separar dall'altro, ed ella doversi ridurre in polve. La qual cosa non so se avrebbe potuto essere compiutamente dimostrata da sì dotto uomo, stabilito che siasi il modo, e la legge, onde i detti elementi son coerenti l'un l'altro.

PRINCIPIO II.

3. La frattura di una fibra può succedere per l'azione di un gran peso, che la distenda. E s'ella trovisi fermata a due immobili ritti, e fortemente stirata, potrà anche frangersi, quando riceva una gagliarda scossa da un corpo che spingasi contro di essa.

Qui notisi, che la frattura di una fibra può essere prodotta e dalla soverchia distensione ch'ella ne avrà sofferta, e dall'impeto di un corpo, che incorre contro ad essa, che però stia fortemente stirata e raccomandata a due gagliardi ritti. Cioè a dire le fratture delle fibre de' corpi o sono effetti di forze prementi, o pur di forze di urto. Di queste seconde quì ragionasi principalmente, poichè delle prime suol parlarsi nella Statica da scrittori accurati.

PRINCIPIO III.

4. Quando una fibra frangesi per urto , come quì avanti si è detto, l'impressione, che rifondesi ne' suoi sostegni , sarà minore a proporzione, che sia più celere quel corpo in essa incorrente; e può darsi benanche che ella sia zero.

Dim.—È comune sperienza, che una palla da schioppo perforando una banderuola non la rivolga circa il proprio asse. Ed ella ne buca un fragilissimo vetro , senza che altrove si franga , o veggasi striato. Imperocchè le parti celeremente staccate nella banderuola e nel vetro , non trasmettono veruna quota delle loro impressioni alle parti che ne rimangono. E perciò quanto è più celere il frangimento di una fibra tanto men da' suoi sostegni si risente l'impressione; del che altrove.

PRINCIPIO IV.

5. I corpi le cui fibre son più capaci di distensione , sono meno suscettivi di frattura, e ciò in parità di altre cose.

Dim. — La retta AB (*fig. I.*) rappresenti una fibra di un dato corpo, la quale per l'azione della forza F applicatale in mezzo, siasi ridotta nella lunghezza , e nel sito ACB , acquistandovi la massima distensione. Similmente A'C'B' dinoti il sito e la lunghezza di un'altra fibra uguale alla prima nella lunghezza, nella coerenza delle parti , nella lor grandezza, *ec.* la quale in virtù della forza f applicatale benanche in mezzo ad essa abbiassi acquistata la sua massima distensione A'C'B'. Da punti C, C' si abbassino le CR , C'R' perpendicolari alle AB, A'B' rispettivamente. Sarà chiaro dover essere le forze F ed f come gli spazietti CR , C'R', che debbonsi percorrere dalle parti medie delle due fibre AB , A'B' , allinchè queste ricevano le massime loro distensioni. E sarà poi facil cosa rilevarne, che più forza ne abbisogni a frangere un corpo, quant'ei ha più distensibili le sue fibre. Ma su di ciò eccone ulteriore argomento.

Prendasi nella CR la parte RQ uguale ad R'C', ed unite le QA, QB si meni da Q la QS parallela alla CA. Sarà CR ad RQ in egual ra-

gione di CA a QS, e quindi quella al par di questa dovrà esserne in maggior ragione di CA, a QA, o pur (prendendone i dupli di questi termini) di ACB ad A'C'B'. Vale a dire le forze CR, e C'R', che impegnino le fibre AB, A'B' nelle massime distensioni ACB, A'C'B', non son come le lunghezze acquistatesi dalle fibre prima del loro frangimento, ma quelle in maggior ragione di queste. E quindi se mai la forza F' abbia prodotto la distensione ACB dupla di A'C'B', che in A'B' producevi la forza f , dovrà esserne la F' più che dupla di f . E lo stesso valga per gli altri rapporti delle distensioni, e per chiaramente concluderne l'assunto.

6. *Coroll.* Molte illazioni, per tanti usi pratici, si potrebbero di qui derivare. Ma sarà meglio rapportarle altrove, contentandoci di assieuarne un tal principio, e di vie più promuoverne il suo sviluppo.

7. *Definiz.* Qui per *allungamento* di una fibra intendasi l'eccesso della di lei lunghezza, nello stato di massima distensione, sulla natural lunghezza di essa.

PRINCIPIO V.

8. *Se due fibre sieno capaci d'insensibile distensione; gli allungamenti di esse saran proporzionali a quelle forze che ve li producono.*

Dim. — Premessi quegli artificii geometrici, che ho nel precedente Principio praticati, col centro B, intervallo BR (*fig. 2*) si descriva l'arco circolare RnN, il quale segnando in N, ed n le BC, BQ vi troncherà le parti CN, Qn, che dinotano le metà de' rispettivi allungamenti, che soffrono le fibre AB, A'B' distese per l'azion delle forze F ed f .

E poichè cotesti allungamenti si suppongono essere insensibili, i due triangoli CRN, QRn si potranno avere per rettilinei, e per simili tra loro. Onde starà $RC : RQ :: CN : Qn$: cioè $F : f :: 2 CN : 2 Qn$. Cioè le forze fragenti F ed f , come gli allungamenti delle proposte fibre AB, A'B'.

9. *Coroll. I.* In questo Principio contiensi la dimostrazione di un paradosso di Statica, forse ad altri ignoto, cioè : *un corpo che sembra il più inflessibile e duro, l'è, in parità di altre cose, il men forte.*

10. *Coroll. II.* Se alla fibra AB sieno applicate infinite forze, le cui direzioni sieno parallele alla CR, e la cui somma sia F , la medesima distensione in detta fibra, dovrà da quelle forze, o da questa sola procurarsi. E questo principio l'è come un Postulato. Imperocchè siccome in una verga rigida può ammettersi cotesta equivalenza di forze, così in una fibra d'insensibile flessione potrà lo stesso principio militare.

11. *Scol. 1.* L'impeto dell'acqua profluente non deesi misurare, in parità di altre cose, dalla velocità del profluvio e dall'intera massa di tal corpo. Perciocchè in tal modo quello ne sarebbe pressochè infinito: ed una tal misura che conviensi solamente a'corpi solidi, si adatterebbe ai fluidi, le cui parti essendo tra loro disciolte, non possono mai formare l'unità di un corpo. Si dovrà dunque quell'impeto valutare dalla velocità del profluvio nello strato di esso tangente il solido che vi percuote? Ma in quest'altra guisa ei sarebbe infinitesimo. Intanto gl'idraulici italiani, e gli analisti francesi, forzati dalle sperienze e da geometrici ragionamenti han conchiuso, dover quell'impeto uguagliare il peso di detto fluido, il di cui volume è la superficie del solido direttamente percossa dal fluido moltiplicata per l'altezza dovuta alla velocità del profluvio. Ed ecco che una forza d'urto pareggerebbe una pressione, cioè una forza viva potrebbesi ad una forza morta comparare. Ma perchè niun si offenda di tali cose, eccone un dicevole chiarimento.

12. *Scol. 2.* Quando gl'idraulici ragguagliano ad un certo peso l'urto dell'acqua profluente, essi non intendon mai di confonder la natura di queste forze sì diverse tra loro, ma di pareggiarne solamente i valori delle loro spinte primitive. Ed io vi aggiungo che il processo delle spinte dell'una sia diversissimo da quello dell'altra. Così l'acqua profluente nell'imbatter sulle palmule di una ruota vi produce sulle prime una certa concussione, la quale prima di rassodarsi n'è investita da un altro urto, e questo da un altro, e ciò successivamente; talchè comincia a muoversi quella ruota, ed indi poi a velocitare insino ad un certo grado. Ma un peso che agisca su quella ruota ancorchè fosse quanto quella spinta iniziale dell'acqua profluente, essendo eliso dalla prevalenza della resistenza della macchina, e non vi producendo alcuna concussione, non potrà mai animarla al moto. E ciò intendasi bene.

PROPOSIZIONE I. TEOREMA.

13. *Nell'ispiegare filosoficamente i tremuoti, non debbonsi ammettere altre cagioni, che le sole vere, e le suffieienti ad ispiegar queste cose, cioè la diversità dei moti che un forte tremuoto suol impartire a' corpi terrestri, la sorprendente di lor forza, la costante direzione delle ondolazioni, il loro isocronismo, l'istantaneità nel propagarsi i detti moti, e la discontinuità nell'impartizione de' medesimi moti, le loro repliche ec. E finalmente perchè tante meteore atmosferiche debban precedere, accompagnare o seguire le scosse di un forte tremuoto.*

Dim. — Questo teorema non è che un'applicazione di quella regola che l'immortal *Newton* propose per ben filosofar sulla Natura, cioè: *Causas rerum naturalium non plures admitti debere, quam quae et verae sint, et earum Phaenomenis explicandis sufficeiant* (1). Dunque nello spiegare filosoficamente un tremuoto dee rendersi una ragion completa della sua forza sorprendente: dappoichè il più delle volte egli ha progettate isole grandissime; ha ingojati monti, città e regioni immense; ha spaccati gl'istmi; ha dalle penisole e da' continenti recise una o più isole, vi ha dispersi gli antichi fiumi, vi ha formato nuove congreghe d'acqua; ha rovesciato i mari sulle vicine terre, ed altri momentosi e terribili effetti ha cagionati (2).

Or quì distinguonsi questi tre moti principalmente, cioè il susulto, l'ondolazion della Terra, e talora un certo moto turbinatorio, come il rilevammo a' 26 luglio. Nel moto vi si sperimenta eziandio un tremore, o un convellimento, ed una trepidazione ne' monti, e nelle cime de' corpi impiantati su detta Terra; onde saggiamente i Greci chiamaron σεισμος il tremuoto, e vi distinsero un tremore ed una pulsazione, come di un uomo che si convelle e trema.

Le dette ondolazioni sono isocrone, e come di un pendolo, che oscilli a secondi. Esse dirigersi durante un tremuoto per una medesima direzione. E questa costante direzione si cangia a grandi distanze.

(1) *Princip. Mathem. lib. III. — Reg. I. philosophandi.*

(2) Di simili accidenti è ricca la storia fisica della nostra penisola (F.)

IV. Il propagamento dell'ondolazione si fa quasi istantaneamente per immensi intervalli, cioè di centinaia e migliaia di leghe.

Mentre trema una gran parte della nostra Terra, molti luoghi che vi si contengono vi soffrono poco o niun danno.

PROPOSIZIONE II. TEOREMA

14. Un forte tremuoto, non può spiegarsi per l'urto di certe masse solide rinchiusse nella nostra Terra, o per quello delle arie, e delle acque ivi ascose.

Nè una tal cagione può ripetersi dall'effervescenza di materie terrestri incendevoli, nè tampoco dall'esalazioni solforose, cioè dal divampamento delle arie infiammabili, o dalle acque ridotte in vapori, ed agenti nelle rinchiusse caverne di nostra Terra.

Dim. — Una gran caverna che stia nelle viscere di nostra Terra, se per accidenti fortuiti, o per propria vecchiezza crolli sulle terre sottoposte, dovrà loro impartire un gran moto, e dovrassi sentire nella superficie una trepidazione conveniente. Ma con questo urto non si potrà render ragione delle sincere ondolazioni, che concepirà la detta superficie, e della costante loro direzione, nè tampoco de' sussulti, e de' moti turbinatorii, o di vertigine. Di più non potrà mai spiegarsi perchè un luogo che stia in mezzo a due altri scossi fortemente da un tremuoto, non ne risenta alcuna impressione. E come in tal sistema potrà spiegarsi, che un dato tremuoto suol talora essere preceduto, accompagnato, o seguito da meteore elettriche, ed ignite?

L'aria, che è nella cima de' più alti monti, è quasi doppiamente più rara di quella che a lido di mare respiriamo. E per una profondità di tre miglia entro di nostra Terra, la medesima aria, che è un fluido sommanente elastico, ne sarà densa al doppio. E così in altre profondità maggiori, che stieno nel nostro Globo, la densità dell'aria che ne riempie certe caverne intestine vi sarà cento e mille volte maggiore di quella, che gli uomini respirano. Ed essendo l'elasticità di tal fluido proporzionale alla densità, eh'ei tiene, di qual molla non sarà l'aria sotterranea, e quella massimamente che sarà penetrata da un gran calore? E sebben questa forza sia ben grande, non

potrà cagionare un tremuoto per migliaia di miglia quadrate. E con tal altra ipotesi non si potran spiegare i fenomeni posteriori al primo nella prima proposizione.

L'acqua ch'è un fluido omogeneo, se fluisca entro la nostra Terra, in gran copia, e da grandi altezze, potrà imprimere in obici terrestri anche de' gran moti. Ma in questi ricadono le difficoltà anteriori.

Io concedo altresì che nel nostro Globo possan farsi delle vulcaniche accensioni, che quivi possan divampare ed in gran massa le arie infiammabili, che per queste o quelle cagioni si possa grandemente rarefare l'aria interiore della nostra Terra, e che le acque risolvansi in vapori attivissimi, o che crepitino con gagliarde esplosioni; pure questi nuovi agenti della Natura non son da tanto a poter produrre un tremuoto di massima estensione, e di rovine momentose.

Nè poi i fenomeni posteriori espressi nel 1.^o teorema potrebbonsi spiegare in tal sistema.

PROPOSIZIONE III. TEOREMA

15. I sussulti di un forte tremuoto si spiegano felicemente per mezzo di una scarica elettrica, che si faccia nell'aria da' corpi rinchiusi in seno della nostra Terra: o per una Bolide che crepi gagliardamente nelle viscere della Terra

E si propongono varii metodi geometrici agevolissimi per poter calcolare con alcuni dati la profondità della cagione di un tremuoto.

Dim. Parte I. — Il torrente elettrico, che produce un forte tremuoto, non può dirigersi entro la nostra Terra per una corda o sottesa di un arco, vale a dire per AB (*fig. 3*). Dappoichè in tal caso i luoghi A e B, che son ne' termini della commozione elettrica sarebberne assai più danneggiati, che quei che sono verso il vertice D del segmento sferico ADB. Lo che ripugna alla sperienza. Dunque cotesta diffusione elettrica dee farsi da un punto O del raggio CD verso la superficie ADB. Ed i sussulti del tremuoto ne' luoghi A, D, B *ee.* dovranno nascere dalle diffusioni delle correnti elettriche per OA, OB, OD *ee.*

Parte II. Ciò posto, se in un luogo qualunque A potesse conoscersi la direzione del sussulto, cioè a dire l'angolo RAS fatto dalla tan-

gente AS , e dalla segante OAR , che passi per O , si potrà conoscere facilmente la profondità del tremuoto. Imperocchè essendo data la distanza del luogo A dal centrale D , e quindi il suo doppio ADB , si saprà l'angolo SAB , e quindi l'altro OAE , che deve far due retti con i dati angoli EAS , SAR. Dunque nel triangolo rettangolo EAO sapendosi l'angolo acuto OAE e'l cateto AE , si saprà l'altro OE , che aggiunto al seno-verso dell'arco AD , ne darà la cercata OD. E se vogliasi sapere, come sicuramente può assegnarsi, l'angolo di proiezione RAS , a me pare potersi ciò ottenere dagli sbalzi osservati ne' corpi rotondi che posino sul suolo. Imperocchè misurandosi le ampiezze di queste parabole , e le altezze dei loro vertici, per approssimazione, si potrà co' metodi balistici determinare l'angolo RAS.

2. E sapendo in che ragione stien tra loro due sussulti ne' luoghi A e D , potrebbesi la medesima OD con quest'altro metodo appurare. Cioè, le forze proiettorie per OA ed OD posson suporsi inversamente come le vie OA ed OD percorse da' raggi elettrici, riguardandole, in parità di altre cose, di uniforme resistenza alla diffusione elettrica. Dunque il nostro problema si riduce in quest'altro geometrico, e di facilissimo snodamento per la sintesi pura, e per l'analisi, cioè dati i punti A, e D dell'arco circolare ADB, inclinare dal punto A la retta AO sul raggio DC, sicchè stia AO ad OD in data ragione.

E potendosi considerare l'arco AD, che è piccolissimo rispetto all'ambito di nostra Terra, come combaciante colla sua tangente LD, lo stesso problema si semplificherà con quest'altra indagine geometrica, cioè: Inclinare dal punto L la retta LO, sicchè stia DO ad LO nella ragione di 1 ad n . A tal oggetto sia $DL=x$, $DO=x$, e quindi $LO=\sqrt{(a^2+x^2)}$, sarà

$$x:\sqrt{a^2+x^2}::1:n, \text{ cioè, } n^2x^2=a^2+x^2, \text{ ed } x=a\sqrt{\frac{1}{n^2-1}}$$

Onde ben si vede esser la profondità di un tremuoto tanto maggiore , quanto n'è l'estension di Terra, che ne ha risentito i sussulti, e quanto sia più piccolo il rapporto di due sussulti in parità di altre cose.

PROPOSIZIONE IV PROBLEMA.

16 Spiegare con tal sistema l'ondolazione della Terra prodotta da un forte tremuoto, e la costante direzione, e l'isocronismo di tal moto.

Sia C (*fig. 4*) il centro di nostra Terra, ed O il luogo, ove succeda l'esplosione di un forte tremuoto, cioè dal detto punto O spingansi i raggi elettrici OA, OE, OF, OB, OD ec. insino alla superficie di quella Terra, che ne riceva le scosse del sussulto, e delle ondolazioni. Questo settore di sfera accorciato, che ha per base la detta superficie, e per vertice quel punto O, intendasi diviso pe' due piani AOB, EOF, che passino per O, e racchiudano materiali anelettrici, o conduttori in gran parte, come son le miniere, le acque, i corpi umettati, ec. Sarà chiaro che allo scoppiar del tremuoto un torrente di elettricismo debba diffondersi dal punto O in quegli strati terrestri, che son contigui a quella parte di Terra ADBFE, che calchiamo: e che lo stesso torrente si spargerebbe nell'aria, se questa non fosse idioelettrica, ed in quegli strati non si ritrovassero corpi della medesima natura, cioè idioelettrici. Dunque lo spazio ADBFE, che può aversi come un tubo ricurvo, sarà pieno di fuoco elettrico di una variabile densità, per esserne quivi per diverse vie, ed in diverse dosi pervenuto un tal fluido. E dovendosi ridurre in equilibrio, e rendersi omogeneo, sarà costretto ad oscillare in detto tubo, come addiviene ad un fluido omogeneo, che riempia due tubi comunicanti, o un tubo ricurvo, e quivi stiane disquilibrato, o pur ne sia da forza straniera agitato. Ma le oscillazioni di tal liquore, come il Newton, il Bernulli, ed altri han dimostrato, sono isocrone tra loro. Dunque il detto fluido elettrico dovrà benanche oscillare nel tubo ADBFE, o piuttosto in tal tubo si faran dei flussi e riflussi di elettricismo, finchè ei siasi equilibrato, ed abbiano impartito all'aria esterna una quantità conveniente.

Ciò posto, in ciascun di quei flussi e riflussi di elettricismo, saran gagliardamente agitati que' corpi idioelettrici, che si rinverranno entro del tubo ADBFE, ed essi ne scuoteranno le fondamenta degli edifizii, il suolo ov'essi ne stanno, le basi de' monti ec., e questa parte di Terra ADB, che necessariamente deve avere limiti cedevoli, com'è la

terra ortense, il mare, le valli, i fiumi ec. oscillerà per la direzione ADB , ed un simil moto avranno i monti, gli alberi, gli edifizi ec. E saranno isocrone coteste ondolazioni di solidi, come erano isocrone quelle del detto elettricismo nel tubo $ADBF$. Ma oltre a ciò nel comunicarsi questo fluido dal suolo all'aria, per la varia resistenza di questa, e de' corpi che sono nel suolo, dovrà la Terra trepidare, come col seguente geometrico ragionamento rileveremo.

Sia N (*fig. 5*) un pezzo di Terra poco connesso con gli altri corpi contigui: ed egli siane animato per NT , in una ondolazione del tremuoto, e per NQ nell'urto verticale, che l'elettricismo uscente nell'aria gli reca. Dovrà questo pezzo di terra muoversi per NS , e nel riflusso dell'ondolazione si condurrà per l'altra diagonale NR , cioè a dire ci trepiderà per NS , ed NR .

Se non ci fossero stati cotesti due moti, nell'ultimo tremuoto del 26 luglio, ma il solo ondolatorio, che è piuttosto un moto progressivo, i nostri edifici avrebber sofferto lievissimi danni, nè si sarebbero a vicenda inclinate le lor pareti, e staccate dalle coperture delle stanze. Del che in appresso.

Di più con questi due moti polremo spiegare agevolmente, perchè mai gli alberi de' giardini siensi veduti al finir del tremuoto inclinarsi verso il Sud con moto parallelo, e perchè mai nel tremuoto di Calabria del 1784, non pochi alberi sieno stati svelti, capovolti, piantati colle radici in su, ec.

Ed essendovi sotto del suolo materie conduttrici, come si è sperimentato in *Chiaja* (3), ed in altri luoghi, il tremuoto avrà i due soli moti di sussulto, e di ondolazione progressiva, che non suol essere pernicioso.

Se non vogliasi riconoscere questa oscillazione elettrica, dovrà dirsi, che il settore sferico, o piuttosto il solido $ADBFEO$, (*fig. 4*) siasi librato intorno al suo centro di gravità G , e che quivi intorno ne oscilli. E come dunque potrà fendersi la Terra in tal modo, ed intorno a qual asse immobilmente? come sospendersi in G in istato di libramento? e come n'è restato vuoto un grandissimo spazio intestino $ACBO$, per potervi oscillare liberamente e per archi grandi il punto O ?

(3) Sito ameno in riva al mare, esposto a mezzogiorno.

PROPOSIZIONE V. TEOREMA

17. Ne' forti tremuoti i maggiori e più robusti edifici, son di meno resistenza de' minori. Laddove nello stato di quiete i primi han più consistenza de' secondi.

Dim.—Allorchè un forte tremuoto ecciti delle ondolazioni e de'tremori in un dato edificio, le volte, i tetti, ed altre coperture delle di lui stanze non dovranno rimanersi attaccate alle pareti, ma vi si dovranno disgiungere in convenevol modo. In fatti le AC, e BD (*fig. 6*) disegnino due muri paralleli, che per le scosse di forte tremuoto pieghino a vicenda ora per AE e BF, ed ora per AG, e BH, rimanendo AE parallela a BF, ed AG parallela a BH. Non potrà la EF rimanersi parallela alla base AB, ed insieme perpendicolare alle AE, BF; e lo stesso può dirsi della GH, dappoichè ciò ripugna ai geometrici concetti. Nè poi le parti del solido ACDB son perfettamente flessibili, sicchè senza frattura potesservi prender la forma di un parallelepipedo obbliquoangolo AEFB, AGHB. Ed ognun di noi il sa benanche per esperienza, che le travi le quali si trovano perpendicolari alle mura AC, BD, se non sienvi frenate da catene di ferro, o in altro modo, sogliano per tal tremuoto uscir da' loro fori, ed in essi rimettersi vicendevolmente, o pur crollarne, se pieghino assai le mura. Dunque dovrà fendersi in qualche parte l'edificio ACDB: e continuandovi le ondolazioni, dovranno aprirsi, e chiudersi a vicenda le anzidette lesioni. E finalmente una parte di tale edificio diverrà come un poderoso ariete che ne percuote l'altra, con la celerità acquistatane dal tremuoto, e non dal suo disquilibrio, o dalla sua gravitazione naturale. E' il valore di cotesta forza percuziente dovrà stimarsi, per quel che insegnano i meccanici, dalla celerità dell'oscillazione delle mura, dalla massa della parte percuziente, e dalla distanza che ha la parte percossa dal suo centro di moto.

Ciò posto si chiami V la celerità, che per l'azion di un forte tremuoto ne concepisca nella cima il grand' edificio NOPQ (*fig. 7*), M sia la massa della suprema di lui volta PQ, ed A l'altezza di detto edificio. Inoltre dicasi m il tetto della piccola abitazione $nopq$, ed a la di lei

altezza, cioè la po . Sarà $\frac{aV}{A}$ la velocità, onde ne oscilla la cima di questa abitazione durante l'anzidetto tremuoto: essendo le velocità, come le distanze dal centro di moto. Di più sarà MF il momento della volta PQ : ed $\frac{maV}{A}$ quello del tetto pq . Ed i rispettivi valori di queste due forze applicate a' punti P e p delle leve PO , po , vertibili intorno a' loro centri O ed o , saranno MVA ed $\frac{ma^2V}{A}$. E l'una forza starà all'altra come MA^2 , ad ma^2 , cioè in ragion composta dalle masse delle loro coperture, e dalla duplicata delle altezze degli edifici. Il perchè se chiamisi G la grossezza del muro PO , e g quella dell'altro po . Si vedrà esser $G: g$ in minor ragione di MA^2 ad ma^2 , come l'è chiaro per intuizione; dunque la resistenza dell'edificio $NOPQ$ starà a quella dell'altro $nopq$ in minor ragione della scossa che ne riceve il primo a quella dell'altro: che è quanto dire: *Ne' forti tremuoti ec.*

Intanto le lamiie degli edifici grandi son meglio librate, che ne' più piccoli, ed i centri di gravità loro reggono su di più ampie basi ond'essi deggiono essere più consistenti e saldi nello stato di quiete, che non il sieno i piccoli abituri.

18. *Cor.* I. Le catene di ferro, che frenano gli edifici, ne impediscono, che all'ondolar delle mura, quando scoppiu un forte tremuoto, le volte ne diventino altrettanti corpi percuzienti, come gagliardissimi martelli che ne battan que' muri.

19. *Cor.* II. Dunque ne' forti tremuoti, e ciò intendasi in parità di altre cose, son più saldi quegli edifici frenati da catene di ferro, che gli altri, che ne sien privi: ancorchè questi abbiano più grosse mura, e le lor volte si trovino assai ben costrutte, e librate:

20. *Cor.* III. In tal caso gli edifici frenati dalle catene potran soffrire delle screpolature, e lesioni ramificate in quelle loro parti che sien più deboli, o pure più forze vi concorrano.

21. *Cor.* IV. E per esser le mura de'teatri incastonate a travi poste in forma reticolare, anch'essi dovran reggere, come lo abbiám veduto, alle scosse de' forti tremuoti.

Fig. 1

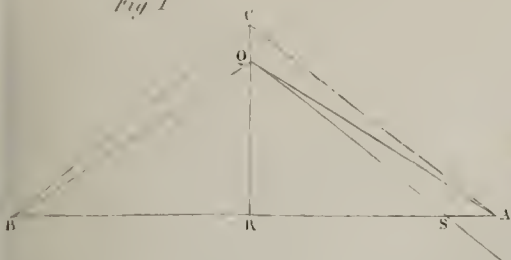


Fig. 2.

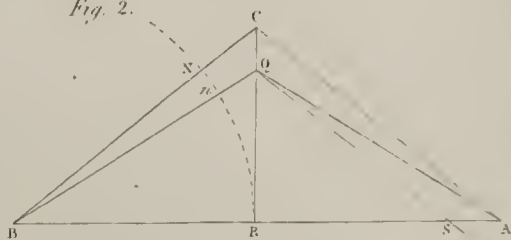


Fig. 1. e 2.

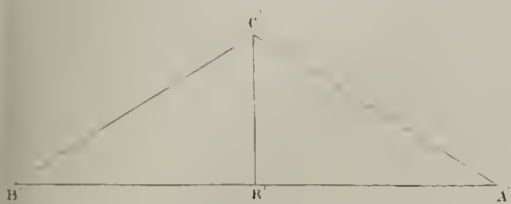


Fig. 3

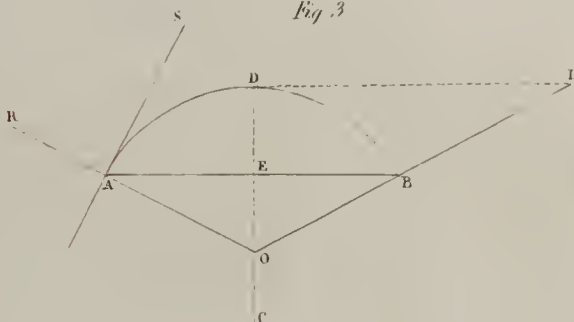


Fig. 4.

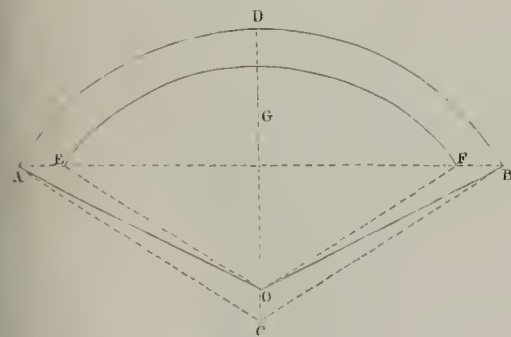


Fig. 5

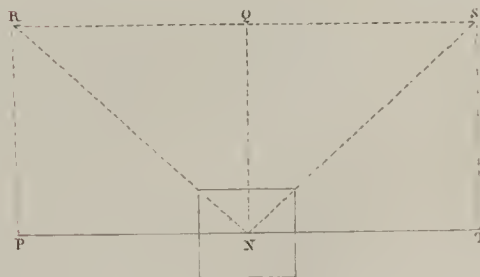


Fig. 6.

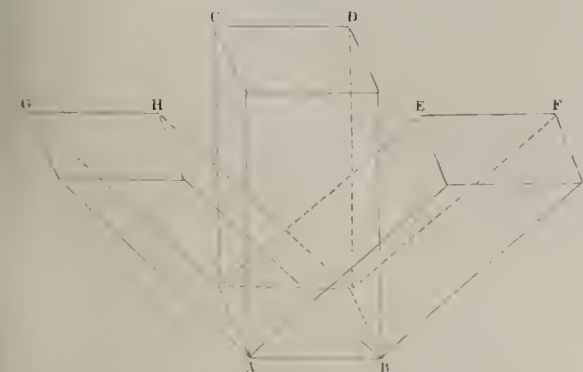
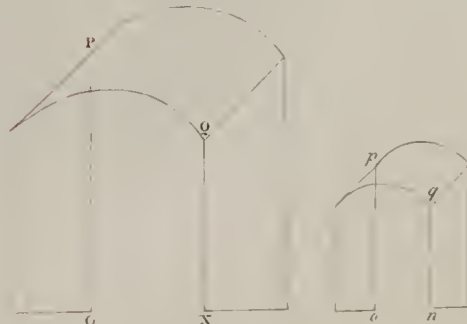


Fig. 7



MODO COME I GEOMETRI ANTICHI

POTERONO PERVENIRE A CONOSCERE

LA DIVERSA NATURA DE' PROBLEMI (*)

RICERCHE DEL SOCIO ORDINARIO V. FLAUTI.

I problemi elementari della Geometria, che ne' principii di essa si poterono considerare, non richiedevano, per risolverli, che solamente l'uso della retta e del cerchio. Per tal modo si ebbe il mezzo di *elevare o abbassare da un punto dato, in una retta, o fuori la sua direzione, la perpendicolare ad essa; di tirarle per quel punto fuori*

(*) Mi conviene dichiarare, che questo lavoruccio fu da me estratto da un trattato, in cui mi proposi esporre e commentare quanto concerneva i metodi della Scuola Greca, svolgendo ed analizzando le opere rimasteci di que' geometri, che la illustrarono. Un tale argomento fu da me trattato in migliori anni di mia vita, sì per le forze fisiche e morali, che per la tranquillità di cui godeva.

M'indusse ad estrarlo il non dover comportare, che le prime tornate accademiche del 1852 rimanessero vacue da letture di Memorie de' soci. E per la stessa ragione seguentemente n'ebbi estratte le ricerche su' *Porismi*, di cui n'ebbi lette due sole Memorie all'Accademia, sospendendone la continuazione, per dar luogo a' lavori che cominciarono a presentare taluni miei colleghi; come ancora quelle, che nel cominciamento dell'anno 1854 mi vidi costretto a leggere *sulla genuina nozione delle Quantità negative ne' problemi geometrici*.

Ciò posto, trovandomi aver distrutta l'unità di quel trattato, mi sono risoluto a continuare a presentarne all'Accademia, a volta a volta, i rimanenti articoli di esso, avuto anche riguardo alla mia avanzata età, ed agl'incomodi fisici, che l'accompagnano, da' quali sono avvertito di non poter più pensare a perfezionarli.

di essa la parallela; di costituire ad un punto dato in una retta un angolo dato; di bisceare un dato angolo; di trovare la media proporzionale tra due rette date, ec. Ma quando da tali problemi elementari si fu indotti a trattarne altri affini, come quelli di *trisezare un angolo dato* (1); di *riunire tra due rette date due medie proporzionali*, al quale fu da Ippocrate Chio ridotto quello della famosa *duplicazione del cubo*, essi invano sforzaronsi di ottenerne lo scioglimento nel modo già tenuto per gli altri. Non v'era contraddizione alcuna ne' dati, nè nel quesito del problema di trisegar d'angolo, e similmente per l'altro delle *due medie proporzionali*; e però essi, che saggi e perspicaci erano, dovettero ben comprendere, che il mostrarsi quelli restii a tutti i loro sforzi, e ad ogni loro ricerca, ne doveva esser cagione qualche loro speciale qualità ad essi ignota, che però ben si esprime Pappo Alessandrino dicendo, che *ob hanc causam haesitarunt*.

In siffatto stato di esitazione, essi non poterono ricorrere ad altro espediente, che tentandone la riduzione ad altri; e fin dal principio noi ne abbiamo un esempio per quello della duplicazione del cubo; ma dalla riduzione per questo, nulla potevano essi ottenere, per uscire dall'esitazione in cui già prima erano. Non così pel problema della trisezione dell'angolo, che ben prestavasi a far loro conoscere in che fosse riposta l'impossibilità di risolverlo co' mezzi, che loro poteva somministrare la Geometria di que' tempi; e quindi condurli a conoscere e distinguere i problemi in varii generi.

Una delle riduzioni cui pervennero per la trisezione angolare fu la seguente; ed era ben facile immaginarla.

Supposto esser APC (*fig. 1*) l'angolo proposto, e DPC la terza parte di esso: preso un punto A nell'un lato AB dell'angolo, compiasi il rettangolo AFPC, il cui lato FA incontri la dividente PD in Q, sarà l'angolo AQD = DPC, e di esso ne sarà però doppio l'angolo APD.

(1) Il problema della *trisezione dell'angolo* dovè essere il primo a trattarsi; poichè bisecato l'angolo, ed ottenuta però la moltisezione di esso, procedendo sempre in ragion doppia, doveva subito presentarsi alla mente de' geometri la sua trisezione, dalla quale derivava uoa nuova serie procedente in ragion doppia, ed altre se ne ottenevano combinandola con la precedente.

Or se al triangolo DAQ circoscrivasi il cerchio, dovrà il centro di esso essere il punto medio O delle DQ; e congiunta la AO, sarà l'angolo $OAQ = AQO$; e quindi l'angolo AOD, ch'è pur doppio di AQO, risultando uguale ad APD, il triangolo PAO sarà isoscele; e però $PA = AO = OQ = OD$; e la DQ doppia della PA.

Da che risultava il problema di trisegar l'angolo APC ridotto all'altro, d'*Inclinare dal vertice P dell'angolo FPC del rettangolo FC una retta tra i lati dell'angolo opposto FAC; sicchè l'interposta tra questi risulti data, e doppia della diagonale PA.*

Siffatta riduzione non potè essere a meno, che non facesse loro ravvisare, che a tal problema di riduzione poteva egualmente soddisfarsi in tre modi diversi, cioè con le rette PDQ, PQ'D', D''PQ''.

Nè diverso risultamento ottenevano dalla immediata riduzione del trisegar l'angolo, al trisegar l'arco descritto tra' lati di esso, dal vertice per centro.

Difatti, corrispondendo l'angolo proposto PCA (fig. 2) all'arco PA descritto tra' suoi lati, dal vertice C per centro, ne sia FCA la terza parte. Tirata per P la parallela PDQ alla FC, fino ad incontrare il diametro AB del cerchio in Q, e congiunta la CD, risulta l'angolo in Q = FCA; quindi metà dell'angolo PCF, e però di DPC, o di CDP; è perciò eguale a DQC. Laonde il problema trovasi ancor esso ridotto, ad *Inclinare dal punto P la PDQ, sicchè sia DQ uguale al raggio BC*. La qual cosa vedevasi similmente potersi effettuare in tre modi diversi, cioè con la PDQ, o pure la PQ'D', o finalmente la PD''Q'' (2).

(2) Quantunque non ne abbisogni il presente lavoro reso accademico, non istimo superfluo mostrare, in questa nota, come tali tre rette soddisfino al problema; da che risulta anco comprovato, che le tre soluzioni corrispondenti al medesimo debbano ad un tratto, e non separatamente otteneri (e così per qualunque se ne risolva); il che eseguirò con risolvere il sopra detto problema di riduzione.

PROBLEMA

Dato di posizione il punto P (fig. 2.), nella circonferenza del dato cerchio APB, con un di lui diametro AB; condurre per P una secante PQ, in modo che la parte di essa, che resti tra tal diametro e la circonferenza, sia uguale al raggio CB.

1. Modo — Tal secante sia la PDQ.

Pongasi l'ordinata $PN = a$, la $NC = b$, $CB = r$, $CE = x$, $DE = y$, sarà anche $EQ = x$, e

*

Avevano essi ben avvertita ne' problemi elementari la differenza tra quelli, che costruivansi per le intersezioni di rette, de' quali unica n'era la maniera di risolverli; mentre per gli altri, pe' quali esigevasi

quindi $CQ = 2x$, $NQ = b + 2x$. Ed essendo, pe' triangoli simili PNQ , DEQ , $PN : NQ :: DE : EQ$, cioè $a : b + 2x :: y : x$, si avrà l'equazione

$$ax = by + 2xy \quad I$$

II. *Modo* — Abbia ora l'addimandata segante la posizione $PQ'D'$.

Si tiri il raggio CD' , e l'ordinata $D'E'$; sarà $CE' = -x$, e $D'E' = -y$; quindi $CQ' = -2x$, $NQ' = NC - CQ' = b + 2x$. E pe' triangoli simili PNQ' , $D'E'Q'$, dovendo stare $PN : NQ' :: D'E' : E'Q'$, cioè $a : b + 2x :: -y : -x$, si avrà pure

$$ax = by + 2xy \quad II$$

III. *Modo* — La segante abbia inoltre la posizione $D''PQ''$.

Congiungasi $D''C$, e si tiri l'ordinata $D''E''$. Sarà $CE'' = -x$, $D''E'' = y$; e quindi $CQ'' = -2x$, e $Q''N = CQ'' - CN = -2x - b$. Quindi essendo pe' triangoli simili PNQ'' , $D''E''Q''$, $PN : NQ'' :: D''E'' : E''Q''$, cioè $a : -2x - b :: y : -x$, ne risulterà l'equazione

$$ax = bx + 2xy \quad III$$

identica alle due precedenti.

Il che ne convince esser quelle tre seganti soddisfacenti al problema, e contenersi la loro determinazione nella stessa equazione

$$ax = bx + 2xy$$

Sembrerebbe rimanervi il IV.° *modo* rappresentato dalla segante PCp , per la quale essendo $x = -b$, $y = 0$, la detta equazione diviene

$$-ab = ab - 2ab$$

cioè identica, e però insignificante

Scol. I. — Risultando ne' tre anzidetti modi sempre la stessa equazione; si prenda l'analogia.

$$\frac{1}{2} a : \frac{1}{2} b + x :: y : x$$

risultante dal considerare il I° di essi; si avrà permutando, e poi convertendo

$$\frac{1}{2} a : \frac{1}{2} a - y :: \frac{1}{2} b + x : \frac{1}{2} b$$

Quindi

$$\frac{1}{4} ab = \left(\frac{1}{2} a - y \right) \left(\frac{1}{2} b + x \right)$$

che dà per locale un iperbolo tra gli assintoti, che descritta, come ne mostra la figura segnerà nella circonferenza del cerchio APB i tre punti D , D' , D'' soddisfacenti al problema.

Scol. II. — Volendo rendere determinata l'equazione

$$ax = (b + 2x)y$$

si ponga in essa per y il $\sqrt{r^2 - x^2}$, tratto dalla natura del cerchio PAB ; si avrà, fatte le debite riduzioni

$$x^4 + bx^3 + \left(\frac{1}{4} b^2 + \frac{1}{4} a^2 - r^2 \right) x^2 - r^2 bx - \frac{1}{4} r^2 b^2 = 0 \dots \dots A$$

ove ponendo per $\frac{1}{4} b^2 + \frac{1}{4} a^2$ il suo valore $\frac{1}{4} r^2$, si avrà l'equazione biquadratica più

l'impiego del cerchio, ottenevansene ad un tratto due soluzioni; e quindi ben si avvidero, che pel problema della trisezione dell'angolo dovendosi ad un tempo ottenere tre soluzioni diverse, la retta e'l cerchio non fossero suscettive a risolverlo; perchè ben comprendevano esser tale il nesso di quelle soluzioni, che l'una non poteva ottenersi senza che le altre non vi concorressero.

Convinti di ciò, abbandonarono le vie già precedentemente tentate, e si diedero alla ricerca di altri *luoghi geometrici*, che con la loro intersezione potessero offrirne ad un tratto tre punti; da che ebbe poi luogo la scoperta delle sezioni del cono, e la loro dottrina. Ed intanto, partendo da apparecchi geometrici, ripiegarono in mezzi meccanici, per la desiderata soluzione del problema di trisegar l'angolo (3).

Non verificavasi però lo stesso pel problema delle due medie proporzionali, pel quale qualunque riduzione ne facessero alcuna di esse non poteva presentar tre diverse soluzioni: ma pure dal mostrarsi questo restio ad ogni loro tentativo geometrico, dovettero giudicarne della diversità di natura da quelli geometricamente trattati; e però ancor per esso rivolsero le loro ricerche a mezzi meccanici (4); ma più tardi giunsero a conoscerne l'uniformità di natura con quello della trisezione angolare.

Il primo indizio, che n'ebbero, poté loro somministrarlo la soluzione recatavi da *Meneemo*, discepolo di *Platone*, con due parabole, ed

semplice

$$x^4 + bx^2 - \frac{3}{4}r^2x^2 - r^2bx + \frac{4}{4}r^2b^2 = 0 \dots E$$

che liberata dal fattore $x + b$ diviene

$$x^2 - \frac{3}{4}r^2x + \frac{4}{4}r^2b = 0$$

identiforme a quella della trisezione angolare.

E ponendo il raggio $r = 4$, essa si vedrà prendere la forma, che gli ebbe data il *Cartesio*, cioè

$$x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{4}{4}b = 0$$

da poterla costruire nel modo elegante da lui proposto. (*Geomet. lib. III.*)

(3) Ciò viene indicato da *Pappo* ne' due luoghi delle sue *Collezioni*, che si recherano in appresso.

(4) Veggansi i luoghi stessi di *Pappo*.

ancora con una parabola ed un'iperbole tra gli assintoti (5): ma ciò che dovè confermarli maggiormente in tal opinione dovè essere l'analisi geometrica recatavi da *Nicomede*, la quale il riduceva ad *applicare tra' lati di un angolo dato una retta di data grandezza, tendente ad un punto dato*; problema analogo a quello cui avevan ridotto l'altro della trisezione angolare. Nè essi poteron vedere qual differenza vi fosse tra questi due problemi della stessa natura, non conoscendo affatto a che si riferissero gli altri due punti, e quindi le altre due soluzioni del problema, cui avevan ridotto quello di trisegar l'angolo.

Ad ogni modo da queste loro lunghe, faticose e diligenti ricerche, essi poterono pervenire a stabilire la diversità di natura de' problemi, ed i loro diversi *generi*, il primo de' quali il dissero *Piano*, e *Piani* i problemi che vi appartenevano; perchè la linea retta e la circolare con le quali costruivansi avevano la loro origine nel piano. E questi soli essi considerarono come risolti *geometrica ratione*. Il secondo genere il dissero *Solido*, e *Solidi* chiamarono i problemi di esso, perchè questi costruivansi con le curve coniche, compreso il cerchio, le quali, secondo la loro conoscenza avevano origine nel solido, cioè nel cono, nè conobbero modo di descrivere e combinare tali curve nel piano: ed i problemi di tal *genere* non gli ebbero come geometricamente risolti. Finalmente estendendo le loro vedute ad altre linee, costituirono un terzo *genere* di problemi costruibili per mezzo di esse, che dissero *Lineare*, nel quale compresero tutti i problemi per la cui costruzione richiedevansi *linee* superiori alle coniche, le quali avessero però un'origine *varia* e *difficile*. Una tal distinzione de' problemi in tre generi vien da *Pappo Alessandrino*, in due luoghi delle sue importantissime *Collezioni Matematiche*, recata nel seguente modo.

Nel primo di questi, che leggesi dopo la prop. 4 del libro III. volendo egli significare a *Cratisto*, ciò che ne intesero gli antichi, circa il problema delle due medie proporzionali, così esprimersi: *Problematum geometricorum antiqui tria genera esse statuerunt, et eorum alia quidem Plana appellari, alia Solida, alia Linearia: Quae igitur per rectas li-*

(5. Tali soluzioni ci furono conservate da *Eutocio*, nel commento alla prop. 2 del lib. II. de *Sphaera et Cylindro* di *Archimede*.

lineas et circuli circumferentiam solvi possunt, merito plana dicuntur; etenim lineae per quas ejusmodi problemata solvuntur in plano ortum habent. Problemata vero quaecunque solvuntur, assumpta in constructionem aliqua conì sectione, vel pluribus, solidu appellantur, namque ad constructionem necesse est solidarum figurarum superficiebus, nimirum conicis uti (6). Restat tertium genus, quod lineare appellatur. Lineae enim aliae, praeter jam dictas in constructionem assumuntur, varium et transmutabilem ortum habentes, quales sunt hederices, et quas graeci τετραγωνίζουσας appellant, nos quadrantales dicere possumus, Conchoides et Cissoïdes, quibus quidem multa et admirabilia accidunt.

Cum igitur tales sint problematum differentiae, antiqui geometrae problema ante dictum in duabus rectis lineis, quod natura solidum est, geometrica ratione innixi construere non potuerunt, quoniam neque conì sectiones facile est in plano designare: instrumentis autem ipsum in operationem manualement et commodam, aptamque constructionem mirabiliter traduxerunt; quod videre est in eorum voluminibus, quae circumferuntur, ut et in Eratosthenis Mesolabo, in Philonis et Heronis Mechanicis et Catapulticis. Hi enim asserentes problema solidum esse ipsius constructionem instrumentis tantum perfecerunt, congruenter Apollonio Pergaeo, qui et resolutionem eius fecit per conì sectiones: alii per locos solidos Aristaei: nullus autem per ea, quae proprie plana appellantur.....

E dopo la prop. 30 del lib. IV così ripiglia: *Antiqui geometrae datum angulum rectilincum tripartito secare volentes, ob hanc causam, haesitarunt. Problemata quae in Geometria considerantur tria esse genera dicimus.* E qui continua ripetendo la stessa loro distinzione, agguagliando solamente, per la costruzione del terzo genere, l'indicazione di altre linee, e di altre trattazioni per esse: di che non occorre a noi far qui parola.

(6) Da questo lungo di Pappo chiaramente rilevasi la ragione perchè i problemi, che costruivansi con la retta e'l cerchio si dicessero *piani*; e *solidi* quelli ne' quali abbisognava adoperarvi la curva coniche; non già perchè queste hanno la loro origine nel solido, cioè nel cono; sì bene perchè non conoscendo essi il modo di descriverle nel piano, erano obbligati a combinare le superficie coniche; nelle quali eran segnate le curve soddisfacenti alla composizione del problema. Nè so intendere come geometri distinti, ed ancora il *Fergola*, avessero preso la denominazione di *solidi* nel primo senso.

Da questi due luoghi di *Pappo* risulta confermato ciò che si è detto precedentemente, cioè, che gli antichi ebbero per lungo tempo esitato su' problemi di *trisezar l'angolo*, e *delle due medie proporzionali*; che da questi furono indotti alla scoperta delle curve coniche; che accortisi di esser essi di natura diversa da' problemi geometrici, che prima avevano risolti, si diedero a risolverli meccanicamente; che nè tampoco ebbero come geometriche le soluzioni che posteriormente ne ottennero, per mezzo delle curve coniche. Finalmente che pervennero a stabilire la distinzione de' problemi in *generi* diversi; e ciò dovè avvenire nella scuola di *Platone*, sia vivente lui, sia posteriormente tenuta da' suoi primi discepoli e successori. Essi però in tale epoca poterono solo congetturare della natura *solida* del problema *delle due medie proporzionali*, dal non averlo potuto costruire co' mezzi della Geometria ordinaria, e dalla soluzione che facilmente ne ottenne *Meneemo* combinando due parabole, o una parabola con l'iperbole; mentre quello che, come abbiamo pur detto, potè renderli sicuri dell'uniformità di natura con l'altro della trisezione dell'angolo fu la riduzione fattane da *Nieomede* con la *Coneoide*, se pur tal riduzione non era stata già prima eseguita, e questo geometra sen valse acconciamente in adoperarvi la curva di sua invenzione, e lo strumento congegnato a descriverla.

Or fissata la diversità di natura de' problemi, rimane a vedere in qual modo essi adoperavansi per riconoscervela; e ciò almeno pei *Piani* e *Solidi*. È facile comprendere, che essi ben dovevano esser persuasi che ne' problemi di uno stesso genere vi dovesse aver luogo una riduzione comune per la loro costruzione, alla quale si dovesse finalmente pervenire, quando la soluzione dell'uno non si arrestasse ad altro già risoluto; di che la Geometria Elementare gliene offriva esempi, e gliel comprovava evidentemente la riduzione de' problemi piani a que' due fondamentali, che *Euclide* si a proposito recò nel VI° de' suoi *Elementi* (*prop. 27 e 29*), per la loro composizione, e nel libro de *Dati* per l'analisi geometrica (*prop. 58 e 59*). Quindi l'era ben facile argomentarne, che del pari pe' problemi solidi vi dovesse essere una fondamentale comune riduzione; ma questa non essendo loro ancora conosciuta, presero il giusto espediente di riferirli a' due problemi già risolti, in tanti diversi modi, quelli cioè della *trisezione angolare*, e delle *due medie proporzionali*. Di fatti, per que' pochi problemi di tal genere, che incontransi risolti nelle loro opere,

che ci sono rimaste, noi troviamo prolungate le analisi, fino ad ottenere una tal riduzione. Così *Archimede* riduce il probl. 2 lib. Il *sulla Sfera e 'l Cilindro* a quello delle due medie proporzionali. E l'altro *della divisione della sfera in data ragione* a dividerne il diametro in un modo determinato; per la qual divisione egli ne riportava in fine la soluzione, che non essendosi trovata (8), nè essendo stata da alcuno restituita, per quanto confà al nostro scopo basta dire, che per essa, col metodo *Cartesiano*, ne corrisponde l'equazione a quella della *trisezione angolare*: da che deve argomentarsi, che questa dovesse, in ultima analisi, essere la riduzione di *Archimede*. Alle due medie proporzionali egli ridusse parimente il problema di: *Costituire un segmento sferico simile ad un dato, ed uguale ad altro dato*.

Non v'ha dunque a dubitare, che questa via essi tenessero, per assicurarsi della natura di un problema in risolverlo. Ma essa poteva però riuscire in qualche caso fallace; e far credere *solido* talvolta un problema che fosse *piano*, nel quale scoglio urlarono nientemeno, che lo stesso principe dei geometri *Archimede*, e 'l gran geometra *Apollonio*, lacciati però da *Pappo*, il primo per avere in un problema del trattato delle *Spirali* assunta

(8) Una tal mancanza già vi era a' tempi di *Dionisodoro*, e di *Eutocio*, i quali non essendo forse riusciti a restituire la riduzione *Archimede*a, ciascun di essi ne diede del problema principale una soluzione diversa, combinando una parabola con l'iperbole; ed altra n'ebbe data *Diocle* con l'iperbole combinata all'ellisse; e queste furono tutte riportate da *Eutocio*, nell'esteso commento alla prop.V.del lib. II di *Archimede*, de *Sphaera et Cilindro*.

Tra' moderni l'*Ugenio* fu il primo a darne la soluzione ridotta a trisegar l'angolo, soggiugnendovi: *haec construendi ratio in solidis problematibus quodammodo simplicissima videtur, atque ad usum maxime accomodata*. Ma egli ne tacque l'Analisi, che però ve l'ebbe supplita il *Fergola* (*Veg. il § 445 a pag. 408 de' suoi Luoghi Solidi analiticamente trattati*).

Formava tal problema uno de' principali tra gli esercizi di scuola del *Fergola*, e poi mia; e però diversi tra' miei allievi si occuparono a risolverlo, tra' quali riuscì felicemente il sig. *Francesca Bruno*, riducendone la costruzione a descrivere una data parabola. Ed egli volle anco esibirne l'analisi della riduzione *Archimede*a, che pur ridusse a combinar la parabola col cerchio generatore della sfera. Ed estendendo un tal lemma di riduzione il risolveva pel caso, che invece della ragione de' quadrati fosse data quella de' cubi, che costruiva con la combinazione di una parabola a quel cerchio da cui generavasi la sfera.

Nessuno però ebbe mai tentato *divinare* l'analisi della costruzione *Archimede*a riducendola alla trisezione angolare, come ebbe fatto il nostro socio *Fortunato Padula*, indotoci dal presente luogo di questo mio lavoro. (*Veg. la Nota n. 2 nel Rendiconto pel 1852, pag. 43*).

un' *inclinazione solida nel cerchio*; l'altro pel problema sulla parabola nel lib. V. de' *Conici* (9).

Questa ragione, e la troppa stentata analisi geometrica, per riuscire in tal riduzione, non poteva essere a meno, che non impegnasse le acute menti de' geometri antichi a rinvenire un metodo sicuro, per la conoscenza della natura di un problema, ed anche per la loro riduzione. Comprendevasi bene, per dirlo per un genere solo, che dove il problema fosse *Solido*, che però vi abbisognava a risolverlo l'impiego delle curve coniche, vi dovesse aver luogo una proprietà fondamentale e comune ad esse, alla quale si dovesse sempre pervenire nell'analisi geometrica che se ne faceva.

Su di ciò fondati, non riusciron vane le loro ricerche, finchè pervennero a rinvenire un *Porisma* fondamentale, generalissimo, uniforme, che dava ad un tempo la classificazione de' problemi, e la loro riduzione, di che non v'ha niente di più sublime nella Geometria antica, e nella moderna. È questo il famoso *Porisma alle rette*, che può enunciarsi nel seguente modo: *Se in più rette date di sito al numero n , ne cadano da un punto altrettante, in dati angoli; e sia data la ragione che componesi da quella di ciascuna incidente su di una delle rette di sito ad un'altra, se esse sieno in numero pari, o se impari, dell'ultima di esse incidenti ad una retta data; quel punto da cui partono le incidenti sarà il luogo geometrico del problema, cui riesce tale ultima riduzione* (10).

(9) Fu massima inconcussa de' greci geometri, che il problema dovesse venir risoluto nel suo proprio genere, espressa nel seguente modo da Pappo: *Videtur autem quodammodo peccatum non parvum esse opud geometras, cum problema planum per conica vel linearia ab aliquo invenitur, et ut summatim dicam, cum ex improprio solvitur genere; quale est in quinto libro Conicorum Apollonii problema in parabola; et in libro de Lineis Spiratibus Archimedis, assumpta solida inclinatio in circulo* Ad essi fece eco tutta la scuola moderna; di tal che il Vieta, nel rimprocciare ad Adriano Romano, geometra de' Paesi Bassi, di aver adoperato l'iperbole in risolvere il problema di: *descrivere il cerchio, che ne tocchi tre altri dati*, così soggiunge: *Duplicavit cubum per parabolas Menechmus, per conoides, Nicomedes, an igitur duplicatus est geometriae cubus?* (Ciò nello stretto senso degli antichi, come è stato precedentemente detto) *Quadravit circulum per volutam inordinatam Dinostratus, per ordinatam Archimedes; an igitur geometriae quadratus est circulus? Id vero nemo pronunciabil geometra. . . Reclamaret Euclides, et tota Euclideorum schola.* E ciò non fia inutile averlo avvertito, per norma di tanti geometri de' nostri tempi.

(10) Tal quistione così concepita l'è ben un mezzo per la classificazione delle curve algebriche, come si comprende dal vedere, che dovendo l'espressione algebrica per ciascuna incidente essere una funzione lineare delle coordinate x , y della focale richiesta,

Ed ecco in qual modo da tal *Porisma* fondamentale essi derivarono la classificazione de' problemi.

Era già noto, che se le incidenti erano ad una o a due rette, il *luogo* non poteva essere che una retta. Che se le incidenti l'erano a tre o a quattro rette, esso appartenevasi al cerchio, ed a ciascuna delle altre curve coniche; potendo aneora in qualche caso abbassarsi alla retta. Ed essendo il *luogo* alle cinque, o alle sei rette, il problema entrava già nel genere de' *lineari*, che avrebbesi potuto dire di *prima specie*, o come dal Cartesio, *soprassolido*, e potevasi anche abbassare a' generi inferiori. E così di mano in mano, sempre procedendo per due gradi. Ma le loro considerazioni in tale importante argomento, non si estesero al di là del *luogo alle tre e quattro rette*, per la classificazione e riduzione de' problemi *solidi*.

Essi non curaronsi di questa riduzione pe' *problemipiani*, avendone già un'altra semplicissima, e che più immediatamente ottenevasi, della quale abbiamo più sopra accennato, come recata da *Euclide*, per la composizione, nel lib. VI. degli *Elementi*, e per l'analisi geometrica, nel libro de' *Dati*. Rivoltisi quindi alla composizione di un tal *luogo*, per *le tre, e le quattro rette*, i loro sforzi riuscirono a dirittura infruttuosi, o poco attivi, per molto tempo, fino a che *Apollonio*, che, avendo escogitati nuovi teoremi su i Conici, potè compiutamente riuscirvi, menandone vanto sullo stesso *Euclide*, con iscrivere ad *Eudemo* nel seguente modo: *Tertius liber (Conicorum) continet multa et admirabilia theoremata, quae utilia erunt et ad solidorum locorum compositiones, et ad determinationes, quarum complura et pulchra et nova sunt. Haec nos perpendentes animadvertimus non positam esse ab Euclide rationem componendi loci ad tres et quatuor lineas, verum ipsius tantummodo particulam quandam, atque hanc non satis feliciter: neque enim fieri poterat, ut ea compositio recte perficeretur, absque iis quae a nobis inventa sunt.* Al qual proposito ben ragionevolmente così ripiglia *Pappo* (11).

debba venire espressa dalla formola $a + bx + cy$; che però l'equazione alla curva debba pel problema alle quattro rette risultare generalmente quadratica a due indeterminate, e però disegnarne una curva del second'ordine; e così procedendo innanzi per quelle del 3 e 4 ordine, ed in generale per l'ordine n , se il numero di quelle incidenti sia $2n$, o pure $2n-1$.

(11) Nella prefazione al VII libro delle sue *Collezioni Matematiche*, all' articolo de *Conicis*, VIII.

Quem autem dicit (Apollonius) in tertio libro, locum ad tres et quatuor lineas ubi Euclide perfectum non esse, neque ipse perficere poterat, neque aliquis alius, sed neque paululum quid addere iis, quae Euclides scripsit, per ea tantum Conica, quae usque ad Euclidis tempora praemonstrata sunt, ut etiam ipse testatur dicens, fieri non posse ut locus perficeretur absque iis, quae ipse scribere coactus sit.

Ma tale importante *Porisma*, nè tampoco essendo a noi pervenuto, il primo tra' moderni a rammentarlo, come saggio della fecondità del suo metodo geometrico, fu il *Cartesio* (12), di che dichiarandosi poco soddisfatto

(12) Da quel passo di *Apollonio*, e da ciò che vi soggiugne *Pappo*, ben si rileva aver dovuto *Apollonio* soddisfare alla ricerca per tal luogo, altrimenti nè egli avrebbe potuto menarne vanto sul mitissimo *Euclide* (come il caratterizza *Pappo*), nè costui avrebbe detto, che ad esibire un tal luogo bisognavanvi nuovi teoremi su' *Conici*, che *Apollonio* ebbe rinvenuti, consegnandoli nel lib. III de' suoi *Conici*, come egli stesso si è veduto affermare. In vista di ciò non può spiegarsi come il *Cartesio* avesse potuto cadere nell' equivoco in dire « *Quod etiam ex iis quae Pappus initio sui septimi libri scribit, evidentissime liquet. Ubi postquam aliquamdiu in recensendis illis omnibus, quae ab antecessoribus suis in Geometria scripta sunt, occupatus fuit, tandem de quaestione quadam loquitur, quam nec Euclides, nec Apollonius, nec quisquam alius penitus resolvere potuerat, his verbis*, » e riporta l'enunciazione di *Pappo*. E su questo proposito si potrà leggere quello che ne disse il nostro *Fergola* nel § 101 del suo *Trattato analitico de' Luoghi solidi*, da me publicati nel 1818.

Cade qui in acconcio notare sul *Cartesio*, l'aver egli opinato, che gli antichi matematici, perchè abborrirono dal servirsi delle voci usate in Aritmetica, per significare operazioni geometriche, avessero dato luogo a modi di spiegarsi, ch'egli dice assai *intrigati ed oscuri*, assegnandone anche per cagione il non aver ben compresa l'affinità tra le due scienze. Ma con buona sua pace, e con tutto il rispetto dovuto ad un sì grand' uomo, che fossero quelli ben addentro penetrati in tale corrispondenza, il mostrano i libri *Aritmetici di Euclide*, e quello della *quadratura del cerchio* e dell'*Arenario di Archimede*. Ma io non so comprendere qual confusione ed oscurità egli osservava in sostituire alla moltiplicazione la ragion composta, che comprende sì i rapporti aritmetici, da potersi esprimere con la moltiplicazione, che gli *asimmetrici*, che quella non può riguardare. E però ben si espresse *Pappo* dicendo, che al di là delle sei rette « *non amplius habent dimensionem, quod ratio data sit contenti, sub quatuor ductis ad contentum sub reliquis; quoniam non est aliquid contentum sub pluribus quam tribus dimensionibus* ». Soggiungendo poco dopo: « *Licebit autem per conjunctas proportionibus haec et dicere et demonstrare universim, tam in dictis proportionibus, quam in superioribus ad hunc modum*: » ed enuncia generalmente il teorema alle rette in maniera generalissima, ed in modo non già *intrigato ed oscuro*, ma piano e chiaro, da non esservi apprendisti degli *Elementi di Geometria*, che non potessero comprenderlo.

Ho voluto ciò avvertire; perchè l'autorità di un sì grand'uomo è stata quella, che ha indotto i moderni a deviare dal retto linguaggio geometrico, ed usare della *moltiplicazione e divisione* in Geometria.

il Nevvton , tacciando d'impropria tal restituzione , occupossene incidentemente nel lemma XIX , lib. 1 de' *Principii Matematici della Filosofia Naturale*, così conchiudendo il cor. 2. a tal lemma: *Atque ita problematis Veterum de quatuor lineis, ab Euclide incepti et ab Apollonio continuati, non culculus, sed compositio geometrica, qualem Veteres quacrebant in hoc corollario exhibetur.*

Il nostro *Fergola* nella prima edizione delle sue *Sezioni Coniche*, fatta pubblicare nel 1791, dal suo allievo ab. *Giannattasio*, recovvi la composizione del *Newton*, e vi aggiunse l'analisi geometrica in fine del libro IV; ma accortosi di non esser essa generale, qual si conveniva, ciò sopprime nella 2.^a edizione del 1810, ed intanto erasi già applicato alla ricerca generale per tal luogo geometrico; di che impossessatosi il suo allievo, mio collega, e fu nostro rispettabile socio *Giuseppe Scorza*, intraprese a compiere tal lavoro, restituendo con greco sapore questo importante argomento dell'antica Geometria; e dandone chiare applicazioni a più difficili problemi *solidi*, da lui elegantemente risolti. Se non che egli sublimando, come suole avvenire in simili incontri, l'antico metodo, di cui dava la restituzione, sulla Geometria Cartesiana, per la costruzione delle equazioni del *terzo e quarto grado*, si espresse dicendo, che: *Se Cartesio avesse per poco avvertito una sì maravigliosa riduzione, che de' problemi intendevano di fare gli antichi, mercè quelle di loro sublimissime ricerche de' luoghi alle linee, certamente ei non avrebbe volentieri smarrite queste analitiche vie sì nobili e preclare, segnate a noi da que' geometri vetusti, e scorgendo quanto per esse ne divien breve il cammino dell'analisi, certamente dico, non sarebbene ei trasandato cotanto nell'Algebra, mendicando soluzioni a' problemi di Geometria, come se questa scienza mancasse di metodi proprii, e l'Algebra stessa da lei non prendesse forza e vigore. Ma sgraziatamente questo grandi analista, travedendo il più bello, ed il più sublime della Geometria degli Antichi, ne imprese a risolvere que' luoghi alle linee, come tante quistioni particolari, e di puro esercizio: e perchè prevenuto de' grande progressi fattisi nell'Algebra, per opera principalmente de' nostri italiani, che fin dal suo nascere tra noi un saggio uso ne fecero in Geometria, perciò di appigliarsi a quella fe' animo il valentuomo, lusingandosi per suo mezzo, poter passare al di là degli Antichi (13).* E così

(13 *Divinazione della Geometria Analitica degli antichi*, da pag. 49 a 50.

continuando lo *Scorza* il suo ragionamento, ne addita in seguito, in verità un punto di prevalenza della ricerca degli Antichi su quella ottenuta dal *Cartesio*. Sembrando però alla nostra Accademia troppo ardita tal proposizione, in danno di un metodo cui le Matematiche sono andate e vanno tuttoggiorno debitrice delle più grandi e difficili ricerche nella Geometria, e nella Meccanica, mentre desiderava, che il lavoro dello *Scorza* comparisse ne' suoi Atti, dimandava la modificazione di questo articolo; ma differendosi la cosa, egli pubblicava la sua *Divinazione*, indicandovi, nella nota appiè della pag. IX, *di aver letti successivamente alla Reale Accademia delle Scienze, ne' giorni 6 e 9 di settembre, e 22 novembre dell'anno 1822*, i tre capitoli che formano l'introduzione al suo dotto ed importante lavoro, che da' cultori dell'antica Geometria ben meritamente è stato apprezzato.

Ritornando ora al nostro argomento, diremo, che se tanto studio posero gli antichi geometri pel problema *alle tre e quattro rette*, e tanto dovettero estendere le dottrine su' Conici per ottenerne la composizione, l'è ben naturale il pensare, che nulla avessero tentato su' *luoghi alle cinque e le sei rette*, ed a' loro successivi. Ma pure, se per tal ragione mancò loro la riduzione de' problemi da essi detti in generale *Lineari*, ottennero almeno la conoscenza del *genere* di questi; e forse giunsero a caratterizzare alcune curve, che potevano soddisfare alla composizione di quelli che corrispondevano alle *cinque e sei rette*; alle *sette ed otto*; non potendo noi nulla profferire nè a loro vantaggio, nè in loro demerito, per non esserci pervenuta alcuna delle non poche importanti opere, che essi composero su famiglie di curve, e sulle proprietà di alcune di esse, che pure sappiamo da *Pappo* averne composti ampîi trattati (14).

V. F.

[44 Veggasi la continuazione del pezzo di sopra da noi cominciato a trascrivere, dopo la pag. XXX del Lib. IV delle *Collezioni Matematiche* di Pappo.

Fig. 1

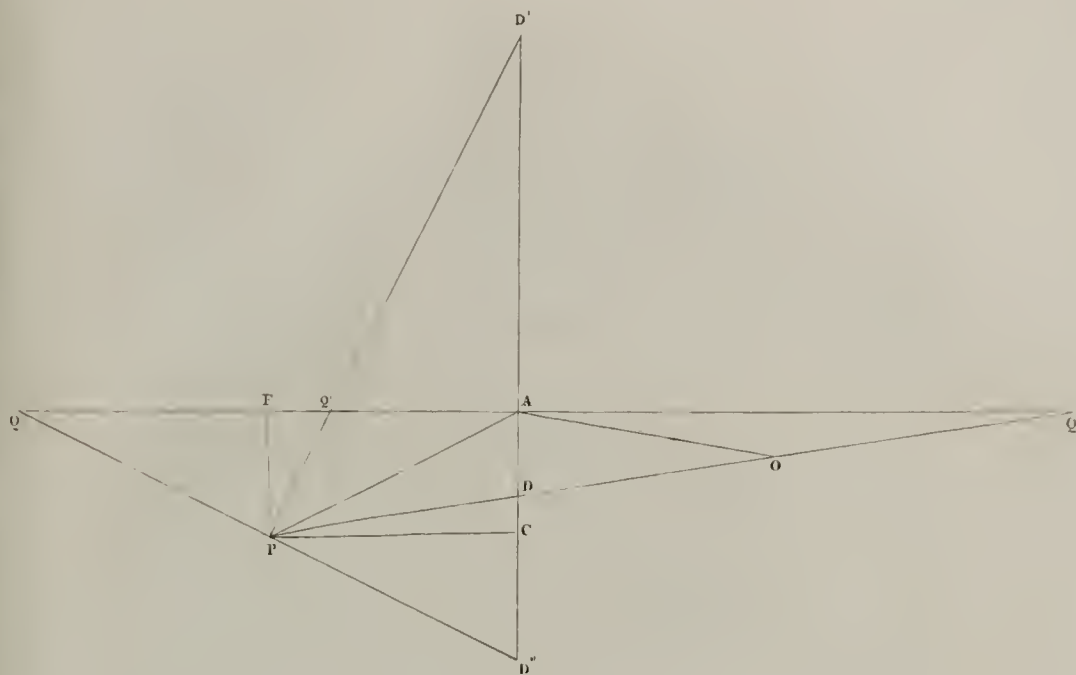
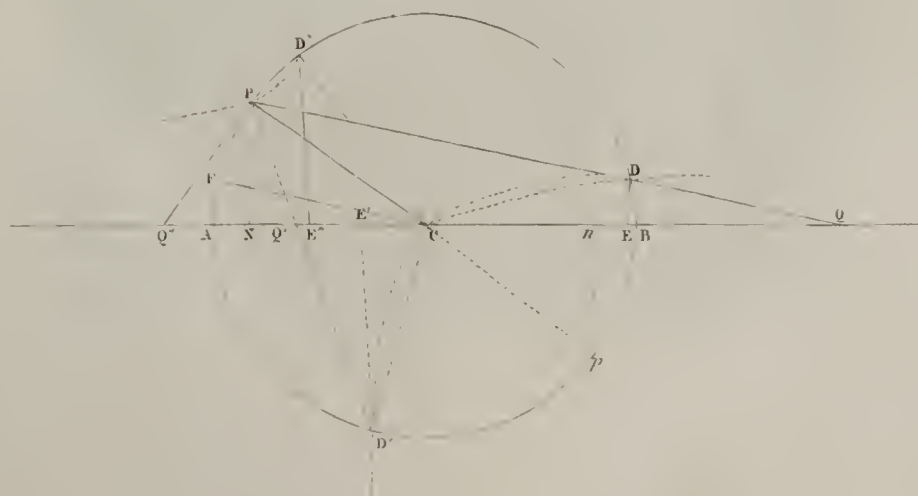


Fig. 2.



DELLE CURVE DI 4.^o GRADO

CHE HANNO

TRE PUNTI DI REGRESSO DI PRIMA SPECIE

MEMORIA

DEL PROFESSOR FORTUNATO PADULA

INTRODUZIONE

In una memoria su' punti multipli delle curve algebriche, da me inviata all'egregio professore sig. Tortolini, e di cui un estratto fu da me prima comunicato all'Accademia Pontaniana in una nota letta nella tornata del 14 settembre 1851, mi occupai di determinare il numero dei punti di molteplicità μ che può ammettere una curva algebrica del grado m ; quello de' punti dello stesso grado di molteplicità e ne' quali tutti i rami si toccano fra loro; quello de' punti di molteplicità μ ed in cui μ' rami soltanto si toccano; ed in fine il numero de' punti di regresso di prima specie. Siffatte ricerche sono state anche intraprese da altri Geometri; ma eccetto la formola di Steiner per i punti doppi, di cui già feci cenno sin dal 1844, dandone la corrispondente dimostrazione, nel

n.° 16 dell'antico Rendiconto di questa Accademia, tutte le altre formole cui sono essi pervenuti non sono esatte, o almeno di quasi nessun vantaggio; poichè in vece di dare il preciso massimo numero di punti singolari di una data specie che può ammettere una curva di dato grado, danno un limite che essendo molto lontano dal vero riesce quasi inutile. Così l'illustre Geometra sig. Plücker ha dimostrato che il numero de' punti di regresso che può avere una curva di grado m non può esser maggiore di $2m(m-2)$ (*): or questa formola considerata come limite è esatta; ma dà un limite che troppo si allontana dal vero, e però non costituisce un teorema che faccia conoscere qual sia il maggior numero di punti di regresso che può realmente avere una curva di dato grado. La formola da me trovata nella citata memoria è $\frac{(2m-\alpha)(\alpha-3)}{2}$, in cui m denota il grado della curva, ed α il numero intero non minore di 4 prossimamente maggiore di $\frac{4m}{3}$ (**): per le curve di quarto grado dalla formola di Plücker si conchiude che il numero de' punti di regresso non può esser maggiore di sedici; la formola da me trovata conduce in vece al seguente teorema: *le curve di quarto grado possono ammettere tre punti di regresso, e non possono averne più di tre.*

Ritornando in seguito sullo stesso argomento ho cercato di determinare e classificare le curve di quarto grado che ammettono tre punti di regresso e di studiarne qualche proprietà principale; e questo è l'oggetto del lavoro che ho l'onore di presentare all'esame di questa illustre Accademia. Nella presente memoria ho cercato di porre que' risultamenti che ho creduto interessanti, o che davano de' notevoli teoremi di Geometria; altre ricerche pure eseguite intorno a queste curve, ma che, lunghe e penose per loro stesse, non mi hanno in fine condotto a conseguenze brillanti, sono state da me tralasciate: esse non sarebbero servite che ad aumentare il volume di questo scritto.

La natura di un tal lavoro non permettendone la lettura per in-

* Ved. il Vol. IX de' Nouvelles Annales de Mathématiques pag. 290.

** Non sarà inutile avvertire che se la formola riportata desse un numero frazionario bisogna prendere il numero intero prossimamente minore.

tero, mi limiterò ad accennare que' risultamenti che son capaci di esser facilmente tradotti in linguaggio comune; essi sono i seguenti:

1.° Per tre punti dati non in linea retta passano infinite diverse curve di quarto grado che hanno que'tre punti per punti di regresso di prima specie.

Dall'equazione generale di queste curve si vede che esse si dividono in quattro specie: ogni curva della prima specie è chiusa forma una specie di triangolo curvilineo di cui i punti di regresso sono i tre vertici, ed è tutta compresa nel triangolo che ha per vertici i punti dati: queste curve per brevità le ho chiamate *curve triangolari*, esse possono avere uno o tre diametri.

Ogni curva della seconda specie ha due branche separate, delle quali una è formata da due rami infiniti che si congiungono toccandosi in uno dei punti dati e presentano ivi un regresso di prima specie, l'altra è composta da un arco che ha per corda la retta che unisce gli altri due punti dati, e da due rami infiniti che toccano quest'arco ai suoi estremi formando in questi punti gli altri due regressi. Queste curve hanno due asintoti.

Ogni curva della terza specie ha tre parti separate delle quali ognuna ha due rami infiniti che si toccano in uno de' punti dati formando ivi un regresso di prima specie: queste curve hanno pure due asintoti che convergono con quattro de' loro rami infiniti, e gli altri due rami non hanno asintoti assegnabili, potendosi questi considerare come trasportati all'infinito, mantenendosi però paralleli ad una retta di determinata posizione.

Finalmente ogni curva della quarta specie ha quattro parti separate, delle quali tre come le precedenti determinano i tre punti di regresso, avendo ognuna due rami infiniti, e la quarta forma un sol arco staccato che ha pure due rami infiniti. Le curve di questa specie hanno quattro asintoti, de' quali due convergono con quattro rami infiniti delle prime tre parti come gli asintoti delle curve di 2.^a e 3.^a specie, e gli altri due co'rimanenti quattro rami infiniti.

2.° Le tre tangenti condotte pe'tre punti di regresso concorrono sempre in un medesimo punto: questo punto cade dentro il triangolo che ha per vertici i punti dati quando la curva è chiusa; e cade fuori allorchè la curva ha rami infiniti: esso non può mai cadere sopra uno de' lati del detto triangolo.

3.° Dati quattro punti di cui tre non sono in linea retta si può sempre per tre di essi far passare una curva di quarto grado, che presenti in questi punti tre regressi di prima specie, in modo che le tangenti applicate a questi punti s'incontrino nel quarto punto dato, e non ve ne può passare che una sola.

4.° Se pel centro di gravità di un triangolo qualunque si tirano a' suoi vertici tre rette, e si costruisce la curva di 4° grado che ha quei vertici per punti di regresso e quelle congiungenti per tangenti, queste saranno tre diametri della curva, ed i tre segmenti compresi tra i lati del triangolo ed i corrispondenti archi della curva sono equivalenti.

5.° L'area di una curva determinata come ora si è detto, ossia di una curva triangolare a tre diametri è proporzionale all'area del triangolo che ha per vertici i punti di regresso: essa è uguale agli otto noni del cerchio inscritto nel triangolo equilatero equivalente al triangolo medesimo.

1. Prima di occuparci della ricerca delle curve di quarto grado che hanno tre punti di regresso di prima specie, premetteremo le condizioni che debbono verificarsi tra le coordinate di un punto di una data curva affinché esso sia un punto di regresso di prima specie. Sia

$$f(x, y) = 0, \quad (A)$$

l'equazione di una curva algebrica qualunque liberata da fratti e da radicali, il punto (x, y) sarà un punto di regresso di prima specie se si avranno tra x, y oltre dell'equazione (A) le tre seguenti equazioni

$$\frac{df}{dx} = 0, \quad (B); \quad \frac{df}{dy} = 0, \quad (C); \quad \left(\frac{d^2f}{dxdy}\right)^2 = \frac{d^2f}{dx^2} \cdot \frac{d^2f}{dy^2}; \quad (D)$$

e se dippiù si verificheranno le seguenti relazioni

$$\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2f}{dy^2} > 0, \quad (E)$$

$$\frac{d^3f}{dxdy} \left(\frac{d^3f}{dy^3} \frac{d^2f}{dx^2} + 3 \frac{d^2f}{dx^2 dy} \frac{d^2f}{dy^2} \right) > \frac{d^2f}{dy^2} \left(\frac{d^3f}{dx^3} \frac{d^2f}{dy^2} + 3 \frac{d^2f}{dxdy^2} \frac{d^2f}{dx^2} \right). \quad (F)$$

e la tangente alla curva nel punto (x, y) è data dall'equazione

$$y' - y = -\frac{\frac{d^2 f}{dx dy}}{\frac{d^2 f}{dy^2}}(x' - x) = -\frac{\frac{d^2 f}{dx^2}}{\frac{d^2 f}{dx dy}}(x' - x). \quad (G)$$

Ciò posto supponiamo che sieno O, A, B (*fig. 1*) i tre punti dati: prendansi per assi coordinati le rette OAx, OBy e si chiamino α, β le rette OA, OB . Essendo O un punto di regresso di prima specie l'equazione della curva sarà della forma

$$f(x, y) = ly^4 + mxy^3 + nx^2y^2 + px^3y + qx^4 + l'y^3 + m'xy^2 + n'x^2y + p'x^3 + l''y^2 + m''xy + n''x^2 = 0, \quad (1)$$

in cui in virtù dell'equazione (D) l'', m'', n'' debbono soddisfare all'equazione

$$m'' = 4l''n'', \quad (2)$$

e di più per le relazioni (E), (F) dovrà aversi

$$l'' + n'' > 0, \quad (a); \quad m''(l'n'' + n'l'') > 2l''(p'l'' + m'n''). \quad (b)$$

Dall'equazione (1) si ha intanto che per un punto dell'asse delle x , cioè quando $y = 0$

$$\begin{aligned} f &= qx^4 + p'x^3 + n''x^2, \quad \frac{df}{dx} = 4qx^3 + 3p'x^2 + 2n''x, \quad \frac{df}{dy} = px^3 + n'x^2 + m''x, \\ \frac{d^2f}{dx^2} &= 12qx^2 + 6p'x + 2n'', \quad \frac{d^2f}{dx dy} = 3px^2 + 2n'x + m'', \quad \frac{d^2f}{dy^2} = 2nx^2 + 2m'x + 2l'', \\ \frac{d^3f}{dx^3} &= 24qx + 6p', \quad \frac{d^3f}{dx^2 dy} = 6px + 2n', \quad \frac{d^3f}{dx dy^2} = 4nx + 2m', \quad \frac{d^3f}{dy^3} = 6mx + 6l'; \end{aligned}$$

quindi affinchè il punto A sia un punto di regresso di prima specie dovrà aversi in virtù delle equazioni (A), (B), (C), (D) e delle inequazioni (E) (F)

$$q\alpha^2 + p'\alpha + n'' = 0, \quad (3); \quad 4q\alpha^3 + 3p'\alpha + 2n'' = 0, \quad (4); \quad p\alpha^2 + n'\alpha + m'' = 0; \quad (5)$$

$$(3p\alpha^3 + 2n'\alpha + m'')^2 = 4(6q\alpha^3 + 3p'\alpha + n'')(n\alpha^2 + m'\alpha + l''); \quad (6)$$

$$(6q + n)\alpha^2 + (3p' + m')\alpha + n'' + l'' > 0; \quad (a')$$

$$(2p\alpha^2 + n'\alpha)[(m\alpha + l')(2q\alpha^2 - n'') + (3p\alpha + n')(n\alpha^2 + m'l + l'')]$$

$$> 2(n\alpha^2 + m'\alpha + l'')[(4q\alpha + p')(n\alpha^2 + m'\alpha + l'') + (2n\alpha + m')(2q\alpha^2 - n'')]. \quad (b')$$

Similmente avendosi dall'equazione (1) per $x = 0$

$$f = ly^4 + l'y^3 + l''y^2, \quad \frac{df}{dx} = my^3 + m'y^2 + m''y, \quad \frac{df}{dy} = 4ly^3 + 3l'y^2 + 2l''y,$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = 2ny^2 + 2n'y + 2n'', \quad \frac{d^2f}{dx dy} = 3my^2 + 2m'y + m'', \quad \frac{d^2f}{dy^2} = 12ly^2 + 6l'y + 2l'',$$

$$\frac{d^3f}{dx^3} = 6py + 6p', \quad \frac{d^3f}{dx^2 dy} = 4ny + 2n', \quad \frac{d^3f}{dx dy^2} = 6my + 2m', \quad \frac{d^3f}{dy^3} = 24ly + 6l',$$

affinchè il punto B in cui $y = \beta$ sia un punto di regresso di prima specie dovrà essere

$$l\beta^3 + l'\beta + l'' = 0, \quad (7); \quad m\beta^2 + m'\beta + m'' = 0, \quad (8); \quad 4l\beta^2 + 3l'\beta + 2l'' = 0; \quad (9)$$

$$(3m\beta^2 + 2m'\beta + m'')^2 = 4(6l\beta^2 + 3l'\beta + l'')(n\beta^2 + n'\beta + n''); \quad (10)$$

$$(6l + n)\beta^2 + (3l' + n')\beta + l'' + n'' > 0; \quad (a'')$$

$$(2m\beta^2 + m'\beta)[(4l\beta + l')(n\beta^2 + n'\beta + n'') + (2n\beta + n')(2l\beta^2 - l'')]$$

$$> 2(2l\beta^2 - l'')[p\beta + p'](2l\beta^2 - l'') + (3m\beta + m')(n\beta^2 + n'\beta + n''). \quad (b'')$$

Per tal modo si hanno nove equazioni tra i dodici coefficienti dell'equazione (1), ovvero tra i rapporti di undici di essi al rimanente, onde nove saranno funzione degli altri due, e questi potranno poi prendersi ad arbitrio, sempre però in modo da soddisfare le inequazioni (a), (b), (a'), (b'), (a''), (b''). Resta ora ad esprimere per mezzo delle ritrovate equazioni nove de' detti coefficienti in funzione degli altri: a tale oggetto si osservi che dalle equazioni (3), (4) risolvendole rispetto ad n'' e p' si ricava

$$n'' = qx^2, \quad p' = -2qx;$$

similmente dalle due (7), (9) si ottiene

$$l'' = l\beta^2, \quad l' = -2l\beta,$$

quindi la (2) darà

$$m'' = \pm 2\alpha\beta\sqrt{ql}.$$

Ponendo nelle equazioni (8) e (5) questo valore di m'' e risolvendole rispetto ad m' ed n' si otterrà

$$m' = -m\beta \mp 2\alpha\sqrt{ql}, \quad (11) \quad n' = -p\alpha \mp 2\beta\sqrt{ql}; \quad (12)$$

e per conseguenza le equazioni (6), (10) diverranno

$$(p\alpha \mp 2\beta\sqrt{ql})^2 = 4q(n\alpha^2 - m\alpha\beta \mp 2\alpha^2\sqrt{ql} + l\beta^2).$$

$$(m\beta \mp 2\alpha\sqrt{ql})^2 = 4l(n\beta^2 - p\alpha\beta \mp 2\beta^2\sqrt{ql} + q\alpha^2), \quad (*)$$

ovvero

$$\begin{aligned} \alpha p^2 \mp 4\beta p\sqrt{ql} + 4\beta qm \pm 8\alpha q\sqrt{ql} &= 4\alpha qn, \\ \beta m^2 \mp 4\alpha m\sqrt{ql} + 4\alpha p \pm 8\beta l\sqrt{ql} &= 4\beta ln. \end{aligned} \quad (13)$$

Eliminando n da queste due equazioni risulta

$$\beta l(\alpha p^2 \mp 4\beta p\sqrt{ql} + 4\beta qm) = \alpha q(\beta m^2 \mp 4\alpha m\sqrt{ql} + 4\alpha p),$$

ossia

$$\alpha\beta(lp^2 - qm^2) = 4(p\sqrt{l} \mp m\sqrt{q})(\alpha^2 q\sqrt{l} \pm \beta^2 l\sqrt{q}),$$

la quale, come è chiaro, si scinde nelle due

$$p\sqrt{l} = \pm m\sqrt{q}, \quad (14)$$

$$\alpha\beta(p\sqrt{l} \pm m\sqrt{q}) = 4(\alpha^2 q\sqrt{l} \pm \beta^2 l\sqrt{q}). \quad (15)$$

Di queste due equazioni la prima deve rigettarsi, imperocchè ponendo nell'inequazione (6) i valori trovati per l'' , m'' , n'' , l' , m' , n' , p' essa riducesi a

$$\mp p\sqrt{lq} > -mq, \text{ ovvero a } p\sqrt{l} < \pm m\sqrt{q}. \quad (**)$$

Resta quindi a considerarsi soltanto l'equazione (15), risolvendola rispetto a p si ottiene

(*) Si avverta che il segno da prendersi avanti il radicale in queste e nelle seguenti equazioni corrisponde sempre a quello che si adotta nel valore di m'' .

(**) Non sarà inutile osservare che facendo uso dell'equazione (14) si avrebbe

$$p = \pm m\sqrt{\frac{q}{l}},$$

e quindi dalle equazioni (11), (12), (13) si otterrebbe

$$m' = -m\beta \mp 2\alpha\sqrt{ql}, \quad n' = \mp(m\alpha\sqrt{\frac{q}{l}} + 2\beta\sqrt{ql}), \quad n = \frac{m^2}{4l} \pm 2\sqrt{ql},$$

e per conseguenza l'equazione (1) diverrebbe

$$\begin{aligned} ly^4 + mxy^3 + \left(\frac{m^2}{4l} \pm 2\sqrt{ql}\right)x^2y^2 \pm m\sqrt{\frac{q}{l}}x^3y + qx^4 \\ - 2l\beta y^3 - (m\beta \pm 2\alpha\sqrt{ql})xy^2 \mp m\alpha\sqrt{\frac{q}{l}}x^2y - 2q\alpha x^3 + l\beta'y \mp 2\alpha\beta\sqrt{ql}xy + q\alpha x^2 = 0, \end{aligned}$$

la quale riducesi successivamente ad

$$(y^2\sqrt{l} + \frac{m}{2\sqrt{l}}xy \pm x^2\sqrt{q})^2 - 2'y^2\sqrt{l} + \frac{m}{2\sqrt{l}}xy \pm x^2\sqrt{q})'\beta y\sqrt{l} \pm \alpha x\sqrt{q} + (\beta y\sqrt{l} \pm \alpha x\sqrt{q})^2 = 0$$

ovvero ad

$$\left[y^2 + \frac{m}{2l}xy \pm x^2\sqrt{\frac{q}{l}} - \left(\beta y \pm \alpha x\sqrt{\frac{q}{l}}\right)\right]^2 = 0$$

e ci dimostra per conseguenza che l'equazione (14) deve rigettarsi.

$$p = \mp 4\sqrt{ql} \left(\frac{m}{2l} - \frac{\beta}{\alpha} \mp \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{\frac{q}{l}} \right); \quad (16)$$

non dovendo intanto questo valore di p soddisfare all'equazione (14), altrimenti come si è veduto la (1) non appartiene più ad una curva di quarto grado, dovrà essere

$$m > 2l \left(\frac{\beta}{\alpha} \pm \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{\frac{q}{l}} \right);$$

sostituendo il valore di p dato dall'equazione (16) nella (13) si ricava

$$n = \left(\frac{m}{2l} \mp 2\frac{\alpha}{\beta} \sqrt{\frac{q}{l}} \right)^2 l \pm 6\sqrt{ql}, \quad (17)$$

e per conseguenza l'equazione che rappresenta le curve di quarto grado di cui O, A, B sono tre punti di regresso di prima specie è la seguente

$$ly^4 + mxy^3 + nx^2y^2 + px^3y + qx^4 - 2l\beta y^3 - (m\beta \pm 2\alpha\sqrt{ql})xy^2 - (p\alpha \pm 2\beta\sqrt{ql})x^2y - 2q\alpha x^3 + (\beta y\sqrt{l} \pm \alpha x\sqrt{q})^2 = 0, \quad (18)$$

in cui l, m, q possono prendersi ad arbitrio purchè si abbia

$$ql > 0, \quad m > 2l \left(\frac{\beta}{\alpha} \pm \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{\frac{q}{l}} \right), \quad (19)$$

ed inoltre le quantità n e p sono date dalle equazioni (17) e (16). (*)

2. Volendo determinare le tangenti a' punti O, A, B si farà uso dell'equazione (C) la quale, indicando con x, y le coordinate variabili di queste tangenti, diverrà rispettivamente

$$y = \mp \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{\frac{q}{l}} \cdot x, \quad (1)$$

$$y = \frac{\pm \sqrt{\frac{q}{l}}}{\frac{m}{2l} - \frac{\beta}{\alpha} \mp \frac{2\alpha}{\beta} \sqrt{\frac{q}{l}}} (x - \alpha), \quad (2)$$

$$y = \beta - \left(\frac{m}{2l} \mp \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{\frac{q}{l}} \right) x, \quad (3)$$

le quali come è chiaro rappresentano tre rette che s'incontrano in un medesimo punto dato dalle coordinate

(*) Per mezzo di questi valori è facile vedere che le inequazioni $(a), (a'), (b'), (a''), (b'')$ restano soddisfatte.

$$x = \frac{\beta}{\frac{m}{2l} \mp \frac{2\alpha}{\beta} \sqrt{\frac{q}{l}}}, \quad (4) \quad y = \frac{\pm \alpha \sqrt{\frac{q}{l}}}{\frac{m}{2l} \mp \frac{2\alpha}{\beta} \sqrt{\frac{q}{l}}}. \quad (5)$$

Da ciò risulta il seguente teorema:

Se una curva di quarto grado ha tre punti di regresso di prima specie, le tangenti condotte per questi punti o sono parallele o s'incontrano in un medesimo punto.

È chiaro poi che affinché le tangenti risultino parallele dovrà farsi

$$\frac{m}{2l} = \pm 2 \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{\frac{q}{l}}, \text{ e perciò } n = \pm 6 \sqrt{ql}, \quad p = \pm 4 \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{ql}.$$

Ritornando ora al caso in cui le tangenti concorrono in un medesimo punto faremo da prima riflettere che dalle equazioni (4), (5) si deduce che questo punto non potrebbe trovarsi mai nè sull'asse delle x nè su quello delle y : inoltre osservando che la retta AB ha per equazione

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1,$$

si vede che la tangente in A la quale è data dall'equazione (1) la incontra

in un punto avente per ascissa $x = \frac{\beta}{\frac{\beta}{\alpha} \mp \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{\frac{q}{l}}}$, il qual valore in virtù dell'

inequazione (19) stabilita nel n.º precedente non potendo mai essere uguale al secondo membro dell'equazione (4), ne segue che il punto di concorso delle tre tangenti in A, in B, ed in O non può mai cadere sulla retta AB, e nel tempo stesso si vede il significato geometrico della relazione (19, 1). Indicando con α', β' le coordinate del punto d'incontro delle tre tangenti in O, A, B, dalle equazioni (4) e (5) si ha

$$\frac{m}{2l} \mp 2 \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{\frac{q}{l}} = \frac{\beta}{\alpha'}, \quad \mp \sqrt{\frac{q}{l}} = \frac{\beta \beta'}{\alpha \alpha'};$$

onde, in virtù delle equazioni (16, 1), (17, 1), la (18, 1) si riduce ad

$$\begin{aligned} \alpha^2 \alpha'^2 y^4 + 2 \alpha^2 \alpha' (\beta - 2 \beta') x y^3 + (\beta'^2 x^2 - 6 \alpha \alpha' \beta \beta') x^2 y^2 + 2 \beta^2 \beta (x - 2 \alpha') x^3 y + \beta^2 \beta'^2 x^4 \\ - 2 \alpha \beta [\alpha \alpha'^2 y^3 + \alpha \alpha' (\beta - 3 \beta') x y^2 + \beta \beta (\alpha - 3 \alpha') x^2 y + \beta \beta'^2 x^3] \\ + \alpha^2 \beta^2 (\alpha' y - \beta' x)^2 = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

la quale rappresenta tutte le curve di quarto grado che hanno tre punti di regresso in O, A, B, ed in cui α', β' rappresentano le coordinate del punto ove concorrono le tre tangenti applicate a' punti O, A, B, le quali per conseguenza avranno per equazioni rispettivamente

$$y = \frac{\beta'}{\alpha'} x, \quad (7) \quad y = \frac{\beta'}{\alpha' - \alpha} (x - \alpha), \quad (8) \quad y = \frac{\beta' - \beta}{\alpha'} x + \beta: \quad (9)$$

è evidente poi, dopo quel che si è detto intorno all'inequazione (19, 1), che i valori di α' e di β' debbono soddisfare alle relazioni

$$\alpha' > 0, \quad \beta' > 0, \quad \frac{\beta'}{\beta} + \frac{\alpha'}{\alpha} > 1, \quad (10)$$

ossia che il punto α', β' non deve stare sopra alcuna delle rette OA, AB, BO che passano per i punti dati: e che quando questo punto è dato, la curva è pienamente determinata.

Ponendo nell'equazione (6) $\frac{\beta'}{\alpha'} = a$, ed $\alpha' = \infty$, essa riducesi ad

$$\alpha^2 y^4 - 4a\alpha^2 x y^3 - 6a\alpha\beta x^2 y^2 - 4a\beta^2 x^3 y + a^2 \beta^2 y^4 - 2\alpha\beta(\alpha y^3 - 3a\alpha x y^2 - 3a\beta x^2 y + a^2 \beta x^3) + \alpha^2 \beta^2 (y - ax)^2 = 0, \quad (11)$$

la quale rappresenta in conseguenza le curve in cui le tangenti a' punti di regresso O, A, B sono parallele alla retta data dall'equazione

$$y = ax \quad (12)$$

purchè la quantità a soddisfaccia alle relazioni

$$a > 0, \quad a < \frac{1}{6}, \quad a > -\frac{\beta}{\alpha},$$

ossia che la retta a cui si vuole che le tangenti sieno parallele non deve esser parallela ad alcuno de' lati del triangolo OAB. Gioverà infine avvertire che in tutte le equazioni precedenti ed in seguito le quantità α, β si considerano aver sempre valori positivi.

3. Volendo determinare i punti in cui le tangenti in O, A, B incontrano la curva, basta combinare l'equazione (6) del n.º precedente con

le (7), (8), (9): ponendo da prima $y = \frac{\beta'}{\alpha'} x$, essa riducesi ad

$$(\alpha\beta' + \alpha'\beta - \alpha\beta) (3\alpha\beta' + 3\alpha'\beta + \alpha\beta) \frac{\beta'^2}{\alpha'^2} x^4 - 4\alpha\beta(\alpha\beta' + \alpha'\beta - \alpha\beta) \frac{\beta'^2}{\alpha'} x^3 = 0$$

dalla quale vedesi che se fosse $\alpha\beta' + \alpha'\beta - \alpha\beta = 0$ sarebbe $y = \frac{\beta'}{\alpha'} x$ un

fattore dell'equazione (6), onde per esprimere che ciò non avvenga si ricade sulla relazione (10, 2). Dall'equazione precedente si ha intanto $x^3 = 0$ il che dimostra, come deve essere, che la tangente in O ha comune con la curva tre punti all'origine; ed

$$x = \frac{4\alpha\beta\alpha'}{5\alpha\beta + 5\alpha'\beta + \alpha\beta}$$

rappresenta l'ascissa del quarto punto d'incontro. Da questo valore si vede che se

$$3\alpha\beta' + 3\alpha'\beta + \alpha\beta = 0$$

ossia se il punto α', β' sta (*fig. 1*) sulla retta $A'B'$ parallela ad AB e condotta pel punto D preso in modo che sia $OD' = \frac{1}{3}OA$ risulta $x = \infty$, e per conseguenza la tangente in O è parallela ad un asintoto della curva.

Delle analoghe proprietà dovendo aver luogo per gli altri punti B ed A , ne segue che prese le AD e BE rispettivamente uguali ad OD' ed OE' e condotte le due rette $B'O', A'O'$ parallele alle due OB ed OA , se il punto α', β' sta sulla retta $A'O'$ la tangente in B è parallela ad uno degli asintoti della curva, e se sta sulla $A'B'$ la tangente in A è parallela ad un asintoto. È chiaro poi che se si scelga uno de' punti O', A', B' per punto di concorso delle tre tangenti in O, A, B due di queste tangenti saranno parallele a due asintoti della curva; e se il punto suddetto non sta sopra alcuna delle rette $O'A', A'B', B'O'$ ciascuna delle tangenti in O, A, B incontrerà la curva in un punto determinato.

4. Per meglio discutere le varie curve che possono essere rappresentate dall'equazione (6, 2) si rifletta che in essa, come già si è detto, le quantità α, β possono essere considerate sempre positive, ed inoltre dovendo il punto α', β' cader sempre o in uno degli angoli del triangolo OAB , o in uno degli angoli opposti a' vertici, possiamo supporre che siensi presi per assi quelle rette che formano l'angolo in cui è compreso il punto α', β' ; onde le due quantità α', β' potranno esser considerate sempre dello stesso segno. Ed è chiaro che ciò non limita in nulla la generalità dell'equazione suddetta, quando si vuole solo discutere a fin di conoscere le curve di diversa specie che può essa rappresentare: imperocchè dando ad α', β' segni diversi, si avrebbero delle curve differentemente situate rispetto a' punti O, A, B , ma non di diversa forma. Ciò posto ponendo nell'equazione (6, 2)

$$y = tx, \quad (1)$$

si ha un'equazione della forma

$$Ax^3 - 2Bx + C = 0, \quad (2)$$

in cui

$$A = \alpha^2\alpha'^2t^4 + 2\alpha^2\alpha'(\beta - 2\beta')t^3 + (\alpha^2\beta^2 - 6\alpha\alpha'\beta\beta')t^2 + 2\beta^2\beta'(\alpha - 2\alpha')t + \beta^2\beta'^2,$$

$$B = \alpha\beta [\alpha x'^2 l^2 + \alpha x' \beta - 3\beta^2) l^2 + \beta^2 \beta' (x - 3x') l + \beta^2 \beta'^2],$$

$$C = x^2 \beta^2 (x' l - \beta^2)^2.$$

Da questi valori di A, B, C si ricava

$$AC - B^2 = 4x^2 \beta^2 (\alpha \beta' + \alpha' \beta - \alpha \beta)^2 \alpha' \beta' l^3,$$

onde essendo α' , β' dello stesso segno, affinchè questa quantità sia positiva, cioè affinchè le radici dell'equazione (2) sieno reali, dovrà essere $l > 0$, ossia la retta data dall'equazione (1) dovrà cadere nell'angolo yOx . Segue da ciò che la curva è tutta compresa tra gli angoli opposti al vertice formati dalle due rette che comprendono il punto d'incontro delle tre tangenti a' punti di regresso. Al contrario se α' e β' fossero di segno contrario dovrebbe essere $l < 0$ affinchè l'equazione (2) desse per x valori reali; quindi in generale può dirsi che considerando due qualunque delle tre rette che congiungono i tre punti di regresso, nessun punto della curva può cadere negli angoli adiacenti a quello in cui trovasi il punto ove concorrono le tre tangenti applicate a' punti di regresso.

Segue da ciò che se il punto α' , β' cade dentro il triangolo OAB la curva non può uscire da questo triangolo, onde sarà una curva chiusa, e per conseguenza l'equazione $A=0$ darebbe per l valori immaginari. Se il punto α' , β' cade fuori del triangolo OAB non potrà cadere alcun punto della curva entro il triangolo OAB; onde se α' , β' sono dello stesso segno essa cade tutta nell'angolo $x'Oy'$, e nello spazio $yBAx$, e non potendo la tangente in O incontrare la curva in più di un altro punto essa dovrà avere dei rami infiniti: l'equazione $A=0$ darà quindi per l de' valori reali.

5. Di qui nasce spontaneamente la classificazione delle curve di quarto grado a tre punti di regresso: lo scopo di questa memoria essendo soltanto di provare che esistono curve di quarto grado che hanno tre punti di regresso di prima specie, e darne l'equazione che le comprende tutte, non ci occuperemo qui della minuta discussione de' vari casi che può presentare la risoluzione dell'equazione $A=0$, riserbando di parlarne in altro lavoro di già intrapreso intorno a queste curve, ove tratteremo pure della loro descrizione grafica; ci limiteremo quindi a far osservare che queste curve possono dividersi ne' seguenti quattro gruppi o specie:

1. Quando l'equazione $A=0$ dà radici immaginarie, cioè quando

il punto α' , β' cade dentro il triangolo OAB: in questo caso si hanno delle curve chiuse che dovendo toccare (*fig. 1.*) le tre rette OC, AC, BC dovranno esser formate da tre archi OA, AB, BO che costituiscono in O, A, B tre punti di regresso di prima specie. La loro figura potrebbe rassomigliarsi quasi ad un triangolo curvilineo, in cui però gli angoli in A, O, B sono nulli: queste curve per brevità le chiameremo in seguito *curve triangolari*.

II. Quando l'equazione $A=0$ ha due radici reali e due immaginarie, allora la curva ha due asintoti e per conseguenza quattro rami infiniti, supponendo sempre α' , β' dello stesso segno essa dovrà avere la forma indicata nella *fig. 2.* il ramo BII ed il ramo OII' hanno un medesimo asintoto e l'altro asintoto è comune a' rimanenti due rami AK, OK'.

III. Quando l'equazione $A=0$ ha tutte le radici reali e disuguali, allora la curva ha quattro asintoti e per conseguenza otto rami infiniti: essa ha la forma indicata nella *fig. 4.* i rami BII ed OII' hanno un asintoto comune, un altro è comune a' rami AK, OK'; un terzo a' rami BN, e QN'; ed il quarto a' due rami AL, QL'.

IV. Quando l'equazione $A=0$ ha due delle sue quattro radici reali uguali fra loro: in questo caso come è facile dedurre dalla teorica degli asintoti due di essi si trasportano all'infinito secondo una data direzione, e la curva perde due rami infiniti; cioè (*fig. 4.*) tutta la parte L'QN': essa ha quindi sei rami infiniti, come è indicato nella *fig. 3.*, di cui BII ed OII' hanno un asintoto comune, AK ed OK' un altro asintoto, ed i due BN ed AL non hanno asintoti.

Le curve di questa specie servono di limite a quelle considerate nel terzo caso e nel secondo; onde riguarderemo come curve della prima specie quelle che non hanno alcun ramo infinito, e che abbiám detto voler chiamare curve triangolari: come curve della seconda specie quelle che hanno (*fig. 2.*) quattro rami infiniti con due asintoti: come curve della terza specie quelle che hanno (*fig. 3.*) sei rami infiniti ed anche due asintoti: ed in fine come curve della quarta specie quelle che hanno (*fig. 4.*) otto rami infiniti e quattro asintoti.

6. Tra le curve triangolari merita speciale attenzione quella in cui il punto di concorso delle tre tangenti è il centro di gravità del triangolo che ha per vertici i tre punti di regresso. Ma prima di esaminare questo caso non sarà inutile cercare l'equazione generale delle curve

a tre punti di regresso prendendo per assi delle coordinate (fig. 5.) la tangente in O e la parallela ad AB. A tale oggetto osserveremo da prima che l'equazione (6, 2) può porsi sotto la forma

$$(\alpha'y - \beta'x)^2(\alpha y + \beta x)^2 - (\alpha\beta' + \alpha'\beta - \alpha\beta)[2\alpha\alpha'y^2 + (\alpha\beta' + \alpha'\beta + \alpha\beta)xy + 2\beta\beta'x^2]xy - 2\alpha\beta[(\alpha'y - \beta'x)^2(\alpha y + \beta x) - (\alpha\beta' + \alpha'\beta - \alpha\beta)(\alpha'y + \beta'x)xy] + \alpha^2\beta^2(\alpha'y - \beta'x)^2 = 0: (*) (1)$$

inoltre supponendo essere C il punto α' , β' , e ponendo $OC = a$, $OD = a'$, $DB = b$, $DA = b'$ le formole per passare dagli assi Ox , Oy agli assi Ox' , Oy' , come è chiaro saranno

$$x = \frac{\alpha'}{a} \left(x' - \frac{a'}{b} y' \right), \quad y = \frac{\beta'}{a} \left(x' + \frac{a'}{b'} y' \right);$$

quindi sostituendo nell'equazione (1) questi valori di x e di y , tenendo presente che

$$\alpha = \frac{a'(b+b')}{ab} \alpha', \quad \beta = \frac{a'(b+b')}{ab'} \beta',$$

onde

$$\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\beta'}{\beta} = \frac{a}{a'},$$

fatte le debite riduzioni si otterrà l'equazione

$$\begin{aligned} & a^2 a'^2 (b+b')^2 x'^2 y'^2 \\ & + (a'-a)[2a(a'^2 y'^2 + b b' x'^2) + (a'+a)(b x' - a' y')(b' x' + a' y')] (b x' - a' y')(b' x' + a' y') \\ & - 2a a' [a a'^2 (b+b')^2 y'^2 x' + (a'-a)(2b b' x' + (b-b') a' y')(b x' - a' y')(b' x' + a' y')] \\ & + a^2 a'^2 (b+b')^2 y'^2 = 0. \quad (2) (***) \end{aligned}$$

(*) Dalla forma data a questa equazione, ovvero anche meglio dalla seguente

$$(\alpha'y - \beta'x)^2(\alpha y + \beta x - \alpha\beta)^2$$

$$- (\alpha\beta' + \alpha'\beta - \alpha\beta) [2\alpha\alpha'y^2 + (\alpha\beta' + \alpha'\beta + \alpha\beta)xy + 2\beta\beta'x^2 - 2\alpha\beta'\alpha'y + \beta^2 x] xy = 0$$

vedesi chiaramente dover essere

$$\alpha\beta' + \alpha'\beta - \alpha\beta \leq 0, \quad \text{ovvero} \quad \frac{\beta'}{\beta} + \frac{\alpha'}{\alpha} \leq 4.$$

(**) Per rendere più facile questa sostituzione non sarà inutile osservare che

$$\alpha'y - \beta'x = \alpha'\beta' \cdot \frac{a'(b+b')}{ab b'} y',$$

$$\alpha y + \beta x = \alpha\beta \cdot \frac{x'}{a'},$$

$$\alpha\beta' + \alpha'\beta - \alpha\beta = \alpha\beta \left(\frac{\beta'}{\beta} + \frac{\alpha'}{\alpha} - 4 \right) = \alpha\beta \cdot \frac{a' - a}{a'},$$

$$\alpha\beta' + \alpha'\beta + \alpha\beta = \alpha\beta \cdot \frac{a' + a}{a'};$$

per tal modo l'equazione rendesi divisibile per $\alpha\beta'\alpha^2\beta'^2$, e liberata da fratti si riduce all'equazione riportata.

Dalla forma di quest'equazione vedesi chiaro che se $b=b'$ si annullano i termini in y' a primo grado, e per conseguenza l'asse delle x' è un diametro: onde *quando la tangente condotta per uno de' punti di regresso divide per metà la retta che unisce gli altri due, essa è un diametro della curva*. E siccome se ciò avviene per due deve avvenire anche per la terza tangente, essendo allora il centro di gravità del triangolo OAB il punto d'incontro delle tre tangenti, ne segue che *tutte le curve delle varie classi enumerate possono avere un diametro; e che le curve triangolari possono averne anche tre*. Fatto intanto nell'equazione (2) $b=b'$, si avrà l'equazione generale delle curve dotate di un diametro che è la seguente

$$(a'-a)^2 a'^3 y'^4 - 2(a'^2 - 3a^2) a'^2 b^2 x' y'^2 + (a'-a)(a'+3a) b^4 x'^4 + 4aa'^3 b^2 (a'-3a) x' y'^2 - 4aa' b^4 (a'-a) x'^3 + 4a^2 a'^4 b^2 y'^2 = 0. \quad (3)$$

Quest'equazione, come è facile vedere, appartiene ad una curva della 1.^a specie quando si ha $a > 0$ ed $a < a'$: dà una curva della 2.^a specie o quando $a > a'$; o quando $a < 0$ ed in valore assoluto $> \frac{1}{2} a'$ cioè quando $a < -\frac{1}{2} a'$: dà una curva della 3.^a specie quando $a = -\frac{1}{2} a'$: e finalmente dà curve della 4.^a specie quando $a < 0$ ed in valore assoluto minore di $\frac{1}{2} a'$; cioè quando si ha $a < 0$ ed $a > -\frac{1}{2} a'$. Se nell'equazione (3) facciamo $a = \frac{2}{3} a'$ si avrà il caso in cui le tangenti in B ed in A sono parallele a due asintoti della curva di seconda specie che ne risulta: allorchè poi facciamo nella medesima equazione $a = \frac{2}{3} a'$ si avrà la curva a tre diametri corrispondente, come si è detto, al caso in cui le tre tangenti condotte per i punti di regresso concorrono nel centro di gravità del triangolo OAB: in questa ipotesi l'equazione diviene

$$a'^4 y'^4 + 6a'^2 b^2 x'^2 y'^2 + 9b^4 x'^4 - 24a'^3 b^2 x' y'^2 - 8a' b^4 x'^3 + 16a'^4 b^2 y'^2 = 0; \quad (4)$$

ponendo in essa $y'=0$ si ottiene $x'^3=0$ ed $x'=\frac{2}{3} a'$, onde presa la DE= $\frac{1}{2}$ DC sarà E il punto ove l'arco tangente alle due rette BC e CA incontra la OD: similmente si determinano i punti E' ed E''.

Risolvendo l'equazione (4) rispetto ad $\frac{y'^2}{b^2}$, si ha

$$\frac{y'^2}{b^2} = -\left(3 \frac{x'^2}{a'^2} - 12 \frac{x'}{a'} + 8\right) \pm \sqrt{\left(3 \frac{x'^2}{a'^2} - 12 \frac{x'}{a'} + 8\right)^2 + \frac{x'^3}{a'^3} \left(8 - 9 \frac{x'}{a'}\right)}$$

ovvero

$$\frac{y'^2}{b^2} = -\left(3 \frac{x'^2}{a'^2} - 12 \frac{x'}{a'} + 8\right) \pm 8 \left(1 - \frac{x'}{a'}\right) \sqrt{1 - \frac{x'}{a'}}.$$

Dal primo di questi due valori di $\frac{y'^2}{b^2}$ vedesi che quando la x' è negativa il radicale è minore in valore assoluto della parte razionale; onde i valori di $\frac{y'^2}{b^2}$ sono ambedue negativi, e quindi i quattro valori di y' immaginari: da $x' = 0$ ad $x' = \frac{a}{9}a'$ il radicale è maggiore della parte razionale, onde y'^2 ha un valore positivo e l'altro negativo, e quindi y' due valori reali e due immaginari, ossia che tutte le rette parallele ad AB condotte per un punto qualunque compreso tra O ed E incontrano la curva in due punti: da $x' = \frac{a}{9}a'$ ad $x' = a'$ il radicale torna ad essere minore della parte razionale, la quale essendo tra questi limiti sempre positiva ne segue che i quattro valori di y' sono tutti reali, cioè che tutte le parallele ad AB condotte per un punto qualunque della ED incontrano la curva in quattro punti: finalmente dalla seconda forma data al valore di $\frac{y'^2}{b^2}$ si vede che da $x' > a'$ ad $x' = \infty$ i quattro valori di y' risultano tutti immaginari; e per conseguenza, come già avevamo avvertito, la curva non si estende al di là della retta AB.

7. Volendo determinare l'area del segmento BED si rifletta che indicando con θ l'angolo $y'0x'$, si ha

$$BED = \text{sen } \theta \int_{\frac{a}{9}a'}^{a'} y' dx',$$

onde, essendo l'equazione dell'arco EB

$$y' = b \sqrt{12 \frac{x'}{a'} - 3 \frac{x'^2}{a'^2} - 8 - 8 \left(1 - \frac{x'}{a'}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

si avrà

$$BED = b \text{sen } \theta \int_{\frac{a}{9}a'}^{a'} dx' \sqrt{12 \frac{x'}{a'} - 3 \frac{x'^2}{a'^2} - 8 - 8 \left(1 - \frac{x'}{a'}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Per determinare quest'integrale pongasi

$$1 - \frac{x'}{a'} = t^2, \text{ donde } dx' = -2a' t dt,$$

e si avrà

$$BED = 2a'b \sin \theta \int_0^{\frac{1}{2}} (1+t) u dt \sqrt{(1+t)(1-3t)}. \quad (5)$$

Osservando che questo integrale definito rappresenta un numero costante, e che $a'b \sin \theta$ è la misura del triangolo BOA, ne segue che qualunque sia il triangolo AOB il segmento BED, e quindi BEA n'è una determinata parte: donde risultano i due seguenti teoremi:

Se si congiungono i vertici di un triangolo AOB col suo centro di gravità, e si descrive la curva triangolare che ha per punti di regresso O, A, B e per tangenti le rette OC, AC, BC i tre segmenti BEA, AE'O, OE''B sono equivalenti.

Le aree delle curve triangolari a tre diametri sono proporzionali a' triangoli che hanno per vertici i loro punti di regresso.

Per determinare il valore effettivo dell'area del segmento BED resta a valutare l'integrale definito esistente nell'equazione (5) e per far ciò porremo

$$\sqrt{(1+t)(1-3t)} = (1+t)u,$$

donde

$$t = \frac{1-u^2}{u^2+3}, \quad 1+t = \frac{4}{u^2+3},$$

$$dt = -\frac{8udu}{(u^2+3)^2}, \quad \sqrt{(1+t)(1-3t)} = \frac{4u}{u^2+3},$$

e quindi

$$BED = 256 a'b \sin \theta \int_0^1 \frac{(1-u^2)u^2 du}{(u^2+3)^3}:$$

valutando quest'integrale si trova

$$\int_0^1 \frac{(1-u^2)u^2 du}{(u^2+3)^3} = \frac{1}{2 \cdot 3^3} \left(\frac{1}{6} - \frac{4\pi}{81\sqrt{3}} \right), \quad (*)$$

(*) Nell'eseguire questo calcolo si potrà osservare da prima che si ha identicamente

$$\int \frac{(1-u^2)u^2 du}{(u^2+3)^3} = - \int \frac{du}{(u^2+3)^3} + 7 \int \frac{du}{(u^2+3)^4} - 12 \int \frac{du}{(u^2+3)^5},$$

e quindi si calcoleranno questi integrali mercè la formola di riduzione

$$\int \frac{du}{(u^2+3)^n} = \frac{u}{6(n-1)u^2+3^{n-1}} + \frac{2n-3}{6(n-1)} \int \frac{du}{(u^2+3)^{n-1}}.$$

e per conseguenza sarà

$$BED = \left(\frac{1}{6} - \frac{4\pi}{81\sqrt{5}} \right) a'b \sin \theta; \quad (1)$$

onde indicando con A l'area della curva BEAO che è uguale a quella del triangolo, cioè ad $a'b \sin \theta$, diminuita di 6BED, si avrà

$$A = \frac{8\pi}{27\sqrt{5}} a'b \sin \theta. \quad (2)$$

Laonde il rapporto dell'area della curva a quella del triangolo OAB è indicato dalla frazione $\frac{8\pi}{27\sqrt{5}}$. Per poter facilmente esprimere il risulta-

mento indicato dall'equazione (2) in linguaggio ordinario si rifletta che chiamando r il raggio del cerchio iscritto in un triangolo equilatero la superficie di questo è indicata da $3r^2\sqrt{3}$; e quindi se dinotisi con r il raggio del cerchio iscritto nel triangolo equilatero equivalente al triangolo OAB, si avrà $a'b \sin \theta = 3r^2\sqrt{3}$, e l'equazione (2) si ridurrà ad $A = \frac{8}{9}\pi r^2$, la quale somministra il seguente teorema:

L'area di una curva triangolare a tre diametri è uguale agli otto noni del cerchio iscritto nel triangolo equilatero equivalente a quello che ha per vertici i suoi tre punti di regresso.

Fig. 1.

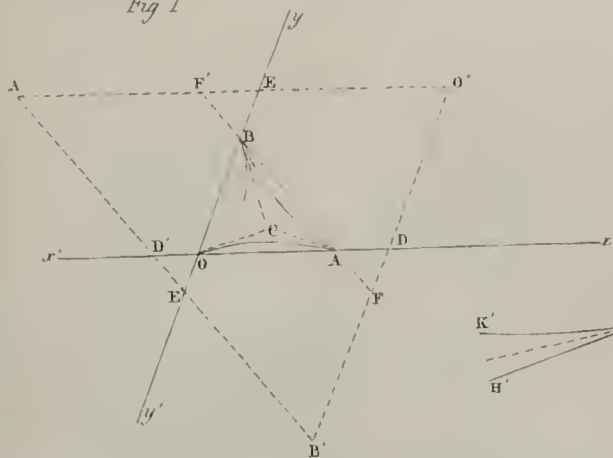


Fig. 2.

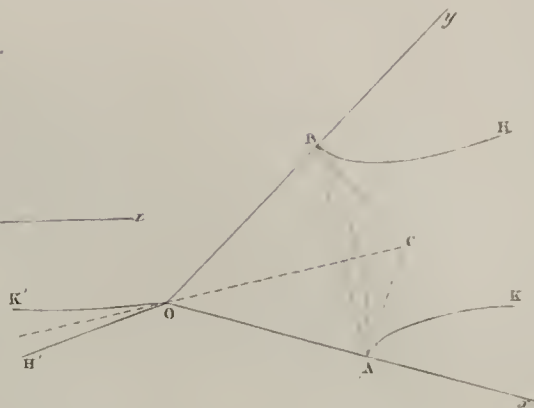


Fig. 3.

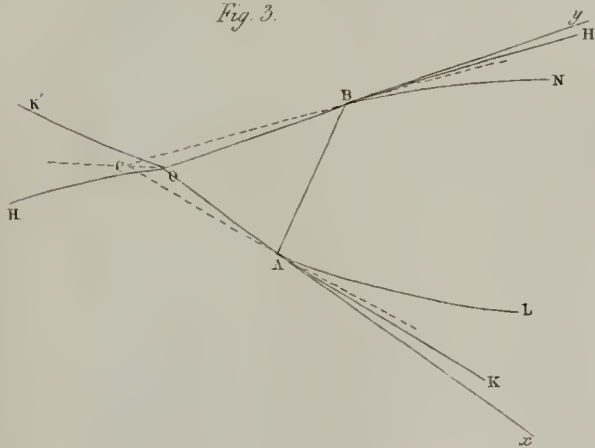


Fig. 4.

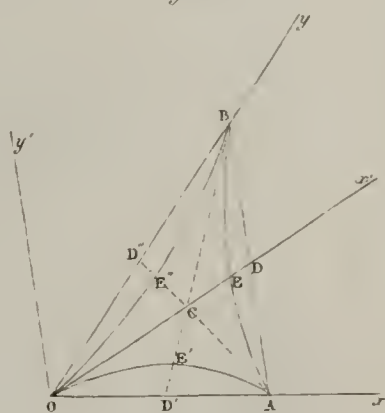
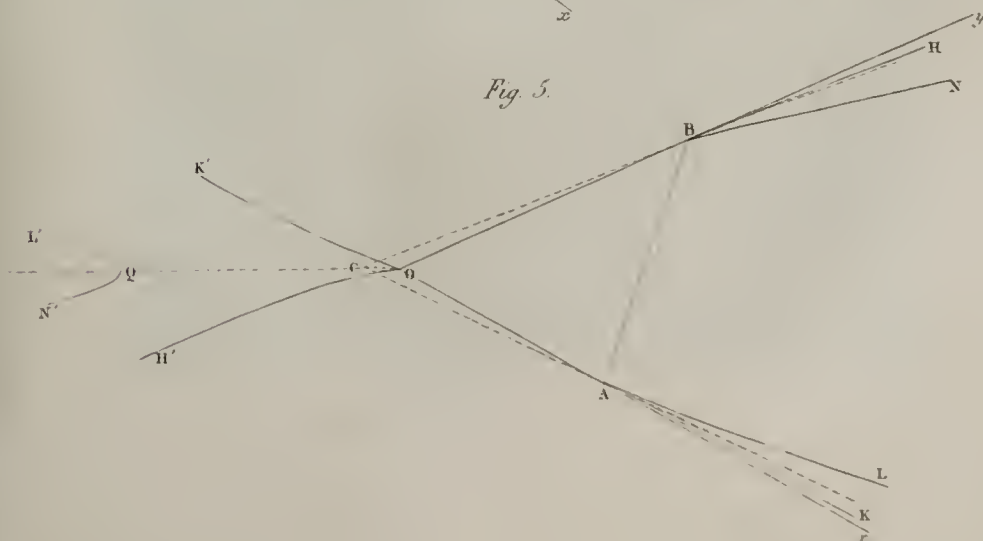


Fig. 5.



CONGETTURE

CIRCA

LA MINIMA SUPERFICIE CONTINUA

TERMINATA

DA UN QUADRILATERO STORTO

MEMORIA

DEL SOCIO ORDINARIO FRANCESCO PAOLO TUCCI

Nella mia Memoria sulla *quadratura delle porzioni di Paraboloide Iperbolica, terminate da quattro rette*, inserita nel VI volume degli Atti di questa Reale Accademia, feci abbastanza conoscere in fine del n. 1 che per mio avviso tali porzioni non erano le superficie di *minima grandezza* fra tutte quelle terminate dalle stesse quattro rette. Or nuove riflessioni posteriormente fatte circa la superficie che fosse realmente la minima fra tutte quelle così terminate, mi fanno al presente inclinare all'avviso contrario: cioè, che la medesima sia in verità una porzione della paraboloide iperbolica definita e confinata dalle quattro rette. Questa Memoria contiene tali riflessioni sotto il titolo di congetture, perchè non pretendo che valgano una dimostrazione rigorosa: se esse parranno soddisfacenti ai Geometri, avrò, comunque indirettamente, risoluto il problema; in contrario mi terrò assai pago se le medesime avranno per effetto, che altri più avventuroso di me faccia una volta conoscere qual sia

la genuina superficie continua di minima grandezza, circonscritta da un dato quadrilatero storto; e che cessi così lo scandalo, che non ostante l'altezza cui toccano al presente la Geometria e l'Analisi, non ancora si sappia qual sia la più piccola superficie terminata dal più semplice contorno rettilineo non piano.

Confesso volentieri la propensione che nudro pel mio avviso; nondimeno sarò docilissimo a resilire dal medesimo, solo che si adduca un esempio di superficie continua, che circonscritta da un assegnato quadrilatero storto, sia minore di quella che io inclino a credere la minima. Certo nessun geometra vorrà negare, che se la minima superficie così circonscritta non sia porzione della paraboloide iperbolica determinata dal quadrilatero, un'altra superficie sarà la minima, poichè di sua natura il problema ammette un minimo ed esclude il massimo; quindi ve ne avrà non una sola ma infinite più piccole di quella porzione, e per dirimere *a posteriori* se non direttamente la quistione, basterà tra le infinite additarne una di cui si possa calcolar la misura, per mostrar col fatto che sia più piccola della porzione di Paraboloide, misurata per le formole che si contengono nella citata Memoria.

1. Stando alla sola generazione rettilinea della superficie convessa di un cilindro retto, a prima giunta si è tentato di credere che questa superficie sia minore in grandezza di tutte le altre comprese tra le circonferenze delle sue basi; e ciò dal perchè senza uscire dalla superficie può andarsi dai punti di una circonferenza ai corrispondenti dell'altra per tante linee rette, che sono le più corte fra gli uni e gli altri punti, e seguono anche le vie più corte rispetto ai piani delle basi, cui sono perpendicolari. Ma con più riserva, riflettendo che infinite altre superficie, pur di rotazione come la cilindrica intorno all'asse di questa, possono aver per termini le stesse circonferenze; riflettendo che la superficie cilindrica à per misura il prodotto del lato per una delle circonferenze, e che pel noto teorema di Guldino, è misura di tutte quelle altre superficie il prodotto della curva generatrice AMA' (fig. 1) contenute al lato del cilindro, per la circonferenza descritta dal centro G di gravità di essa curva nella sua rotazione, si scorge bentosto la possibilità di ottenere una superficie minore della cilindrica, e terminata non pertanto dalle stesse circonferenze; poichè se con sostituire al lato

del cilindro una curva contermine e quindi più lunga di esso, viene a crescere un fattore del prodotto esprimente la misura della superficie, per opposto l'altro fattore, cioè la circonferenza descritta dal centro di gravità della curva può esser minore di quelle che limitano la superficie cilindrica; e così accade realmente quando la curva generatrice si suppone rivolgere la convessità all'asse di rotazione PQ , sapendosi dalla Meccanica che in tal caso il centro G di gravità della curva giace tra questa e la corda, ossia il lato del cilindro primitivo. Dietro queste indicazioni della Geometria e della Meccanica, cercando col Metodo delle Variazioni qual sia la curva contermine al lato del cilindro, la quale rotando intorno all'asse di questo produca la minima di tutte le superficie di rotazione, possibili ad esser comprese tra le circonferenze delle basi del cilindro, non trovasi la retta che produrrebbe la superficie cilindrica, ma sì bene una delle infinite catenarie che potrebbero passare per gli estremi del lato del cilindro, allorchè questo lato si supponesse orizzontale, e fosse verticale il piano condotto pel medesimo e per l'asse.

Per via di consimili osservazioni si spiega pure facilmente come avvenga che la superficie convessa di un tronco di cono retto non sia la minima fra tutte quelle che essendo di rotazione com'essa, potrebbero farsi passare per le circonferenze delle sue basi, non ostante che senza uscire dalla superficie si possa andare dai punti di una circonferenza ai corrispondenti dell'altra per linee rette; e trovasi minima col Metodo delle Variazioni la superficie generata pure da un arco di catenaria, contermine al lato del tronco (fig. 2).

2. Così va la cosa per le superficie convesse di un cilindro retto e di un tronco di cono retto, rapporto alle quali non recherà dunque meraviglia che non siano le minime fra tutte quelle che possono distendersi tra le circonferenze delle loro basi; se non che vuolsi notare che quelle due superficie ammettono una sola generazione o costruzione rettilinea, cui per fissar le idee potremmo dire nel senso della lunghezza: cioè quella costruzione o generazione che nasce dall'unire i punti di una circonferenza coi punti corrispondenti dell'altra. Ma se noi supponiamo che due rette AB , $A'B'$ (fig. 3) incapaci di esistere in un medesimo piano siano divise in uno stesso numero di parti eguali, e che i punti di divisione di una, A , m , n ,... B si uniscano coi punti

corrispondenti $A', m', n', \dots B'$ dell'altra per via di rette, avremo una superficie curva e *continua* quando il numero delle divisioni si fa infinito, ed è un teorema dei più belli che s'abbia la Geometria che questa superficie non differisca punto da quella che si avrebbe dividendo pure in uno stesso numero di parti eguali Ap, pr, rl, \dots e Bq, qs, su, \dots la prima e l'ultima delle anzidette congiungenti, e poscia unendo con linee rette i punti corrispondenti p e q , r ed s , l ed u, \dots Or in quest'unica superficie, compresa fra i lati di un quadrilatero storto $AA'B'B$, non solo nel senso AA' della lunghezza, ma in quello altresì della larghezza AB ci è dato poter andare per linee rette dai punti di un lato qualunque ai corrispondenti del lato opposto. Oltracciò, per effetto delle divisioni in parti eguali praticate ora in due lati opposti, ora nei due altri, dovendo trovarsi parallele ad un medesimo piano le prime congiungenti, e parallele ad un altro piano le seconde congiungenti, si scorge che nella superficie ordita o tessuta, per così dire, dalle une e dalle altre congiungenti rettilinee abbia luogo in un certo senso quel che rigorosamente si verifica nella linea retta: cioè che *giaccia egualmente fra i suoi estremi*, i quali sono i due lati opposti secondo la lunghezza, e i due altri opposti secondo la larghezza: il che intendiamo dire nel senso, che si può andare da un lato qualunque del quadrilatero all'opposto percorrendo tutta quant'è la superficie col movimento continuo di una retta di lunghezza variabile, ma posta sempre in un piano parallelo ad ambidue quei lati, e però non inclinato più all'uno che all'altro.

3. Ora per la coesistenza delle due esposte proprietà: la prima consistente nell'esser come tessuta la superficie da due serie di linee rette appoggiate le une alle altre, e disposte con legge di continuità le une secondo la lunghezza e le altre secondo la larghezza della superficie; e la seconda proprietà consistente nell'esser tutte parallele ad uno stesso piano le rette di una serie, e tutte parallele ad un altro piano le rette dell'altra serie: per la coesistenza, lo ripeto, di queste due proprietà mi sembra che fra tutte le possibili superficie continue e terminate da un medesimo quadrilatero storto, la minore in grandezza sia quella di cui si tratta, e che d'altronde sappiamo esser porzione della paraboloide iperbolica determinata dal quadrilatero. Ed in vero prendendo per generatrici della superficie che altri volesse minore dell'anzi-

detta le sezioni che vi produrrebbero gl'infiniti piani compresi tra i due lati opposti AA' , BB' (fig. 4) e paralleli ad amendue questi lati, tali sezioni sarebbero archi aventi per corde le sezioni mm' , nn' ,... prodotte dai medesimi piani nella paraboloide, e però sarebbero più lunghi di queste corde. Da questo sol fatto mi guarderei bene di concludere che la superficie della paraboloide fosse minore dell'altra, siccome la superficie convessa del cilindro tuttochè ordita da lati rettilinei non era minore di quella generata dalla catenaria di cui innanzi (u. 1) fu parabola. Ma nel caso attuale si verifica eziandio lo stesso fatto generando, o sivvero tessendo la superficie che vuolsi minore della paraboloide, con le sezioni che vi produrrebbero gl'infiniti piani compresi fra gli altri due lati opposti AB , $A'B'$ del quadrilatero, e paralleli ad ambidue questi lati, le quali sezioni debbono esser parimente archi aventi per corde le rette pq , rs ,... prodotte dai piani nella paraboloide. In sostanza si pongono qui a confronto due superficie curve, racchiuse in un medesimo contorno, e generate o per così dire costituite l'una da archi esistenti in piani tutti fra loro paralleli, l'altra dalle corde di questi archi; e ciò (giova pur ripeterlo) non solo nel senso della lunghezza, ma in quello altresì della larghezza. Per quanto dunque sia giusto il principio che non sempre la relazione della grandezza di due superficie secondi quella delle linee che ne sono le generatrici, nondimeno avendo senza dubbio la grandezza di ogni superficie una stretta dipendenza (quale che questa sia) dalle sue generatrici nel senso della lunghezza e in quello della larghezza, mi sembra verisimile che quando per due superficie contermini avviene che queste generatrici siano degli archi per l'una, e le corde di tali archi per l'altra, debba esser quest'ultima minore della prima (*).

(*) Non bisogna dissimulare che questa osservazione avrebbe vieppiù forza quando le due serie di generatrici che si pongono a confronto nelle due superficie fossero, in ciascuna di queste, perpendicolari quelle di una serie a quelle dell'altra: come avviene delle linee di massima e di minima curvatura; perchè allora i quadrilateri nascenti dalle intersezioni delle generatrici di una serie con quelle dell'altra avendo retti i loro angoli, possono riguardarsi come tanti rettangoli piani quando sono bastantemente piccoli, e quindi si misurano soltanto per le lunghezze dei loro lati, senza che sia d'uopo aver riguardo agli angoli compresi: riguardo dal quale non si può altrimenti prescindere quando si tratta di generatrici non perpendicolari le une alle altre.

4. Una difficoltà speciosa può intanto elevarsi contro quel che io credo verisimile, e nasce dal considerare che non una sola ma infinite esser possano le superficie curve terminate da un medesimo quadrilatero storto, e capaci non pertanto di venir generate o come ordinate da due serie di linee rette appoggiate le une alle altre; poichè da un teorema conosciuto si à che per uno stesso quadrilatero possano farsi passare infinite *iperboloidi ad una foglia*, che sono superficie nelle quali à luogo la detta proprietà (*); ma io osservo in risposta che nè le rette di una serie, nè quelle dell'altra son parallele ad un medesimo piano; quindi non potrebbe dirsi che tali superficie giacciono egualmente (nel senso innanzi dichiarato) fra le rette che ne sono gli estremi, nè per conseguenza la superficie potrebb'esser compiutamente percorsa, come la paraboloide, da una retta di grandezza variabile ma sita in un piano che parallelamente a sè stesso e con moto continuo si reca da un lato del quadrilatero all'opposto; e possiamo aggiungere che vi si reca per la minima distanza tra i due lati, alla quale il piano dee tenersi perpendicolare nel suo movimento per conservarsi parallelo ai medesimi (**).

(*) Se alcuno credesse di poter eludere tutte le difficoltà combinando insieme due superficie elicoidiche, una determinata da due lati opposti del quadrilatero, l'altra dai lati rimanenti, e prendendo di ciascuna le parti intercette ai lati che la determinano ed alla curva d'interseguazione delle due superficie, io gli farei osservare che per tal modo si avrebbe una superficie *discontinua*, e che in conseguenza si uscirebbe dalla quistione, la quale verte sulla *minima di tutte le superficie continue*, suscettibili di passare pel dato quadrilatero storto.

(**) A rendersi certo che possano esservi superficie minori della cilindrica o della conica e contermini a queste, non è punto necessario di uscire dalle superficie di 2° grado, e meno ancora di far capo dal Metodo delle Variazioni, al quale bisogna ricorrere quando si cerca qual sia propriamente la superficie minima.

Infatti dai punti di una delle due circonferenze stabilite come termini della superficie cilindrica o di cono tronco si può anche andare ai punti dell'altra per linee rette menate pel punto medio dell'asse nel caso della superficie cilindrica, o nel caso del cono tronco pel punto che ne divide l'asse in parti proporzionali ai raggi delle basi. Per tal modo si vengono a distendere in ambi i casi le due foglie di una superficie continua di cono retto. Or per le note misure di queste superficie facilmente si scorge, che quella del cilindro o del cono tronco possa riescir eguale ed anche minore della contermina superficie conica a due foglie, non ostante che tutte le sezioni praticate nelle due superficie da piani paralleli alle basi producano, sia nel cilindro sia nel tronco di cono, circonferenze maggiori di quelle che i piani stessi producono nella superficie conica a due foglie.

5. Possiamo anche aggiungere che la maniera di dimostrazione tenuta nel n. precedente, applicata all'iperboloide non perde nulla della sua forza; e da ultimo possiamo osservare che appunto perchè le dette iperboloidi sono infinite di numero, e possono variare con legge di continuità, torna possibile che una di esse abbia fra tutte la minima grandezza, e che ciò si verifichi in quella che da iperboloide si volta in paraboloide, essendo noto che quest'ultima sia un caso particolare ed il più semplice della prima. Supponendo per esempio che l'altro dato o *determinante* della iperboloide condizionata a passare pel quadrilatero storto $AA'B'B$ (fig. 5) sia il rapporto ω delle frazioni $\frac{Am}{Bm}$ ed

$\frac{A'm'}{B'm'}$ (chè pur quello delle altre $\frac{Ap}{A'p}$ e $\frac{Bq}{B'q}$), i cui termini sono le parti

in che ogni generatrice mm' divide due lati opposti, la superficie curva circoscritta dal quadrilatero sarà un trascendente determinato di ω , secondo me non inferiore agli ellittici. Or non sarebbe punto maraviglia che la iperboloide di cui la superficie rinchiusa nel quadrilatero è minima per rapporto a tutte l'altre iperboloidi fosse quella per la quale ω pareggia l'unità, che è il rapporto più semplice delle mentovate frazioni; ed allora la superficie minima non sarebbe più una delle iperboloidi, ma sì bene l'unica paraboloide che può passare pel quadrilatero, e che sola gode la proprietà che le generatrici rettilinee di ciascuna serie son parallele ad un medesimo piano. Dunque, se per effetto di tal proprietà, combinata con quella della doppia generazione rettilinea comune a tutte le iperboloidi, si conceda che la paraboloide sia minore delle iperboloidi, con più ragione sembra verisimile (in forza

V'à pure altri modi (e questi in numero infiniti) di condurre od appoggiare linee rette alle circonferenze estreme di una superficie cilindrica, non facendole essere nè parallele nè concorrenti in un medesimo punto, ma ugualmente lontane ed insieme ugualmente inclinate all'asse. Da quest'altra maniera di generazione emergono tante iperboloidi di rotazione ad una foglia, le cui superficie possono esser maggiori della cilindrica, sebbene in questa le circonferenze delle sezioni perpendicolari all'asse sieno tutte più lunghe che non sono in tali iperboloidi; ma vuolsi notare che in quest'ultima le nominate rette sono al contrario più lunghe del lato della superficie cilindrica.

Simili osservazioni possono farsi circa la superficie convessa del tronco di un cono retto, e le zone delle iperboloidi ad una foglia intercette alle circonferenze delle sue basi.

delle considerazioni precedenti) che sia minore di tutte quelle superficie che non comportano se non una sola, o nessuna generazione rettilinea.

6. Molto più grave però sembra essere un'altra obbiezione, che può elevarsi contro l'avviso per me verisimile; e nasce da che per l'equazione della paraboloide non rimane soddisfatta l'equazione a *derivate parziali* di 2.^o ordine che il Metodo delle Variazioni somministra per la minima di tutte le possibili superficie terminate da un medesimo contorno di doppia curvatura. Pure in risposta mi sembra potersi osservare che la *primitiva completa* o *generale* di detta equazione alle derivate di 2.^o ordine, non comportando per la teorica di tali primitive più di due funzioni arbitrarie, queste funzioni sebbene ammettano un numero indefinito di costanti, potrebbero non esser determinabili in modo che la superficie passasse per quattro rette *distinte*; e potrebbe altrimenti sembrar verisimile che volendo circoscritta la minima superficie da n linee *distinte* o *indipendenti fra loro nella forma e nella posizione*, l'equazione a derivate parziali di essa dovesse essere dell'ordine n , per così ammettere nella sua primitiva completa altrettante funzioni arbitrarie. Da questa osservazione io non intendo inferire che il carattere analitico delle superficie di minima grandezza stabilito col Metodo delle Variazioni sia falso, ma solo che potrebbe non essere essenziale o vero indispensabile per la esistenza del minimo, del pari che non è indispensabile pel minimo o pel massimo di una funzione di una variabile la condizione che la derivata di 1.^o ordine di questa funzione sia nullo, potendo aver luogo uno di quei minimi o massimi che diconsi *straordinari* o *singolari*. Del resto, se per la minima superficie due limiti della quale son due rette assegnate e non poste in un medesimo piano, il Metodo delle Variazioni conduce ad una *Elicoide storta a piano direttore*, ch'è una superficie capace di esser generata da rette parallele al piano stesso cui son parallele le due assegnate, dee sembrare ben soddisfacente che le precedenti considerazioni geometriche (se non il Calcolo delle Variazioni) accennino ad una porzione di paraboloide iperbolica, quando la superficie minima vuolsi continua e terminata da due rette nel senso della lunghezza, e da due altre in quello della larghezza, avvegnachè la paraboloide determinata da queste quattro rette sia pure una superficie suscettibile di esser generata, da due

serie di rette, quelle secondo la lunghezza parallele ad uno stesso piano coi limiti assegnati per lungo, e quelle secondo la larghezza parallele similmente ad uno stesso piano coi limiti assegnati per largo (*).

7. Vieppiù soddisfacente parmi essere il fatto che a simiglianza della paraboloide iperbolica, la superficie elicoidica a piano direttore, condizionata a passare per due rette date sia la più semplice di tutte le superficie che possono generarsi da una delle rette, la quale con movimento continuo debba trasportarsi a combaciare coll'altra.

Infatti, la posizione di due rette indefinite e incapaci di esistere in uno stesso piano, dipende da due sole quantità, che sono la loro distanza rappresentata dalla perpendicolare ad ambedue, e l'angolo compreso da esse, o più veramente da due parallele ad esse per un medesimo punto. Ora il movimento cui dovrebbe seguire una delle rette per recarsi a coincidere coll'altra, non saprebbe concepirsi più semplice che quando quella distanza (misurata sempre nella perpendicolare comune) e quell'angolo diminuissero nel medesimo rapporto, come accade nelle coordinate della linea retta che tra le linee contermini è la minima; e appunto in questo modo viensi a generare la superficie dell'elicoide a piano direttore, la quale perciò non racchiude che due sole costanti nella sua equazione: una retta cioè ed un angolo. Infatti, chiamando rispettivamente c e γ queste due grandezze, contando le z sulla perpendicolare comune (fig. 6), le x sopra una delle rette, e le y sulla perpendicolare a questi assi delle z e delle x dal loro incontro, l'equazioni della generatrice saranno della forma

(*) Merita particolar riguardo la condizione del parallelismo dei piani relativi a ciascuna serie di generatrici; poichè prescindendo da essa non sarebbe difficile additare due superficie per le quali sarebbero adempiute l'altre condizioni anzidette senza nondimeno verificarsi ciò che io credo verisimile. E son tali per esempio la superficie convessa di un cilindro retto, e quella di una delle iperboloide ad una foglia, mentovate nella nota al n.º 4, e che possono farsi passare per le circonferenze delle basi del cilindro. Infatti, per un teorema conosciuto si possono prendere per generatrici dell'iperboloide due serie di rette che s'intersecano a vicenda; e nulla impedisce di prendere per generatrici della superficie cilindrica le due serie di elicte contermini a tali rette. Or in questo modo le rette generatrici della superficie dell'iperboloide son minori dell'elicte generatrici della superficie cilindrica, e ciò non ostante per la nota quadratura delle due superficie la prima si ravvisa minore della seconda, in opposizione a quello che io credo verisimile quando le generatrici di ciascuna specie esistono in piani tra lor paralleli.

$$y = mx, z = n,$$

dove m ed n variano da una sua posizione ad un'altra. Dunque l'angolo compreso da una generatrice qualunque con l'asse delle x o vero colla sua posizione primitiva avrà per tangente trigonometrica $m = \frac{y}{x}$; e quindi l'equazione della superficie descritta coll'indicato movimento verrà fornita dalla proporzione

$$c : z :: \gamma : \text{arc tan } \frac{y}{x}$$

e in conseguenza sarà

$$z = \frac{c}{\gamma} \text{arc tan } \frac{y}{x} :$$

conforme di qui a poco troveremo mediante la considerazione dell'elica.

8. Ancora l'indole stessa della superficie che si vuol minima fra tutte le possibili circoscritte da uno stesso contorno storto, esige che tal superficie intersegata come più si vuole da un piano non dia veruna linea che torni in se stessa, chè altrimenti la minima superficie racchiusa da cotale linea sarebbe evidentemente quella che fa parte del piano secante, anzi che della superficie curva. E bene: siccome l'elicoide a piano direttore fornita dal Calcolo delle Variazioni, così la paraboloide iperbolica fornita dalle precedenti considerazioni geometriche non ammette sezioni piane che tornino in loro stesse, a differenza della iperboloide ad una foglia, che quantunque suscettibile (come la paraboloide e l'elicoide) di generazione rettilinea, ammette nondimeno sezioni ellittiche e circolari.

9. In appoggio ancora della opinione che io credo verisimile osservo che una parte AA'B'B (fig. 7) di elicoide a piano direttore, che fosse terminata in un senso da due generatrici rettilinee AA', BB' intercelte a due cilindri aventi per asse comune OZ quello dell'elicoide (e su cui giace la minima distanza delle generatrici), e nell'altro senso dagli archi AB, A'B' dell'eliche le quali passano per gli estremi di tali generatrici, questa parte ripeto di elicoide, riconosciuta da tutti i geometri per la minima superficie terminata dal contorno mistilineo ABB'A', si può riguardare composta da una moltitudine di porzioni di paraboloidi iperboliche unite con raccordo tra esse. Infatti se nell'elica A'B' esistente sul cilindro di raggio minore r si consideri una particel-

la $A'a'$ che possa stimarsi rettilinea, potrà stimarsi tale anche la particella Aa che le corrisponde sull'elica AB esistente sul cilindro di raggio maggiore R , perchè se da un canto ne cresce la lunghezza ne diminuisce dall'altro la curvatura. Or tutte le particelle corrispondenti dell'eliche intermedie essendo rettilinee per la stessa ragione, ed essendo inoltre appoggiate per modo alle generatrici estreme aa' , AA' , che le loro proiezioni sul piano delle basi dei cilindri tornano parallele (perchè indicate da piccolissimi archi simili di cerchi concentrici) giaceranno esse in piani paralleli, e quindi costituiranno una parte di paraboloide, terminata da un quadrilatero storto. Adunque la porzione primitiva di elicoide potendosi riguardare come una somma di porzioni di paraboloidi, terminate ciascuna da un quadrilatero storto, è ben necessario lo ammettere che ognuna di queste porzioni abbia la minima grandezza fra tutte quelle che avrebbero il medesimo contorno rispettivo, acciò la loro somma risultasse, qual'è di fatto, la minima possibile.

10. Finalmente osserveremo che anche l'Analisi viene in conferma di quest'ultime deduzioni geometriche, tendenti a provare che una parte piccolissima di elicoide a piano direttore, terminata da due generatrici rettilinee e dagl'interposti archi di due eliche, possa riguardarsi come una parte di paraboloide, terminata da quattro rette: e lo vedremo considerando separatamente la superficie $ACea$ nella figura 8.

Infatti, prendendo per assi coordinati e rettangolari delle x , delle y e delle z il raggio del cilindro su cui è descritta l'elica direttrice della elicoide, condotto per la origine di quest'elica, l'altro che gli è perpendicolare nel piano della base, e l'asse del cilindro; inoltre chiamando r il detto raggio, ed α il rapporto costante delle altezze dei punti dell'elica sulla base ai corrispondenti archi di questa base contati dalla origine dell'elica, le equazioni di questa curva saranno

$$z = \alpha r \operatorname{Arc.} \cos \frac{x}{r}, \quad z = \alpha r \operatorname{Arc.} \sin \frac{y}{r},$$

o che torna lo stesso

$$x = r \cos \frac{z}{\alpha}, \quad y = r \sin \frac{z}{\alpha}. \quad (D)$$

D'altra parte la generatrice dell'elicoide dovendo sempre appoggiarsi

all'asse del cilindro ossia delle z , ed esser parallela alla base del medesimo, le di lei equazioni dovranno aver le forme

$$y=mx, z=n; \quad (G)$$

ma le indeterminate m ed n che variano con la sua posizione avranno tra esse una relazione derivante da che la generatrice dee incontrar pure l'anzidetta elica direttrice. Ad ottenere questa relazione, osservando che nel punto d'incontro le coordinate hanno i medesimi valori rispettivi, basta dividere la seconda dell'equazioni (D) per la prima, e nel risultato sostituire m ad $\frac{y}{x}$, ed n a z in virtù dell'equazioni (G). Per tal modo la cercata relazione tra m ed n trovasi essere

$$m=\tan \frac{n}{\alpha r},$$

cosicchè la generatrice potrebbe anche esprimersi coll'equazioni

$$y=\tan \frac{n}{\alpha r} \cdot x, z=n,$$

e sotto questa forma per ogni valore di n si avrebbe una retta che adempie a tutte le condizioni richieste dalla generazione dell'elicoide a piano direttore. Dunque eliminando tra quest'ultime equazioni la n , che varia colle singole generatrici, il risultato

$$y=\tan \frac{z}{\alpha r} \cdot x, \text{ ovvero } z=\alpha r \operatorname{Arc} \tan \frac{y}{x}, \quad (E)$$

apparterrà al sistema di tutte le generatrici, val dire alla superficie dell'elicoide.

Ciò posto, quando per la piccolezza dell'arco Aa , preso a considerare nell'elica direttrice, le y di tutti i suoi punti son piccolissime rispetto alle x corrispondenti, si rende lecito sostituire $\frac{y}{x}$ ad $\operatorname{arc} \tan \frac{y}{x}$, in virtù della nota formula

$$\operatorname{Arc} a=\tan a-\frac{1}{3} \tan ^3 a+\frac{1}{5} \tan ^5 a-\text { ec.}$$

ed allora l'equazione (E) voltandosi nell'altra

$$\frac{z}{\alpha r}=\frac{y}{x}, \text{ ovvero } y=\frac{xz}{\alpha r},$$

si scorge che rappresenta una paraboloide iperbolica.

Fig 1

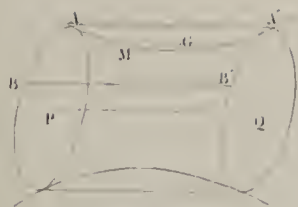


Fig 2

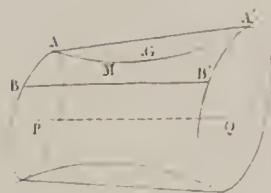


Fig 3

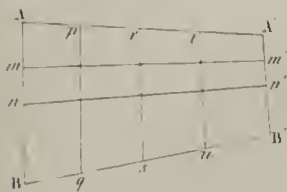


Fig 4

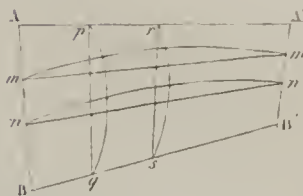


Fig 5

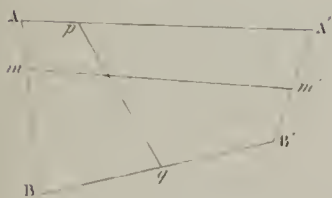


Fig 6

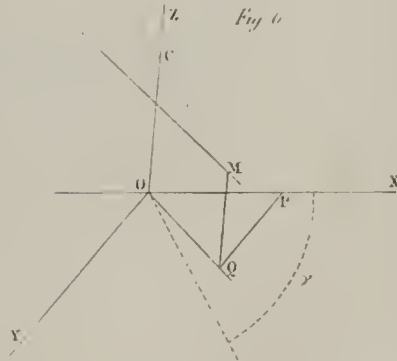


Fig 7

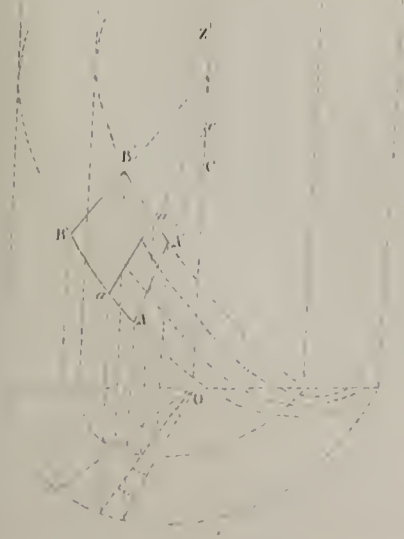
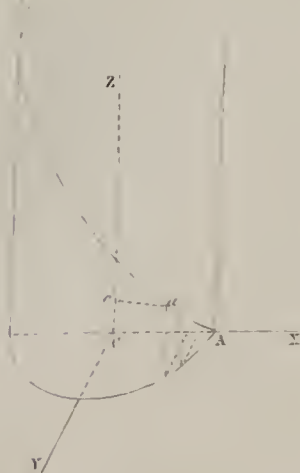


Fig 8



MEMORIE MATEMATICHE

PRESENTATE

DA' SOCI ALL' ACCADEMIA NELL' ANNO 1853

E DA ESSA APPROVATE.

RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA IMMEDIATA
DELL'EQUAZIONE FONDAMENTALE
NELLA TEORICA DELLE FUNZIONI ELLITTICHE
CON DIVERSE APPLICAZIONI
MEMORIA
DEL SOCIO ORDINARIO PROFESSOR TRUDI

§. 1.

Si sa che l'equazione differenziale

$$\frac{du}{\sqrt{(\alpha u^4 + \beta u^3 + \delta u^2 + \gamma u + \epsilon)}} = \frac{du_i}{\sqrt{(\alpha u_i^4 + \beta u_i^3 + \gamma u_i^2 + \delta u_i + \epsilon)}}$$

ammette un integrale algebrico, non ostante che i due membri non siano separatamente integrabili nè per archi di cerchi, nè per logaritmi; e sono appunto gl'integrali di tal fatta che han dato origine alle trascendenti conosciute sotto la denominazione di *funzioni ellittiche*, studiate pria di tutti dall'immortale *Eulero*, e poi condotte a tanta altezza da *Legendre*, *Abel*, e *Jacobi*.

L'oggetto precipuo delle attuali ricerche si è quello di dare della soprascritta equazione una rappresentazione geometrica *immediata*, indi-

pendente cioè dalla trasformazione dei differenziali, che ne costituiscono i due membri, in differenziali della forma

$$\frac{d\phi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}} :$$

trasformazione essenzialmente richiesta nelle due rappresentazioni che finora se ne conoscono; l'una mediante il triangolo sferico, dovuta a Lagrange, l'altra mediante un sistema di due cerchi, dovuta a Jacobi. La rappresentazione che noi daremo essendo effettuata mercè il sistema di due sezioni coniche, compie un desiderio espresso dal grande analista di Königsberg, il quale così conchiude la sua memoria (*) relativa a questo argomento « *Es dürfte nicht ohne Interesse für die Theorie der elliptischen Functionen sein ähnliche Betrachtungen unmittelbar für das System zweier Kegelschnitte anzustellen* » (non sarebbe senza interesse per la teoria delle funzioni ellittiche di estendere *immediatamente* simili considerazioni al sistema di due sezioni coniche): ed aggiugne che forse sarebbe tornato in altra occasione su questo argomento; ma nulla più trovasi pubblicato di lui su tal soggetto (**).

Le ricerche di cui ci occupiamo menano a risolvere per via di costruzioni geometriche i problemi della moltiplicazione ed addizione delle trascendenti della forma

$$\int \frac{du}{\sqrt{\downarrow(u)}};$$

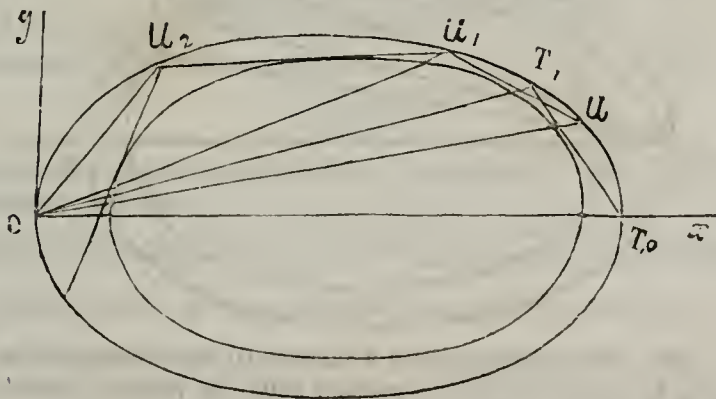
la funzione \downarrow dinotando un polinomio di 4° grado; ed è però che brevemente ci fermeremo a siffatte quistioni. Ma le stesse ricerche conducono ancora naturalmente ai bellissimi teoremi del Poncelet sui poligoni variabili iscritti e circoscritti a due sezioni coniche: teoremi che fino a questo punto sembrano di essere rimasti ribelli ai metodi algebrici; non essendo a nostra no-

(*) Memoria inserita nel 3.° vol. del giornale di Crelle a pag. 376, avente per titolo « *Ueber die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der elementar Geometrie* »

(**) Nel 1845 questo dotto straniero si recò tra noi; ed in quel rincontro fui dallo stesso assicurato ch'ei niente altro avesse aggiunto al suo citato lavoro.

tizia alcuna deduzione analitica di questi teoremi (*); de' quali sembra altresì che non si abbiano dirette dimostrazioni; imperciocchè quelle dell'illustre inventore sono fondate sul metodo di proiezione, e sulla legge di continuità.

Alle applicazioni delle nostre formole aggiungiamo in fine la quistione assai difficile della ricerca della relazione che deve sussistere fra i determinati di due sezioni coniche affinchè un poligono di numero assegnato di lati possa essere ad un tempo iscritto nell'una e circoscritto all'altra; e questo problema sarà risoluto nella sua massima generalità. Nè fia superfluo di avvertire che i mentovati teoremi del Poncelet sono di niun soccorso in siffatta quistione; e per vederne tutta la difficoltà basta leggerne la storia che pel caso particolare di due cerchi ne fa lo stesso Iacobi nella memoria poc' anzi citata.



(*) Nell'atto della stampa della presente memoria sento per la prima volta che di tale argomento siasi non ha guari occupato l'insigne geometra inglese sig. Cayley, e che le sue ricerche siano inserite nel *Philosophical Magazine*. Questa notizia mi è data dall'illustre analista sig. Sylvester, concittadino ed amico del Cayley, venuto per pochi giorni a dimorar tra noi nello scorso mese di febbrajo; ma finora non mi è stato possibile di avere la soddisfazione di riscontrare il lavoro del sig. Cayley; poichè il *Philosophical Magazine* non trovasi al corrente nella nostra Reale Biblioteca.

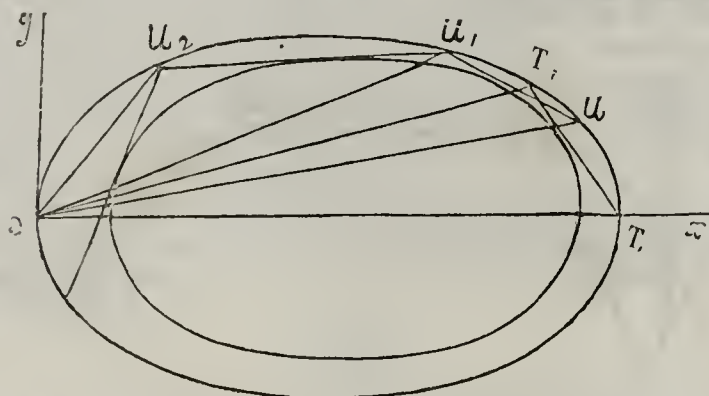
§. II.

TEOREMA 1.°

Date due coniche (S), (S') si tiri nell'una una corda qualunque U_1U_2 tangente dell'altra, e da un suo vertice O si menino ai suoi estremi le rette OU ed OU_1 ; dinotando con u ed u_1 le tangenti degli angoli UOx ed U_1Ox , si avrà tra esse una relazione della forma

$$(1) \quad Au^2u^2 + 2B(u + u_1)uu_1 + C(u + u_1) + 2D(u + u_1) + 2Euu_1 + F = 0$$

dove A, B, C, D, E, F sono costanti dipendenti dai determinanti delle due coniche



Dim. Preso per asse delle x il diametro OT della conica (S) e per asse delle y la tangente in O , le equazioni delle due coniche saranno delle forme

$$y^2 = 2rx + mx^2 \quad \dots \quad (S)$$

$$ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + f = 0 \quad \dots \quad (S')$$

Inoltre ritenuti i simboli x ed y per esprimere le coordinate del punto U , dinoteremo con x_1 ed y_1 quelle del punto U_1 ; quindi sarà

$$\frac{y}{x} = u \quad , \quad \frac{y_1}{x_1} = u_1 \quad ;$$

donde

$$y = ux \quad , \quad y_1 = u_1x_1 \quad .$$

e poichè si ha

$$y^2 = 2rx + mx^2, \quad y_1^2 = 2rx_1 + mx_1^2,$$

risulta

$$(2) \quad \begin{cases} x = \frac{2r}{u^2 - m}, & x_1 = \frac{2r}{u_1^2 - m}, \\ y = \frac{2ru}{u^2 - m}, & y_1 = \frac{2ru_1}{u_1^2 - m}. \end{cases}$$

Intanto si dinotino con X, Y le coordinate correnti della corda UU₁; la sua equazione sarà dapprima

$$(Y - y)(x - x_1) = (X - x)(y - y_1);$$

ma poscia pe' valori di poc' anzi diverrà con facili trasformazioni

$$(u + u_1)Y = (uu_1 + m)X + 2r.$$

Ciò premesso, se una retta qualunque

$$Y = pX + q$$

si assoggetti a toccare la conica (S'), tra i determinanti di queste due linee, sussisterà la relazione

$$(d^2 - af)p^2 + 2(de - bf)p + (e^2 - ef) + 2(ac - bd)pq + (b^2 - ae)q^2 + 2(be - ed)q = 0;$$

ma, supponendo che la retta attuale sia la corda UU₁, siccome si ha

$$p = \frac{uu_1 + m}{u + u_1}, \quad q = \frac{2r}{u + u_1},$$

sostituendo questi valori nella relazione, e messo per compendio

$$(3) \quad \begin{cases} A = d^2 - af & , & D = m(de - bf) + 2r(be - ed) \\ B = de - bf & : & E = m(d^2 - af) + 2r(ac - bd) \\ C = e^2 - ef & , & F = m^2(d^2 - af) + 4mr(ac - bd) + 4r^2(b^2 - ae). \end{cases}$$

la istessa diverrà

$$A u^2 u_1^2 + 2B(u + u_1)uu_1 + C(u + u_1)^2 + 2D(u + u_1) + 2Euu_1 + F = 0$$

come erasi proposto a dimostrare.

OSSERVAZIONE 1.^a

Gioverà notare che, invece di congiungere i punti U ed U_1 con uno dei vertici della conica (S) , avrebbero potuto congiungersi con qualunque altro punto del perimetro della stessa conica; e le formole cui perverrebbe si sarebbero le medesime. Se non che abbiamo prescelto un vertice della curva a solo oggetto di tenere un sistema di assi coordinati ortogonali; e così esprimere i risultamenti in modo più semplice. Per tal modo in fatti avviene che il simbolo u dinota la tangente dell'angolo UOx compreso dalla retta OU con l'asse delle x ; ma prendendo un altro punto della conica (S) diverso da un vertice, allora la u esprimerebbe invece il rapporto dei seni degli angoli UOx ed UOy compresi dalla retta OU con gli assi delle x e delle y rispettivamente.

Ma ad ogni modo, qualunque sia il sistema di assi, siccome supponendo dato il rapporto u , ne conseguita nella conica (S) il punto U , perchè determinato dalla equazione

$$Y = uX,$$

così noi diremo che questo rapporto u è l'*elemento* del punto U ; ed intanto risulta dalla precedente dimostrazione, che se u ed u_1 dinotino gli elementi di due punti qualunque della conica (S) , la corda che li congiunge sarà rappresentata dall'equazione

$$(u + u_1)Y = (uu_1 + m)X + 2r;$$

equazione assai rimarchevole non solo per la sua simmetria, ma anche perchè i quattro ordinarii elementi dei due punti, cioè le due coppie di coordinate x, y ed x_1, y_1 vi si trovano ridotti ai soli due elementi u ed u_1 .

Abbiamo già mostrato in altre occasioni l'importanza di questa equazione in ricerche riguardanti le curve del 2.^o ordine.

OSSERVAZIONE 2.^a

Se l'equazione della conica (S) abbia la forma

$$ay^2 + cx^2 + 2cx + f = 0,$$

avendosi $b=0$, $d=0$, sarà pure $B=0$, $D=0$, e la relazione (1) si riduce ad

$$Au^2u_i^2 + C(u + u_i)^2 + 2Eu u_i + F = 0$$

dove si ha

$$\begin{aligned} A &= -af, & E &= a(2re - mf), \\ C &= e^2 - ef, & F &= a(4mre - 4r^2c - m^2f). \end{aligned}$$

Quest'ultima forma avrà quindi la relazione in parola ove le due coniche date siano cerchi entrambe: in questa ipotesi, se dinotiamo con p l'ascissa del centro del cerchio (S'), e con r' il raggio, siccome le equazioni dei due cerchi sono in tal caso

$$\begin{aligned} y^2 &= 2rx - x^2, \\ y^2 + (x - p)^2 &= r_i^2, \end{aligned}$$

risulta

$$m = -1, \quad a = c = 1, \quad e = -p, \quad f = p^2 - r_i^2;$$

e conseguentemente si avrà

$$A = r_i^2 - p^2, \quad C = r_i^2, \quad E = -[r_i^2 + p(2r - p)], \quad F = r_i^2 - (2r - p)^2.$$

Si possono queste espressioni rendere alquanto più semplici, osservando che $2r - p$ indica la distanza tra il centro del cerchio (S') e l'altro vertice del diametro del cerchio (S), che passa pei centri di entrambi, e ch'è opposto all'origine. Laonde, indicando questa distanza con q , vale a dire ponendo

$$2r - p = q, \quad (*)$$

si avrà pel caso di due cerchi

$$A = r_i^2 - p^2, \quad C = r_i^2, \quad E = -(r_i^2 + pq), \quad F = (r_i^2 - q^2)$$

(*) È chiaro che in queste formole è lecito di supporre, che p ascissa del centro del cerchio (S') sia essenzialmente positiva. In quanto poi a q , siccome questo segmento equivale a $2r - p$, sarà desso positivo, o negativo, secondochè sia $2r$ maggiore o minore di p ; vale a dire dovrà il segmento q riguardarsi come positivo quando il centro del cerchio (S') è interno al cerchio (S); e come negativo nel caso opposto.

TEOREMA 2.°

(INVERSO DEL PRECEDENTE).

Data tra le variabili u ed u_1 una relazione della forma

$$(4) \quad Au^2u_1^2 + 2B(u + u_1)uu_1 + C(u + u_1)^2 + 2D(u + u_1) + 2Euu_1 + F = 0,$$

ed una conica

$$y^2 = 2rx + mx^2, \quad (S)$$

può sempre descriversi un'altra conica (S'), ed una soltanto, in guisa che condotta nella prima una corda qualunque che tocchi la conica (S), e si congiungano le sue estremità con l'origine, le tangenti trigonometriche de' due angoli che le congiungenti formano con l'asse delle x , determinino un sistema di valori delle variabili u ed u_1 atti a soddisfare alla proposta relazione.

Dim. In fatti, se esiste questa conica (S'), la sua equazione avrà la forma

$$ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + f = 0$$

ed allora dette u ed u_1 le tangenti degli angoli UOx ed U_1Ox , dovrà pel teorema precedente sussistere tra esse una relazione uniforme alla data, per la quale i coefficienti sono espressi dalle formole (3). Quindi la quistione si riduce ad identificare i primi membri dell'una e dell'altra relazione, e così dedurre i valori delle costanti incognite a, b, c, d, e, f . Or questa identificazione dà luogo alle seguenti cinque equazioni di condizione

$$\begin{aligned} \frac{dc - bf}{d^2 - af} &= \frac{B}{A}, & \frac{m(d^2 - af) + 2r(ac - bd)}{d^2 - af} &= \frac{E}{A}, \\ \frac{c^2 - cf}{d^2 - af} &= \frac{C}{A}, & \frac{m^2(d^2 - af) + 4mr(ac - bd) + 4r^2(b^2 - ac)}{d^2 - af} &= \frac{F}{A}, \\ \frac{m(dc - bf) + 2r(bc - cd)}{d^2 - af} &= \frac{D}{A}. \end{aligned}$$

le quali determinano i valori di cinque dei coefficienti incogniti $a, b, c,$

d, e, f ; rimanendone uno indeterminato. Da queste equazioni si ricavano per tanto le seguenti espressioni di 1.^o grado

$$b = \frac{(BF - DE) + m(AD - BE)}{AF - E^2} a$$

$$c = \frac{(CF - D^2) + 2m(BD - CE) + m^2(AC - B^2)}{AF - E^2} a$$

$$d = 2r \frac{AD - BE}{AF - E^2} a$$

$$e = 2r \frac{(BD - CE) + m(AC - B^2)}{AF - E^2} a$$

$$f = 4r^2 \frac{AC - B^2}{AF - E^2} a$$

perciò la conica (S') è unica ed esiste in ogni caso. Supponendo $a = AF - E^2$, com'è permesso per la indeterminazione di a , i coefficienti della ipotetica equazione della conica (S') saranno da ultimo espressi da

$$(5) \begin{cases} a = AF - E^2, & d = 2r(AD - BE) \\ b = (BF - DE) + m(AD - BE), & e = 2r[(BD - CE) + m(AC - B^2)] \\ c = (CF - D^2) + 2m(BD - CE) + m^2(AC - B^2), & f = 4r^2(AC - B^2). \end{cases}$$

e conseguentemente l'equazione di questa conica sarà

$$(6) \quad \begin{cases} (AF - E^2)y^2 + 2[(BF - DE) + m(AD - BE)]xy \\ + [(CF - D^2) + 2m(BD - CE) + m^2(AC - B^2)]x^2 \\ + 4r(AD - BE)y + 4r[(BD - CE) + m(AC - B^2)]x \\ + 4r^2(AC - B^2) \end{cases} = 0 \quad (S')$$

COROLLARIO.

È chiaro che la conica (S') è l'involuppo di tutte le corde della conica (S), i di cui elementi u ed u_1 verificano la data relazione (4).

*

TEOREMA 3.°

Date due coniche (S) ed (S'), se nell'una si conduca qualunque corda UU_1 tangente dell'altra, e si dinotino con u ed u_1 le tangenti degli angoli UOx , U_1Ox compresi da un asse Ox della prima con le rette OU ed OU_1 menate da un suo vertice O ai punti U ed U_1 , tra i differenziali du e du_1 di queste tangenti sussisterà una relazione della forma

$$\frac{du}{\sqrt{\alpha u^4 + \beta u^3 + \gamma u^2 + \delta u + \varepsilon}} = \pm \frac{du_1}{\sqrt{\alpha u_1^4 + \beta u_1^3 + \gamma u_1^2 + \delta u_1 + \varepsilon}}$$

in cui $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sono costanti dipendenti unicamente da determinanti delle due coniche.

Dim. Ritenendo per le due coniche le consuete equazioni, tra u ed u_1 sussisterà la relazione (4)

$$Au^2u_1^2 + 2B(u+u_1)uu_1 + C(u+u_1)^2 + 2D(u+u_1) + 2Euu_1 + F = 0$$

la quale differenziata, e poi quadrata in due membri porge, dopo aver messo per compendio $C + E = G$,

$$(7) \quad \frac{du^2}{[(Au_1^2 + 2Bu_1 + C)u + Bu_1^2 + Gu + D]^2} = \frac{du_1^2}{[(Au^2 + 2Bu + C)u_1 + Bu^2 + Gu + D]^2}.$$

Intanto la relazione (4) si ordini come per risolverla una volta rispetto ad u_1 ed una volta rispetto ad u ; e, passando in ciascuno dei risultamenti l'ultimo termine al secondo membro, si renda il primo quadrato perfetto. Per tal modo messo per brevità

$$(8) \quad \begin{cases} (Bu^2 + Gu + D)^2 - (Cu^2 + 2Du + F)(Au^2 + 2Bu + C) = \downarrow(u) \\ (Bu_1^2 + Gu_1 + D)^2 - (Cu_1^2 + 2Du_1 + F)(Au_1^2 + 2Bu_1 + C) = \downarrow(u_1) \end{cases}$$

la (4) prenderà le due forme

$$\begin{aligned} [(Au_1^2 + 2Bu_1 + C)u + Bu_1^2 + Gu + D]^2 &= \downarrow(u) \\ [(Au^2 + 2Bu + C)u_1 + Bu^2 + Gu + D]^2 &= \downarrow(u_1). \end{aligned}$$

Quindi la (7) diviene

$$\frac{du^2}{\downarrow(u)} = \frac{du_1^2}{\downarrow(u_1)};$$

e ne conseguita

$$(9) \quad \frac{du}{\sqrt{\downarrow(u)}} = \pm \frac{du_1}{\sqrt{\downarrow(u_1)}}.$$

Sviluppando i primi membri delle (8), scrivendo di nuovo $C + E$ invece di G , e ponendo

$$(10) \quad \begin{cases} \alpha = B^2 - AC \\ \beta = 2(BE - AD) \\ \gamma = E^2 - AF + 2(CE - BD) \\ \delta = 2(DE - BF) \\ \varepsilon = D^2 - CF \end{cases}$$

si ha

$$\downarrow(u) = \alpha u^4 + \beta u^3 + \gamma u^2 + \delta u + \varepsilon,$$

$$\downarrow(u_1) = \alpha u_1^4 + \beta u_1^3 + \gamma u_1^2 + \delta u_1 + \varepsilon;$$

e quindi si vede che la relazione (9) ha la forma enunciata nel teorema.

§. III.

È noto che l'equazione differenziale

$$(11) \quad \frac{du}{\sqrt{(\alpha u^4 + \beta u^3 + \gamma u^2 + \delta u + \varepsilon)}} = \frac{du_1}{\sqrt{(\alpha u_1^4 + \beta u_1^3 + \gamma u_1^2 + \delta u_1 + \varepsilon)}}$$

ammette un integrale algebrico (*) il quale, dato la prima volta da Eulero per vie indirette, fu poscia rinvenuto da Lagrange con metodo diretto. Ecco

(*) Le proprietà di un sistema di due sezioni coniche esposte nei teoremi precedenti conducono naturalmente a riconoscere che l'integrale completo dell'equazione differenziale, di cui ora ci occupiamo, ha la forma

$$\Lambda u^2 u_1^2 + 2B(u + u_1)u u_1 + C(u + u_1)^2 + 2D(u + u_1) + 2Eu u_1 + F = 0;$$

e la determinazione dei coefficienti Λ, B, C, D, E, F , riducesi alla identificazione del dato polinomio

$$\alpha u^4 + \beta u^3 + \gamma u^2 + \delta u + \varepsilon$$

con quello rappresentato poc'anzi da $\psi(u)$, vale a dire con

$$(B^2 - AC)u^4 + 2(BE - AD)u^3 + \{E^2 - AF + 2(CE - BD)\}u^2 + 2(DE - BF)u + (D^2 - CF).$$

Questa identificazione dà luogo alle cinque equazioni di condizione

$$\begin{aligned} B^2 - AC &= \alpha \\ BE - AD &= \frac{1}{2}\beta \\ E^2 - AF + 2(CE - BD) &= \gamma \\ DE - BF &= \frac{1}{2}\delta \\ D^2 - CF &= \varepsilon; \end{aligned}$$

e come le incognite A, B, C, D, E, F sono al numero di 6, così una di esse resterà indeterminata; e sarà in conseguenza la costante arbitraria dell'integrale completo. Ma qui subentra una difficoltà di grave momento, quella cioè della eliminazione tra le cinque equazioni di condizione per ricavarne i valori delle cinque incognite.

Eulero, questo nome immenso che bisogna riprodurre ad ogni istante, e ad ogni fatto della scienza del calcolo, senza punto conoscere le proprietà suindicate delle sezioni coniche, avea, come per previsione, riconosciuto nella stessa forma l'integrale generale di cui si tratta; ed i primi suoi lavori intorno a questa ricerca formano il soggetto del cap. VI del 4.^o volume del suo calcolo integrale. Egli si riduce egualmente alla identificazione dei due polinomi, e sono veramente ammirevoli i ripieghi cui ricorre per vincere le difficoltà della eliminazione, ed ottenere le espressioni delle cinque incognite. (Si veggono i paragrafi da 624 a 628 del citato cap. VI).

Reca intanto meraviglia come questo indiretto procedimento d'integrazione sia dal sig. Moigno attribuito al sig. Cauchy, così esprimendosi a pag. 485 del vol. 2. delle lezioni di calcolo differenziale ed integrale, § 192: *Dans ses leçons a l'Ecole polytechnique, M. Cauchy est arrivé, d'une manière toute différente, a l'intégrale de l'équation*

$$\frac{Dx}{\sqrt{\psi(x)}} = \frac{Dy}{\sqrt{\psi(y)}}.$$

questo integrale secondo Lagrange

$$\sqrt{\psi(u)} + \sqrt{\psi(u_1)} = (u - u_1) \sqrt{[\alpha(u + u_1)^2 + \beta(u + u_1) + H]},$$

avendo messo per brevità

$$\downarrow(u) = \alpha u^4 + \beta u^3 + \gamma u^2 + \delta u + \varepsilon$$

$$\downarrow(u_1) = \alpha u_1^4 + \beta u_1^3 + \gamma u_1^2 + \delta u_1 + \varepsilon,$$

e dinotando H la costante arbitraria. Facendone sparire i radicali può ottenersi nella notabilissima forma datagli da Eulero. In fatti, se i due membri si elevino a quadrato, si avrà dapprima

$$2\alpha u^2 u_1^2 + \beta(u + u_1)uu_1 + \gamma(u^2 + u_1^2) + \delta(u + u_1) + 2\varepsilon + 2\sqrt{\psi(u)}\sqrt{\psi(u_1)} = H(u - u_1)^2.$$

Ponendo in seguito

$$H = K + \gamma$$

risulta

$$(12) \quad \alpha u^2 u_1^2 + \beta(u + u_1)uu_1 + 2\gamma uu_1 + \delta(u + u_1) + 2\varepsilon + 2\sqrt{\psi(u)}\sqrt{\psi(u_1)} = K(u - u_1)^2,$$

e sotto questa forma la costante arbitraria è figurata da K. In fine, elevando a quadrato i due membri di questa equazione, sopprimendo il fattore $(u - u_1)^2$, e messo per brevità

$$(13) \quad \begin{cases} A = 4\alpha(K + \gamma) - \beta^2 \\ B = 2\alpha\delta + K\beta \\ C = 4\alpha\varepsilon - K^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} D = 2\beta\varepsilon + \delta K \\ E = \beta\delta + 2(K + \gamma)K \\ F = 4\varepsilon(K + \gamma) - \delta^2, \end{cases}$$

Or questa maniera tutta differente non è altra cosa che il procedimento di Eulero; e nulla poi vi si dice intorno al modo da ricavare dalle cinque equazioni le espressioni delle cinque incognite; il che per fermo è la parte la più essenziale, e la più difficile della ricerca.

Sono tanti i titoli di gloria del sig. Cauchy che certo nulla se gli toglie restituendo ad Eulero quello che gli è dovuto nell'argomento in discorso. D'altra parte bisogna notare che Eulero egli stesso non era grandemente soddisfatto del suo indiretto procedimento. Ed, in comprova, ecco le parole memorabili pronunciate da quell'uomo grande e modesto all'annuncio del metodo diretto d'integrazione dato da Lagrange: *Postquam diu et multum in perscrutanda aequatione differentiali*

$$\frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}} = \frac{dx}{\sqrt{\psi(y)}}$$

desudassem, atque imprimis in methodum directam, quae via faeli ac plana ad ejus integrale perduceret, nequequam inquisivissem; poenitus obstupui, eum mihi nunciaretur, in volumine quarto MISCELLANEORUM TAURINENTIUM ab illustri de La Grange talem methodum esse expositam: (Eul. Cal. Integ. vol. IV pag. 463).

La rettifica di questi fatti è cosa molto importante, poichè dessi interessano la storia della origine delle funzioni ellittiche; e ninno vorrà negare che Eulero è stato colui che ha posto le fondamenta della teoria di queste funzioni.

l'integrale algebrico della soprascritta equazione differenziale diviene

$$(14) Au^2u_1^2 + 2B(u + u_1)uu_1 + C(u + u_1)^2 + 2D(u + u_1) + 2Euu_1 + F = 0$$

prendendo così la forma datagli da Eulero.

Or come la forma di questo integrale è quella precisamente della relazione (4) considerata nel teorema 2.°, così nello stesso teorema sarà lecito di supporre che, invece della mentovata relazione, sia data l'equazione differenziale (11); ed allora per ridurre a questa ipotesi l'equazione della conica (S') rappresentata dalla (6), converrà trasformare i suoi coefficienti a, b, c, d, e, f espressi dalle formole (5), sostituendo in luogo delle costanti A, B, C, D, E, F i valori per esse assegnati nelle formole (13). Nell'eseguire cosiffatta sostituzione si ha dapprima

$$\begin{array}{ll} AF - E^2 = 4(K + \gamma)M & , \quad AC - B^2 = 4\alpha M \\ AD - BE = 2\beta M & , \quad BD - CE = -2KM \\ BF - DE = 2\delta M & , \quad CF - D^2 = 4\epsilon M, \end{array}$$

avendo fatto per compendio

$$M = 4\alpha\gamma\epsilon - (\alpha\delta^2 + \epsilon\beta^2) + (4\alpha\epsilon - \beta\delta)K - \gamma K^2 - K^3;$$

quindi le espressioni (13) si mutano in

$$(15) \quad \begin{cases} a = 4(K + \gamma)M & , & d = 4r\beta M \\ b = 2(\delta + m\beta)M & , & e = 4r(2m\alpha - K)M \\ c = 4(m^2\alpha - mK + \epsilon)M & , & f = 16r^2\alpha M \end{cases}$$

Per questi valori l'equazione (6), sopprimendo il fattore 4M comune a tutt'i termini, diviene

$$(K + \gamma)y^2 + (m\beta + \delta)xy + (m^2\alpha - mK + \epsilon)x^2 + 2r\beta y + 2r(2m\alpha - K)x + 4r\alpha^2 = 0$$

dinotando K una quantità arbitraria; e rappresenta la sezione conica che nasce dal teorema 2.°, applicato all'equazione differenziale (11), invece della relazione (4). Riassumendo per tanto ciò che precede, possiamo enunciare la seguente proposizione:

TEOREMA 4.º

Data l'equazione differenziale

[illegible]

si descriva un'altra sezione conica (S') di equazione

$$(16) \quad (K + \gamma y^2 + (m\beta + \delta)xy + (m^2\alpha - mK + \varepsilon)x^2 + 2r\beta y + 2r(2m\alpha - K)x + 4r^2\alpha = 0 \quad (S')$$

dinotando K una quantità arbitraria. Posto ciò se nella conica (S) si inseriva una corda qualunque tangente di (S') , e si congiungano le sue estremità con l'origine, le tangenti trigonometriche de' due angoli che le congiungenti formano con l'asse delle x , soddisferanno tanto la proposta equazione differenziale, quanto il suo integrale completo (14).

COROLLARIO I.

Segue dal corollario del teorema 2.° che la conica (16) è l'involuppo di tutte le corde della conica (S) i di cui elementi u ed u_1 soddisfano la data equazione differenziale.

COROLLARIO II.

Siano K_0 e K_1 due valori particolari della costante arbitraria K ; così la (16) darà luogo a due coniche distinte

$$(\bar{K}_0 + \gamma)y^2 + (m\beta + \delta)xy + (m^2\alpha - m\bar{K}_0 + \epsilon)x^2 + 2r\beta y + 2r(2m\alpha - \bar{K}_0)x + 4r^2\alpha = 0, \quad (S'_0)$$

$$\begin{aligned} & (K_1 + \gamma)y^2 + (m\beta + \delta)xy + (m^2\alpha - mK_1 + \varepsilon)x^2 + 2r\beta y \\ & + 2r(2m\alpha - K_1)x + 4r^2\alpha = 0; \end{aligned} \quad (S'_1)$$

Sottraendo l'una equazione dall'altra, e sopprimendo dal residuo il fattore $K_0 - K_1$, risulta l'equazione

$$y^2 = 2rx + mx^2,$$

ch'è quella istessa della conica (S); il che dimostra che questa conica, e le due (S₀) ed (S₁) s'incontrano ne' medesimi quattro punti. Ma dopo ciò è chiaro che, qualunque sia il valore particolare che si attribuisce alla costante arbitraria K, la conica corrispondente passerà sempre per gli stessi quattro punti; e si ha quindi il seguente

TEOREMA 5.°

Data la precedente equazione differenziale, e la conica arbitraria (S), tutte le coniche nascenti dalla equazione (16) con attribuire valori diversi alla costante K, hanno con la conica (S) le stesse secanti comuni, reali o ideali, (secondo la denominazione dell'illustre Poncelet).

OSSERVAZIONE.

È bene di osservare che se il polinomo di 4.° grado sottoposto al radicale manchi delle potenze impari della variabile, l'integrale razionale risulterà anch'esso mancante delle potenze impari, cioè dei termini in $(u + u_i)uu_i$ ed $u + u_i$. In fatti essendo nella ipotesi attuale $\beta = 0$, $\delta = 0$ le espressioni (13) si riducono ad

$$\begin{aligned} A &= 4\alpha(K + \gamma) & , & & E &= 2K(K + \gamma) & , & & B &= 0 \\ C &= 4\alpha\varepsilon - K^2 & , & & F &= 4\varepsilon(K + \gamma) & , & & D &= 0 \end{aligned}$$

e quindi l'integrale dell'equazione

$$\frac{du}{\sqrt{\alpha u^4 + \gamma u^2 + \varepsilon}} = \frac{du_i}{\sqrt{\alpha u_i^4 + \gamma u_i^2 + \varepsilon}}$$

sarà

$$Au^2u_i^2 + C(u + u_i)^2 + 2Eu_i + F = 0$$

§. IV.

La forma razionale data da Eulero all'integrale dell'equazione differenziale che forma il soggetto del § precedente conduce ad una rimarchevole proprietà delle equazioni finite che hanno la forma istessa dell'integrale; ed è questa proprietà che or verremo a dichiarare nel seguente

TEOREMA 6.°

Data tra $n+1$ variabili u, u_1, u_2, \dots, u_n il sistema di n equazioni

$$(17) \quad \begin{cases} Au^2u_1^2 + 2B(u + u_1)u u_1 + C(u + u_1)^2 + 2D(u + u_1) + 2Eu u_1 + F = 0 \\ Au_1^2u_2^2 + 2B(u_1 + u_2)u_1u_2 + C(u_1 + u_2)^2 + 2D(u_1 + u_2) + 2Eu_1u_2 + F = 0 \\ Au_2^2u_3^2 + 2B(u_2 + u_3)u_2u_3 + C(u_2 + u_3)^2 + 2D(u_2 + u_3) + 2Eu_2u_3 + F = 0 \\ \dots\dots\dots \\ Au_{n-1}^2u_n^2 + 2B(u_{n-1} + u_n)u_{n-1}u_n + C(u_{n-1} + u_n)^2 + 2D(u_{n-1} + u_n) + 2Eu_{n-1}u_n + F = 0 \end{cases}$$

se si eliminano le variabili intermedie u_1, u_2, \dots, u_{n-1} , l'eliminata nelle variabili estreme u ed u_n sarà un'equazione dello stesso grado e della stessa forma di ciascuna delle proposte.

Dim. In fatti, applicando a ciascuna equazione il procedimento tenuto per dimostrare il teorema 3.°, risulta l'equazione continua

$$\frac{du^2}{\downarrow(u)} = \frac{du_1^2}{\downarrow(u_1)} = \frac{du_2^2}{\downarrow(u_2)} = \dots = \frac{du_n^2}{\downarrow(u_n)},$$

dove si ha in generale

$$\downarrow(u_i) = \alpha u_i^4 + \beta u_i^3 + \gamma u_i^2 + \delta u_i + \varepsilon,$$

ed

$$(18) \quad \begin{cases} \alpha = B^2 - AC \\ \beta = 2(BE - AD) \\ \gamma = 2(CE - BD) + E^2 - AF \\ \delta = 2(DE - BF) \\ \varepsilon = D^2 - CF; \end{cases}$$

laonde, essendo

$$\frac{du^2}{\downarrow(u)} = \frac{du_n^2}{\downarrow(u_n)},$$

integrando, si avrà l'eliminata in u ed u_n . Quindi, messo per compendio

$$(19) \quad \begin{cases} A' = 4x(K + \gamma) - \beta^2 \\ B' = 2x\delta + \beta K \\ C' = 4x\varepsilon - K^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} D' = 2\beta\varepsilon + \delta K \\ E' = \beta\delta + 2k(K + \gamma) \\ F' = 4\varepsilon(K + \gamma) - \delta^2 \end{cases},$$

l'eliminata di cui trattasi sarà

$$(20) \quad A'u^2u_n^2 + 2B'(u+u_n)uu_n + C'(u+u_n)^2 + 2D'(u+u_n) + 2E'uu_n + F' = 0,$$

avendo così la forma annunciata nel teorema (*).

Però la costante K qui non è più arbitraria; ma ha un valore che dipende dal numero delle date equazioni, e dai loro coefficienti, e che può determinarsi come segue. Dal sistema delle date equazioni si ricaverà il valore dell'ultima variabile u_n nella ipotesi di $u=0$; e così pure dall'integrale (20) si trarrà il valore della stessa variabile u_n , supponendo ancora $u=0$; eguagliando tra loro questi due valori di u_n si otterrà un'equazione che determina il valore K conveniente alla eliminata.

Del resto è chiaro che questa equazione determinatrice di K è quella che risulta eliminando le n variabili u_1, u_2, \dots, u_n dal sistema di $n+1$ equazioni

(*) Coi metodi ordinarii di eliminazione sembra quasi impossibile la deduzione di questo teorema, in generale, e la composizione della eliminata. Le vie ordinarie possono unicamente applicarsi al caso in cui il numero delle equazioni date è 2, o una potenza di 2. Così per eliminare la variabile u_1 tra le due prime equazioni, si ordineranno l'una e l'altra rispetto a questa variabile; indi, rendendo eguali una volta i primi ed una volta gli ultimi termini, si prenderanno successivamente le differenze dei risultamenti, e si sgombreranno del fattore $u-u_2$. Si avranno in tal guisa due diverse espressioni a 1° grado per u_1 ; ed, eguagliandole, si otterrà la seguente eliminata

$$\begin{aligned} & 4(2B^2 - A'^2)uu_2 + (BC - AD)(u+u_2) + (CG - 2BD) \times \\ & [(CG - 2'3D)uu_2 + (CD - BF)(u+u_2) + (2D^2 - GF)] = \\ & [2, BC - AD, uu_2 + (C^2 - AF)(u+u_2) + (2CD - BF)]^2 \end{aligned}$$

ove si è fatto per compendio $G=C+E$; e la sua forma è quella che prescrive il teorema. Se si avessero 4 equazioni, si ridurrebbero prima a 2, e quindi ad una. Se fossero 8, si ridurrebbero prima a 4, ec. e così in generale per tutti i casi, in cui il numero delle date equazioni è una potenza di 2. Per qualunque altro numero di equazioni a cominciar del 3, non si vede alcuna via da giungere all'eliminata.

$$(21) \left\{ \begin{array}{l} Cu_1^2 + 2Du_1 + F = 0 \\ Au_1^2 u_2^2 + 2B(u_1 + u_2)u_1 u_2 + C(u_1 + u_2)^2 + 2D(u_1 + u_2) + 2Eu_1 u_2 + F = 0 \\ \dots\dots\dots \\ Au_{n-1}^2 u_n^2 + 2B(u_{n-1} + u_n)u_{n-1} u_n + C(u_{n-1} + u_n)^2 + 2D(u_{n-1} + u_n) + 2Eu_{n-1} u_n + F = 0 \\ Cu_n^2 + 2Du_n + F' = 0. \end{array} \right.$$

Egli è pur manifesto che per determinare il valore di K potrebbe, invece di $u=0$, adottarsi l'altra ipotesi di $u=\infty$; ed in tal caso alla prima ed ultima delle equazioni (20) dovranno sostituirsi le seguenti.

$$\begin{aligned} Au_1^2 + 2Bu_1 + C &= 0 \\ A'u_n^2 + 2B'u_n + C' &= 0. \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 1.^a

I coefficienti della eliminata (20) sono, in generale, diversi da quelli dei termini corrispondenti di ciascuna delle date equazioni (17); ma frattanto si verificherebbe questa coincidenza quando potessero coesistere le cinque condizioni

$$\frac{B'}{A'} = \frac{B}{A}, \quad \frac{C'}{A'} = \frac{C}{A}, \quad \frac{D'}{A'} = \frac{D}{A}, \quad \frac{E'}{A'} = \frac{E}{A}, \quad \frac{F'}{A'} = \frac{F}{A},$$

le quali in virtù delle (19) e (18) si tramutano agevolmente nelle seguenti

$$\begin{aligned} [K + 2(CE - BD)][2B(B^2 - AC) - A(BE - AD)] &= 0 \\ [K + 2(CE - BD)][4C(B^2 - AC) - 2A(CE - BD) - AK] &= 0 \\ [K + 2(CE - BD)][2D(B^2 - AC) - A(DE - BF)] &= 0 \\ [K + 2(CE - BD)][2E(B^2 - AC) - A(E^2 - AF) - AK] &= 0 \\ [K + 2(CE - BD)][F(B^2 - AC) - A(D^2 - CF)] &= 0 \end{aligned}$$

Cade così sotto l'occhio ch'esse sono tutte soddisfatte quando sia nullo il loro fattor comune $K + 2(CE - BD)$, vale a dire quando si abbia

$$K = -2(CE - BD);$$

e da ciò segue che: *Se, nel cercare l'eliminata tra le date equazioni (17) il valore della costante K risulti eguale a $-2(CE - BD)$, in tal caso*

i coefficienti della eliminata, cioè A', B', C', D', E', F' , saranno (fatta astrazione da un fattor comune) eguali rispettivamente ad A, B, C, D, E, F .

Questa singolare proprietà delle equazioni (17) si verifica facilmente; imperciocchè, supponendo nelle (19) $K = -2(CE - BD)$, se pongasi per compendio

$$\lambda = 4(ACF + 2BED - AD^2 - FB^2 - CE^2),$$

si troverà

$$\begin{array}{lll} A' = \lambda A & , & B' = \lambda B & , & C' = \lambda C \\ D' = \lambda D & , & E' = \lambda E & , & F' = \lambda F. \end{array}$$

OSSERVAZIONE 2.^a

Quando nelle date equazioni (16) mancano i termini in $(u + u_i)u_i$ ed $(u + u_i)$, questi termini mancheranno ancora nella eliminata, dappoi-
chè essendo $B=0$, $D=0$, si ha pure $\beta=0$, $\delta=0$; e di seguito $B'=0$,
 $D'=0$; sicchè in tal caso l'eliminata si riduce ad

$$A'u^2u_n^2 + C'(u + u_n)^2 + 2E'uu_n + F' = 0;$$

essendo

$$\begin{array}{ll} A' = 4\alpha(K + \gamma) & , & E' = 2K(K + \gamma) \\ C' = 4\alpha\varepsilon - K^2 & , & F' = 4\varepsilon(K + \gamma); \end{array}$$

e di più

$$x = -AC \quad , \quad \gamma = 2CE + E^2 - AF \quad , \quad \varepsilon = -FC.$$

§. V.

APPLICAZIONI GEOMETRICHE.

I teoremi esposti sono suscettibili di svariate applicazioni tanto di geometria che di analisi. Tra le prime ci limiteremo a dedurne i principali tra i bellissimi teoremi del Poncelet riguardanti i poligoni variabili iscritti, e circoscritti a due sezioni coniche; e determineremo le condizioni che debbono sussistere tra gli elementi di due curve di tal fatta affinchè un poligono di numero assegnato di lati possa essere ad un tempo iscritto nell'una, e circoscritto all'altra. In quanto alle applicazioni di analisi ci limiteremo alla moltiplicazione ed addizione delle trascendenti delle quali fu parola nel § 1.

PROBLEMA.

Date due coniche (S) ed (S'), ed iscritto nella prima un poligono qualunque, i di cui lati siano tutti, eccetto un solo, tangenti dell'altra, si cerca la curva inviluppo del lato libero.

Sol. Sia $UU_1U_2...U_{n-1}U_n$ un poligono di $n+1$ lati iscritto in (S); supponendo che gli n lati UU_1 , U_1U_2 , ..., $U_{n-1}U_n$ siano tangenti di (S'), sarà UU_n il lato libero. Trattasi di determinare la curva toccata da questo lato.

Le equazioni delle due coniche siano come al solito

$$y^2 = 2rx + mx^2 \quad (S)$$

$$ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + f = 0 \quad (S')$$

e gli elementi dei vertici del poligono, cioè de' punti U , U_1 , U_2 , ..., U_n si dinotino ordinatamente con u , u_1 , u_2 , ..., u_n . Così il contatto degli n lati con la conica (S') darà luogo ad altrettante relazioni, le quali costituiscono il sistema delle equazioni (17) del § precedente, e dove i coefficienti A , B , C , D , E , F sono espressi dalle formole (3) del § II. Eliminando da quelle equazioni le variabili intermedie u_1 , u_2 , ..., u_{n-1} , l'eliminata in u ed u_n , che sono gli elementi delle estremità del lato libero del poligono, sarà (teor. 6°) un'equazione della forma

$$(22) \quad A'u^2u_n^2 + 2B'(u+u_n)uu_n + C'(u+u_n)^2 + 2D'(u+u_n) + 2E'uu_n + F' = 0;$$

e quindi risulta (cor. del teor. 2°) che l'involuppo del detto lato è una data sezione conica (I). Così si ha il seguente teorema: *Se tutt' i lati di un poligono variabile iscritto in una conica (S) tocchino, eccetto un solo, un'altra conica (S'), il lato libero sarà anch'esso continuamente tangente ad una terza conica (I).*

Poichè i coefficienti della eliminata (22) sono espressi dalle formole (19), l'equazione dell' involuppo sarà dapprima (cor. 1° teor. IV)

$$(K + \gamma)y^2 + (m\beta + \delta)xy + (m^2\alpha + \varepsilon - mK)x^2 + 2r\beta y + 2r(2m\alpha - K)x + 4r^2\alpha = 0;$$

qui però la K non è già arbitraria, ma ha un valore che si determina come è prescritto nel teorema 6°. Si ha inoltre per le formole (18)

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{(B^2 - AC)}{2(BE - AD)} & \gamma &= 2(CE - BD) + (E^2 - AF) & \delta &= 2(DE - BF) \\ \beta &= 2(BE - AD) & & & \varepsilon &= (D^2 - CF); \end{aligned}$$

e di più qui resta a sostituire alle A, B, C, D, E, F i loro valori (3). Eseguendo questa sostituzione, messo per compendio

$$\Delta = ac^2 + cd^2 + fb^2 - acf - 2bcd,$$

si trova

$$(23) \quad \begin{cases} B^2 - AC = f\Delta \\ BE - AD = 2rd\Delta \\ E^2 - AF = 4ar^2\Delta \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} CE - BD = (2rc - mf)\Delta \\ DE - BF = (4r^2b - 2mrd)\Delta \\ D^2 - CF = (4r^2c - 4mrc + m^2f)\Delta \end{cases}.$$

Quindi risulta

$$\begin{aligned} \alpha &= f\Delta \\ \beta &= 4rd\Delta & \gamma &= (4ar^2 + 4rc - 2mf)\Delta & \delta &= (8r^2b - 4mrd)\Delta \\ \varepsilon &= (4r^2c - 4mrc + m^2f)\Delta; \end{aligned}$$

ed in virtù di questi valori, l'equazione dell' involuppo (I) divisa per $4r^2\Delta$, e messo per brevità

$$(24) \quad \mu = \frac{K + 2(2rc - mf)\Delta}{4r^2\Delta}$$

diverrà

$$(25) \quad (a + \mu)y^2 + 2bxy + (c - m\mu)x^2 + 2dy + 2(c - r\mu)x + f = 0 \quad . \quad . \quad (I)$$

Così l'equazione dell' involuppo è immediatamente espressa per mezzo dei coefficienti delle equazioni delle due coniche date (S) ed (S'); ed è quindi

agevol cosa di dedurne le sue proprietà principali in rapporto alle coniche istesse.

1.° Ed in primo luogo è palese che se queste due coniche sono cerchi entrambi, l'inviluppo è un cerchio anch'esso; imperciocchè, essendo allora $b=0$, $d=0$, e di più $a=c=1$, ed $m=-1$, la sua equazione si riduce ad

$$y^2 + x^2 + \frac{2e}{1+\mu}x + \frac{f}{1+\mu} = 0.$$

Da ciò segue, che: *Se i lati di un poligono variabile iscritto in un cerchio tocchino, eccetto un solo, un altro cerchio, il lato libero sarà anch'esso continuamente tangente ad un terzo cerchio.*

2.° L'equazione (25) scritta come segue

$$ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + f + \mu(y^2 - 2rx - mx^2) = 0$$

dimostra che le due coniche date e l'inviluppo si tagliano ne' medesimi quattro punti (reali, o immaginari); e da ciò risulta che: *la conica, involuppo del lato libero di un poligono variabile iscritto in una conica, e circoscritta ad un'altra, incontra queste due coniche ne' medesimi punti ad esse comuni.* O, in altri termini; *le due coniche date e la conica involuppo hanno le stesse secanti comuni* (reali, o ideali).

3.° Risulta dall'equazione (25) che l'inviluppo, il quale in generale è una conica diversa da (S'), diverrebbe identico con questa conica quante volte fosse $\mu=0$. Avverandosi adunque questa condizione, l'inviluppo non sarà altra cosa che la stessa conica (S'); e quindi anche il lato libero del poligono variabile iscritto in (S) sarà tangente di questa conica (S'); vale a dire il poligono in tal caso sarà sempre ed interamente circoscritto ad (S').

Reciprocamente, se un poligono di $n+1$ lati si trovi iscritto in (S) e circoscritto ad (S'), la condizione $\mu=0$ dev'essere necessariamente verificata. Infatti, si osservi in prima che l'espressione di μ data dalla formola (24) per la 3^a e 4^a delle formole (23) equivale a

$$\mu = x \frac{K + 2(CE - BD)}{E^2 - AF}.$$

Posto ciò siccome tutti gli $n+1$ lati del poligono sono tangenti della

conica (S), dovrà sussistere non solo il sistema delle equazioni (17), equivalente alla relazione unica

$$A'u_n^2 + 2B'(u+u_n)uu_n + C'(u+u_n)^2 + 2D'(u+u_n) + 2E'uu_n + F' = 0$$

tra le variabili u ed u_n ; ma di più, pel contatto dell'ultimo lato UU_n , tra le stesse variabili dovrà pure sussistere la relazione

$$Au_n^2 + 2B(u+u_n)uu_n + C(u+u_n)^2 + 2D(u+u_n) + 2Euu_n + F = 0.$$

Così, i primi membri di queste due relazioni saranno identificabili; quindi per l'oss. 1.^a al teor. 6.^o sussisterà la relazione

$$K + 2(CE - BD) = 0;$$

e per conseguenza sarà pure $\mu = 0$.

4.^o Da ultimo osserviamo che non solo noi qui abbiamo la deduzione di questo rimarchevole teorema del Poncelet; ma abbiamo in pari tempo la condizione che dee sussistere tra i determinanti delle due sezioni coniche (S) ed (S') affinchè un poligono di $n + 1$ lati possa essere ad un tempo iscritto nell'una e circoscritto all'altra. Questa condizione è quella stessa, la quale può ridurre l'inviluppo del lato libero del poligono alla conica (S), quando n lati sono tangenti a questa conica. Laonde perchè ciò si avveri è uopo che sia soddisfatta la relazione

$$K = -2(CE - BD).$$

Ma si è veduto che, quando la costante K ha tal valore, l'ultima delle equazioni (21) si riduce a

$$Cu_n^2 + 2Du_n + F = 0$$

dunque la condizione perchè le due coniche (S) ed (S') ammettano poligoni di $n + 1$ lati iscritti nell'una e circoscritti all'altra, sarà la risultante della eliminazione delle n variabili dal sistema delle $n + 1$ equazioni

$$(26) \quad \begin{cases} Cu_1^2 + 2Du_1 + F = 0 \\ Au_1^2u_2^2 + 2B(u_1+u_2)u_1u_2 + C(u_1+u_2)^2 + 2D(u_1+u_2) + 2Eu_1u_2 + F = 0 \\ Au_2^2u_3^2 + 2B(u_2+u_3)u_2u_3 + C(u_2+u_3)^2 + 2D(u_2+u_3) + 2Eu_2u_3 + F = 0 \\ \dots\dots\dots \\ Au_{n-1}^2u_n^2 + 2B(u_{n-1}+u_n)u_{n-1}u_n + C(u_{n-1}+u_n)^2 + 2D(u_{n-1}+u_n) + 2Eu_{n-1}u_n + F = 0 \\ Cu_n^2 + 2Du_n + F = 0. \quad (*) \end{cases}$$

(*) Gioverà di osservare che alla prima ed ultima equazione del sistema (21) possono ancora sostituirsi le equazioni complete

$$\begin{aligned} Au^2u_i^2 + 2B(u+u_i)uu_i + C(u+u_i)^2 + 2D(u+u_i) + 2Eu u_i + F &= 0 \\ Au^2u_n^2 + 2B(u+u_n)uu_n + C(u+u_n)^2 + 2D(u+u_n) + 2Eu u_n + F &= 0 \end{aligned}$$

Applicheremo ora questi risultamenti a qualche esempio, e mostremo in pari tempo che l'eliminazione di cui si tratta, attesa la forma speciale delle equazioni, si può sempre eseguire con molta semplicità.

CONDIZIONE PER IL TRIANGOLO ISCRITTO IN (S) E CIRCOSCRITTO AD (S').

Per questo caso la condizione sarà la risultante della eliminazione di u_1 , ed u_2 dal sistema delle tre equazioni

$$Cu_1^2 + 2Du_1 + F = 0$$

$$Au_1^2u_2^2 + 2B(u_1 + u_2)u_1u_2 + C(u_1 + u_2)^2 + 2D(u_1 + u_2) + 2Eu_1u_2 + F = 0$$

$$Cu_2^2 + 2Du_2 + F = 0.$$

Ponendo mente alla prima ed ultima equazione si fa palese che u_1 ed u_2 sono le due radici dell'una e dell'altra; e quindi si ha

$$u_1u_2 = \frac{F}{C}, \quad u_1 + u_2 = -\frac{2D}{C}.$$

Sostituendo questi valori nella seconda, l'eliminazione è compiuta; e la condizione richiesta sarà

$$(27) \quad AF + C^2 + 2EC - 4BD = 0$$

Restituendo alle grandi lettere i valori (3), risulta

$$\left. \begin{aligned} & m^2(d^2 - af)^2 + 4mr(d^2 - af)(ac - bd) + 4r^2(d^2 - af)(b^2 - ac) + (e^2 - cf)^2 \\ & + 2m(e^2 - cf)(d^2 - af) + 4r(e^2 - cf)(ac - bd) - 4m(de - bf)^2 - 8r(de - bf)(be - cd) \end{aligned} \right\} = 0,$$

e si ha così la relazione tra i determinanti di due sezioni coniche, che consentono tra loro triangoli iscritti in una, e circoscritti all'altra, espressa nei coefficienti delle loro equazioni.

Quando le due coniche sono cerchi entrambi, si ha $B=0$, $D=0$, e la formola (27) si riduce ad

$$AF + C^2 + 2EC = 0.$$

E siccome in tal caso si ha (osserv. 2.^a al teor. 1.^o)

$$A = r_1^2 - p^2, \quad C = r_1^2, \quad E = -(r_1^2 + pq), \quad F = r_1^2 - q^2,$$

le quali si riducono precisamente a quelle due col supporre $u=0$. Allora eliminando dal sistema di equazioni complete le variabili u_1, u_2, \dots, u_n , e facendo in seguito $u=0$, si avrà lo stesso risultamento che si otterrebbe dal sistema incompleto (26). La sostituzione delle equazioni complete alle incomplete può, come vedremo, tornare in qualche caso opportuna per ragione di simmetria.

sostituendo risulta ,

$$r_1^2(p+q)^2 = p^2q^2$$

ovvero, poichè $p+q=2r$,

$$4r^2r_1^2 = p^2q^2;$$

ed estraendo la radice quadrata

$$2rr_1 = \pm pq,$$

rapportandosi il segno superiore al caso in cui il centro del cerchio (S') è interno al cerchio (S); ed il segno inferiore al caso opposto (nota alla oss. 2.^a al teor. 1.^o). Ciò sottinteso, la relazione pel caso di due cerchi sarà semplicemente

$$2rr_1 = pq.$$

Ricordando che p e q sono i due segmenti in cui quel diametro del cerchio (S) che passa pei centri dei due cerchi, è diviso dal centro del cerchio (S'), la precedente relazione, tradotta in linguaggio geometrico, dà luogo alla seguente proposizione:

Se un triangolo si trova iscritto in un cerchio e circoscritto ad un altro, il centro di questo secondo cerchio divide quel diametro del primo che passa pei centri di entrambi in due segmenti tali che il loro rettangolo è uguale al doppio rettangolo dei due raggi.

Denotando con D la distanza dei centri dei due cerchi, si ha evidentemente

$$p = r - D,$$

$$q = r + D;$$

quindi la relazione di poc' anzi si muta in

$$2rr_1 = r^2 - D^2;$$

e sotto questa forma è conosciuta ordinariamente la relazione pel triangolo iscritto in un cerchio, e circoscritto ad un altro.

CONDIZIONE PEL QUADRILATERO ISCRITTO IN (S) E CIRCOSCRITTO AD (S').

Attualmente trattasi di eliminare le u_1, u_2, u_3 dal sistema delle quattro equazioni

$$Cu_1^2 + 2Du_1 + F = 0$$

$$Au_1^2u_2^2 + 2B(u_1 + u_2)u_1u_2 + C(u_1 + u_2)^2 + 2D(u_1 + u_2) + 2Eu_1u_2 + F = 0$$

$$Au_2^2u_3^2 + 2B(u_2 + u_3)u_2u_3 + C(u_2 + u_3)^2 + 2D(u_2 + u_3) + 2Eu_2u_3 + F = 0$$

$$Cu_3^2 + 2Du_3 + F = 0.$$

La prima ed ultima danno, come poc' anzi

$$u_1u_3 = \frac{F}{C}, \quad u_1 + u_3 = -\frac{2D}{C}.$$

Inoltre eliminando u_2 tra la seconda e terza si ha, come dalla nota al § IV°, l'equazione simmetrica in u_1 ed u_3

$$\begin{aligned} & 4[(2B^2 - AG)u_1u_3 + (BC - AD)(u_1 + u_3) + (CG - 2BD)] \times \\ & [(CG - 2BD)u_1u_3 + (CD - BF)(u_1 + u_3) + (2D^2 - GF)] = \\ & [2(BC - AD)u_1u_3 + (C^2 - AF)(u_1 + u_3) + 2(CD - BF)]^2 \end{aligned}$$

ov'è messo per brevità

$$G = C + E;$$

sostituendovi i precedenti valori di u_1u_3 e di $u_1 + u_3$, si annulla il secondo fattore del primo membro; e quindi la condizione pel quadrilatero si riduce a

$$G(C^2 - AF) + 2(AD^2 + FB^2) - 4BCD = 0.$$

Se le due coniche sono cerchi questa formola diviene

$$C^2 - AF = 0,$$

quindi per le (13) si ha

$$r_1^4 = (r_1^2 - p^2)(r_1^2 - q^2) = 0$$

ovvero,

$$r_1^2(p^2 + q^2) = p^2q^2;$$

ed estraendo la radice quadrata risulta

$$r_1 \sqrt{p^2 + q^2} = pq.$$

Abbiamo dato al secondo membro il segno $+$ nella ipotesi che il centro del cerchio (S') sia interno ad (S); si sarebbe adottato il $-$ nel caso opposto. Questa relazione si traduce agevolmente in linguaggio geometrico. Se si forma un triangolo rettangolo che abbia per cateti i due segmenti p, q , e s'indichi con α la sua altezza, e con β l'ipotenusa, si ha

$$\beta = \sqrt{p^2 + q^2}, \\ \alpha\beta = pq;$$

quindi $r_1\beta = \alpha\beta$ ed $r_1 = \alpha$. Così si ha la seguente proposizione.

Se due cerchi ammettono quadrilateri iscritti in uno, e circoscritti all'altro, il raggio del secondo sarà quanto l'altezza del triangolo rettangolo che ha per cateti i segmenti ne quali il suo centro divide quel diametro del primo, che passa pei centri di entrambi.

CONDIZIONE PEL PENTAGONO ISCRITTO IN (S) E CIRCOSCRITTO AD (S').

Noi considereremo questo caso del pentagono, che offre più difficoltà degli altri, facendo uso di cinque equazioni complete in

$$u \text{ ed } u_1, \quad u_1 \text{ ed } u_2, \quad u_2 \text{ ed } u_3, \quad u_3 \text{ ed } u_4, \quad u \text{ ed } u_4.$$

salvo a porre $u = 0$ dopo la eliminazione delle variabili u_1, u_2, u_3, u_4 . Eliminando u_1 tra la prima e seconda, ed u_4 tra la quarta ed ultima avremo due equazioni della forma

$$\alpha u^2 u_2^2 + 2\beta(u + u_2)uu_2 + \gamma(u + u_2)^2 + 2\delta(u + u_2) + 2\epsilon uu_2 + \phi = 0, \\ \alpha u^2 u_3^2 + 2\beta(u + u_3)uu_3 + \gamma(u + u_3)^2 + 2\delta(u + u_3) + 2\epsilon uu_3 + \phi = 0,$$

le quali, facendo $u = 0$, porgono

$$\gamma u_2^2 + 2\delta u_2 + \phi = 0, \quad \gamma u_3^2 + 2\delta u_3 + \phi = 0.$$

Quindi risulta

$$u_2 u_3 = \frac{\phi}{\gamma}, \quad u_2 + u_3 = -\frac{2\delta}{\gamma}.$$

Sostituendo questi valori nella media delle cinque equazioni, vale a dire in quella in u_2 ed u_3 , l'eliminazione sarà compiuta, e si avrà

$$A\phi^2 - 4B\delta\phi + 4C\delta^2 - 4D\gamma\delta + 2E\gamma\phi + F\gamma^2 = 0.$$

I valori di γ , δ , ϕ si hanno immediatamente dalla eliminata per due equazioni scritta nella nota al § IV°. Da essa si ricava

$$\gamma = 4(BC - AD)(CD - BF) - (C^2 - AF)^2$$

$$\delta = 2[(BC - AD)(2D^2 - GF) + (CG - 2BD)(CD - BF) - (C^2 - AF)(CD - BF)]$$

$$\phi = 4((CG - 2BD)(2D^2 - GF) - (CD - BF)^2);$$

e però sostituendo questi valori nella relazione precedente, si ha quella che conviene al caso del pentagono.

Pel caso di due cerchi avendosi $B=0$, $D=0$, $\delta=0$, la relazione si riduce a

$$16AC^2F^2G^4 + 8CEF(C^2 - AF)^2 + F(C^2 - AF)^4 = 0.$$

OSSERVAZIONE.

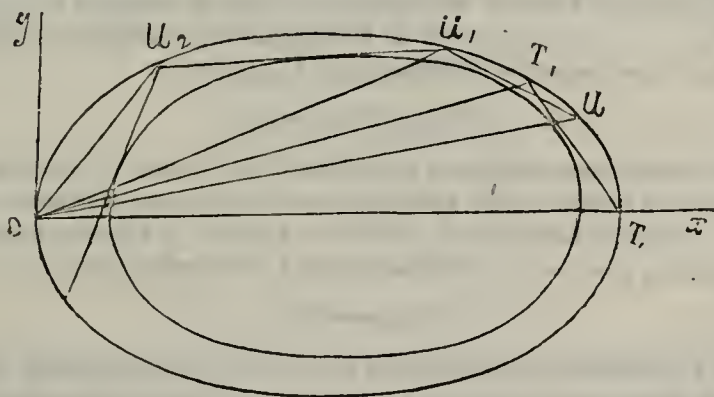
Gli esempi recati sono più che sufficienti per mostrare la maniera da ottenere in ogni caso la relazione per qualunque poligono; ma vogliamo aggiungere che intorno ai particolari di questa quistione molte altre cose meriterebbero di esser messe in veduta. Noi siamo contenti per ora di averla risolta in modo generale; ma ci riserbiamo di esporre in altra occasione alcune rimarchevoli conseguenze alle quali essa dà luogo; e tra l'altro la bella teorica del Gaus intorno alla divisione del cerchio: teorica cui mena direttamente la nostra attuale ricerca, bastando perciò di supporre che le due coniche siano due cerchi concentrici.

Posto ciò, si descrivano le due coniche (S) ed (S') corrispondenti al teorema 4.°, e sia UU_i una corda qualunque della prima tangente dell'altra. Sia inoltre T l'altro vertice di quell'asse di figura della conica (S), che si è preso per asse delle x , e TT_i la corda condottavi da T tangente all'altra conica (S'); è chiaro che, se il vertice U della corda variabile UU_i si fa coincidere con T, l'altro vertice U_i coinciderà con T_i . Si dinotino intanto con ϕ e ϕ_i gli angoli UOx , U_iOx ; sarà così $u = \operatorname{tg} \phi$, $u_i = \operatorname{tg} \phi_i$; e però le ipotesi di $u = 0$, $u_i = \operatorname{tg} \mu = t$, corrisponderanno ordinatamente alle altre di $\phi = 0$, $\phi_i = \mu$; ma l'angolo $\phi = 0$ si ha dal punto T; dunque l'angolo $\phi_i = \mu$ si avrà dal punto T_i ; vale a dire, sarà $\mu = T_iOx$. Inversamente è chiaro che, se dall'origine O si conduca una retta che formi con l'asse delle x un angolo eguale a μ , questa retta incontrerà la conica (S) in un punto T_i tale che la corda condotta da esso al punto T risulterà tangente della conica (S'). Riassumendo queste osservazioni si ha la seguente proposizione.

TEOREMA 8.°

Siano UU_1 e TT_1 due corde della conica (S) tangenti di (S') , l'una condotta da un punto qualunque U , l'altra da T ; dinotando con u ed u_1 le tangenti trigonometriche degli angoli UOT , U_1OT , e con t quella dell'angolo $T_1OT = \mu$, le tre quantità u , u_1 e t verificheranno tanto l'integrale algebrico della precedente equazione differenziale, quanto l'equazione trascendente

$$F(u_1) = F(u) + F(t).$$



In virtù di questo teorema, supponendo dato il valore di $u = \operatorname{tg} \phi$, può dunque costruirsi geometricamente il valore di $u_1 = \operatorname{tg} \phi_1$ in guisa che la funzione $F(u_1)$ risulti eguale alla somma delle due funzioni $F(u)$ ed $F(t)$. Basta perciò di formare al punto O l'angolo $TOU = \phi$, e quindi condurre da U nella conica (S) la corda UU_1 tangente di (S') ; il punto U_1 risolverà il problema, e sarà $U_1OT = \phi_1$, ossia $\operatorname{tg} U_1OT = u_1$.

Se dal punto U si meni la tangente UU_1 , e da U_1 si conduca la tangente U_1U_2 , si avranno le due relazioni

$$\begin{aligned} F(u_1) &= F(u) + F(t) \\ F(u_2) &= F(u_1) + F(t), \end{aligned}$$

le quali sommate membro a membro danno

$$F(u_2) = F(u) + 2F(t).$$

Ancora condotta un'altra tangente U_2U_3 , si avrebbe

$$F(u_3) = F(u_2) + F(t),$$

e quindi, sommando questa relazione con la precedente, verrebbe

$$F(u_3) = F(u) + 3F(t).$$

Ma, in generale è chiaro, che, se a cominciare da un punto qualunque U della conica (S) si menino alla conica (S') n tangenti successive UU_1 , U_1U_2 , U_2U_3 , , $U_{n-1}U_n$ e si dica u_n la tangente trigonometrica dell'angolo U_nOT , corrispondente all'ultimo punto U_n , si avrà

$$F(u_n) = F(u) + nF(t).$$

Così mediante una costruzione geometrica si vede risoluto nel modo il più generale il problema della moltiplicazione della funzione trascendente F .

Se il punto iniziale U si fa coincidere col punto T , pel quale si ha $\phi = 0$, e quindi $\operatorname{tg} \phi = u = 0$, ed $F(u) = 0$, si avrà più semplicemente

$$F(u_n) = nF(t).$$

I risultamenti che precedono si possono rendere più generali, prendendo gl'integrali in guisa che per $u = \operatorname{tg} \mu = t$, si abbia $u_i = \operatorname{tg} \mu_i = t_i$, dinotando μ e μ' due angoli qualunque dati. Per queste ipotesi l'espressione della costante primitiva K desunta dalla formola (7) porge

$$K = \frac{\alpha t_i^2 + \beta(t + t_i)t_i + 2\gamma tt_i + \delta(t + t_i) + 2\varepsilon + 2\sqrt{\psi(t)\psi(t_i)}}{(t - t_i)^2}$$

e l'integrale trascendente dell'equazione differenziale sarà

$$F(u_i) - F(u) = F(t_i) - F(t).$$

Dopo ciò, se nella equazione (28), che esprime la conica (S') si supponga adottato per K il valore qui sopra rapportato; e, descritta questa conica (S') e l'altra (S) , si menino dall'origine due rette 0τ ed $0\tau_i$ che finino con OT

gli angoli $T_0\tau$, $T_0\tau_1$, rispettivamente eguali a μ e μ_1 , talchè sarà

$$t = \operatorname{tg} \mu = \operatorname{tg} T_0\tau, \quad t_1 = \operatorname{tg} \mu_1 = \operatorname{tg} T_0\tau_1,$$

allora è chiaro che la corda $\tau\tau_1$ risulterà tangente della conica (S'); e però, conducendo nella conica (S) qualunque altra corda UU_1 tangente della conica (S'); e dinotate, come al solito con u ed u_1 le tangenti degli angoli UOT ed U_1OT , la differenza delle due funzioni $F(u_1)$ ed $F(u)$ sarà costante ed eguale alla differenza delle due funzioni $F(t_1)$ ed $F(t)$; o, in altri termini, le quantità u , u_1 verificheranno non solo l'equazione differenziale, ma anche il suo integrale algebrico, e l'equazione trascendente di poc' anzi.

Posto ciò se nella conica (S) s'isciva una porzione di poligono di n lati $UU_1U_2U_3 \dots U_{n-1}U_n$, che sia circoscritto alla conica (S'), e si dinotino con u , u_1 , u_2 , \dots , u_n le tangenti rispettive degli angoli UOT , U_1OT , U_2OT , \dots , U_nOT , si avranno le n relazioni

$$\begin{aligned} F(u_1) - F(u) &= F(t_1) - F(t) \\ F(u_2) - F(u_1) &= F(t_2) - F(t_1) \\ F(u_3) - F(u_2) &= F(t_3) - F(t_2) \\ &\vdots \\ F(u_n) - F(u_{n-1}) &= F(t_n) - F(t_{n-1}) \end{aligned}$$

le quali addizionate membro a membro porgono

$$F(u_n) - F(u) = n [F(t_1) - F(t)].$$

Se il punto U si fa coincidere con T pel quale si ha $u = \phi = 0$, e quindi $F(u) = 0$, si avrà semplicemente

$$F(u_n) = n [F(t_1) - F(t)];$$

È così resta moltiplicata per n la differenza delle date funzioni $F(t_1)$ ed $F(t)$.

Siano ω , ω_1 , ω_2 , cc. angoli qualunque dati, e pongasi

$$t = \operatorname{tg} \omega, \quad t_1 = \operatorname{tg} \omega_1, \quad t_2 = \operatorname{tg} \omega_2, \text{ cc.}$$

Indi, descritta una conica qualunque (S)

$$y^2 = 2rx + mx^2,$$

in conformità del teorema 7.° si suppongano descritte le coniche (S'), (S''), (S'''), cc. corrispondenti agli angoli dati ω , ω_1 , ω_2 , cc. Allora se dal punto

T si suppongano condotte a queste diverse coniche le tangenti, che incontrino la conica (S) nei punti T_1, T_2, T_3 , ec., gli angoli TOT_1, TOT_2, TOT_3 , ec. saranno ordinatamente eguali ad $\omega, \omega_1, \omega_2$, ec.; e però le loro tangenti saranno rispettivamente ℓ, ℓ_1, ℓ_2 , ec. Posto ciò, da un punto qualunque U della conica (S) si meni in questa conica la corda UU_1 tangente di (S') ; indi dal punto U_1 si meni una seconda corda U_1U_2 tangente di (S'') ; di seguito si tiri da U_2 una terza corda U_2U_3 tangente della terza conica (S''') ; e così si prosegua fino a condurre la tangente $U_{n-1}U_n$ all'ultima conica $(S^{(n)})$. Per tal modo, ritenute le solite notazioni per le tangenti degli angoli UOT, U_1OT, \dots, U_nOT , è chiaro che si hanno le n relazioni

$$\begin{aligned} F(u_1) &= F(u) + (\ell) \\ F(u_2) &= F(u_1) + (\ell_1) \\ F(u_3) &= F(u_2) + F(\ell_2) \\ &\vdots \\ F(u_n) &= F(u_{n-1}) + F(\ell_{n-1}) \end{aligned}$$

addizionandole membro a membro risulta

$$F(u_n) = F(u) + F(\ell) + F(\ell_1) + F(\ell_2) + \dots + F(\ell_{n-1}).$$

Se il punto iniziale U si fa coincidere con T, si ha più semplicemente

$$F(u_n) = F(\ell) + F(\ell_1) + F(\ell_2) + \dots + F(\ell_{n-1}).$$

E per tal modo resta geometricamente determinato il valore di u_n pel quale la funzione $F(u_n)$ risulta eguale alla somma delle n date funzioni $F(\ell), F(\ell_1), \dots, F(\ell_{n-1})$.

§ VI.

Porremo termine a queste ricerche mostrando come nel caso di due cerchi la relazione

$$(1) \quad Au^2u_i^2 + 2B(u+u_i) + C(u+u_i)^2 + 2D(u+u_i) + 2Eu u_i + F = 0$$

si riduca all'equazione fondamentale nella teorica delle funzioni ellittiche. Tenendo presenti i valori delle costanti A, B, C, D, E, F riportati pel caso di due cerchi nella osservazione 2^a al § II.^o, si vede in primo luogo che la suddetta relazione diviene nella ipotesi attuale

$$(r_i^2 - p^2)u^2u_i^2 + r_i^2(u+u_i)^2 - 2(r_i^2 + pq)uu_i + (r_i^2 - q^2) = 0.$$

e questa, riunendo in un membro i termini affetti da r_i^2 , prende subito la forma

$$(2) \quad (puu_i + q)^2 = r_i^2(u^2 + 1)(u_i^2 + 1);$$

Intanto siccome si ha

$$u = \operatorname{tang} \varphi = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi}, \quad u_i = \operatorname{tang} \varphi_i = \frac{\operatorname{sen} \varphi_i}{\cos \varphi_i},$$

con la sostituzione di quali valori la (2) si cangia in

$$(p \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi_i + q \cos \varphi \cos \varphi_i)^2 = r_i^2.$$

e ne conseguita

$$(3) \quad \frac{p}{q} \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi_i + \cos \varphi \cos \varphi_i = \pm \frac{r_i}{q};$$

da ritenersi il segno superiore, o l'inferiore, secondochè il centro del cerchio (S') è interno, o esterno al cerchio (S).

Ciò premesso, se nella (3) si ponga $\varphi = 0$, e si rammenti che in questa ipotesi l'angolo φ_i è dinotato da μ , si avrà

$$(4) \quad \frac{r_i}{q} = \pm \cos \mu.$$

quindi risulta

$$\operatorname{sen}^2 \mu = 1 - \cos^2 \mu = 1 - \frac{r_i^2}{q^2} = \frac{q^2 - r_i^2}{q^2},$$

e però

$$(5) \quad q^2 \operatorname{sen}^2 \mu = q^2 - r_1^2.$$

Sostituendo nel primo membro $(2r-p)^2$ a q^2 , e poscia rimanendovi il solo termine affetto da p^2 , si avrà

$$p^2 \operatorname{sen}^2 \mu = q^2 - r_1^2 - 4r(r-p) \operatorname{sen}^2 \mu;$$

e se i due membri di questa equazione si dividano pei due membri della (5) rispettivamente si otterrà

$$\frac{p^2}{q^2} = 1 - \frac{4r(r-p)}{q^2 - r_1^2} \operatorname{sen}^2 \mu.$$

Ponendo per brevità

$$K = \frac{4r(r-p)}{q^2 - r_1^2}$$

ed

$$1 - K \operatorname{sen}^2 \mu = \overline{\Delta(\mu)}^2,$$

si avrà

$$\frac{p}{q} = \Delta(\mu).$$

Essendo adunque

$$\frac{p}{q} = \Delta(\mu) \quad , \quad \frac{r_1}{q} = \cos \mu,$$

la (3) si trasforma in

$$\operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \phi_1 \Delta(\mu) + \cos \phi \cos \phi_1 = \cos \mu;$$

e si ritrova così l'equazione fondamentale nella teorica delle funzioni ellittiche.

METODI E FORMOLE GENERALI
PER L'ELIMINAZIONE
NELLE EQUAZIONI DI PRIMO GRADO

MEMORIA

PRESENTATA ALL'ACCADEMIA DAL SOCIO SIG. TRUDI A NOME DI

LEOPOLDO DE MAJO

1. Lo sviluppo di questi metodi esige che si premetta alcuna cosa intorno al polinomio formato dalle permutazioni di m lettere $a, b, c, \dots r, s$, dando a ciascuna permutazione, considerata come un prodotto, quel segno, che può convenirle in virtù della legge che andremo a stabilire. Dinoteremo concisamente questo polinomio con $P_m(a b c \dots r s)$; ma poichè, dopo averlo formato, conviene come si vedrà, apporre alle m lettere di ogni permutazione gl'indici successivi $1, 2, 3 \dots, m$, allora scriveremo $P_m(a_1 b_2 c_3 \dots s_m)$; ed in tal caso i suoi termini saranno tanti prodotti diversi.

2. Supposto che le m lettere si succedano ordinatamente sarà a prima, b seconda, c terza, ecc. Per comporre intanto le loro permutazioni, si comincerà a formare quelle delle prime due lettere a, b , cioè ab, ba , e ri-

termini $cfbgacd$, $cbfgacd$, si rifletta ch'essi nascono dallo stesso termine $cbgaed$, in cui f perecorre per formare il primo un posto di più che per l'altro; e per ciò i loro segni sono contrari. Che se nessuna delle due lettere scambiate sia l'ultima inserita, com'è nei termini $dcaeb$, $daceb$ per a e c , si osservi che essi nascono dai termini di segni contrari cab , acb , con la successiva introduzione di d ed e , le quali percorrono in ciascuna lo stesso numero di posti, ond'è che i loro segni saranno parimenti contrari.

Caso II. S'immagini che una lettera qualunque di un termine A percorrendo successivamente $0, 1, 2, 3, \dots, n$ dei suoi posti produca i termini $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$; due di essi consecutivi differiranno pel solo scambio di due lettere contigue, e perciò avranno segni contrari; quindi A_0 sarà di segno contrario ad A_1 , simile ad A_2 , contrario ad A_3 , cc. ed in generale A_0 ed A_n saranno di segni simili, o contrari secondochè n sarà pari, o impari. Or sieno due termini, come

$$1^\circ \dots faec \dots rgsb, \quad 2^\circ \dots fgec \dots rasb$$

in cui si scambiano solo due lettere, per esempio a e g , e sia n il numero delle lettere che le frammezzano; portando nel primo a innanzi g , e nel secondo g innanzi a , queste lettere avran percorso in ciascun n posti, e daran luogo ai termini

$$3^\circ \dots fec \dots ragsb, \quad 4^\circ \dots fec \dots rgabs$$

che differiscono pel solo scambio delle lettere contigue a, g ed hanno perciò segni contrari; ma il 1° e 3° hanno segni simili o contrarii nello stesso tempo che simili o contrari sono quelli del 2° e 4° ; dunque il 1° e 2° saranno di segni contrari.

5. Segue da ciò che se nei termini del polinomio si scambia una lettera con un'altra, il polinomio resta lo stesso, ma però col segno cambiato; per esempio scambiando e con s si ha $P_m(abc \dots rs) = -P_m(abs \dots re)$. Del resto è chiaro, che ciò equivale a posporre nella formazione del polinomio l'ordine delle due lettere scambiate considerandosi s come terza, e come ultima lettera; ma cangiando i segni di tutt'i termini si ha il polinomio primitivo.

6. Qui importa di far notare, che può comporsi in un altro modo il polinomio $P_m(abc \dots rs)$ formato che sia il polinomio di $m-1$ lettere $P_{m-1}(abc \dots r)$. Ponendo l'ultima lettera s in fine di ogni suo termine, si

ha il polinomio parziale $P_{m-1}(abc\dots r)s$ i cui termini si hanno nel totale coi medesimi segni. Scambiandosi s in a , poi s in b , quindi s in c , ecc. ed infine s con r , si avranno altri $m-1$ polinomi parziali

$$P_{m-1}(sbc\dots r)a, P_{m-1}(asc\dots r)b, P_{m-1}(abs\dots r)c \dots, P_{m-1}(abc\dots s)r,$$

i quali col primo riproducono tutt'i termini del totale; però mentre i termini del primo vi si trovano coi medesimi segni, quelli degli altri vi son tutti cambiati. Infatti, paragonando il primo ad uno tra gli altri, si vede che ad ogni termine di quello corrisponde un termine in questo dello stesso segno, da cui non differisce che per lo scambio di due lettere, mentre nel totale siffatti termini han segni diversi. Segue da ciò che gli m polinomi parziali riproducono esattamente il totale, *cangiando i segni a tutti meno che al primo*; e perciò si avrà

$$P_m(abc\dots rs) = -P_{m-1}(sbc\dots r)a - P_{m-1}(asc\dots r)b - P_{m-1}(abs\dots r)c \dots - P_{m-1}(abc\dots s)r + P_{m-1}(abc\dots r)s.$$

Così per esempio sarà

$$P_2(ab) = -P_1(b)a + P_1(a)b = -ab + ba$$

$$P_3(aba) = -P_2(db)a - P_2(ac)b + P_2(ab)c$$

$$P_4(abcd) = -P_3(dbc)a - P_3(adc)b - P_3(adb)c + P_3(abc)d \text{ ecc. ecc.}$$

7. Se ad una delle m lettere si sostituisca la somma di due altre, e sia per esempio $S = \gamma + \varepsilon$, ogni termine del polinomio ne darà due dello segno, uno in cui s mutasi in γ , e l'altro in cui mutasi in ε , e perciò si avrà

$$P_m(abc\dots rs) = P_m(abc\dots r\gamma) + P_m(abc\dots r\varepsilon).$$

Dopo ciò è chiaro, che se in tutte le m serie di m lettere ognuna

$$a_1, b_1, c_1, \dots, s_1$$

$$a_2, b_2, c_2, \dots, s_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_m, b_m, c_m, \dots, s_m$$

si sostituisca ad una stessa lettera la somma di due altre coi medesimi indici, e per esempio sia pure

$$s = \gamma + \varepsilon, \text{ cioè } s_1 = \gamma_1 + \varepsilon_1, s_2 = \gamma_2 + \varepsilon_2, \dots, s_m = \gamma_m + \varepsilon_m$$

risulterà $P_m(a_1 b_2 c_3 \dots r_{m-1} s_m) = P_m(a_1 b_2 c_3 \dots r_{m-1} \gamma_m) + P_m(a_1 b_2 c_3 \dots r_{m-1} \varepsilon_m).$

8. Premesse tali cose passeremo ad occuparci della ricerca dei valori

delle incognite per m equazioni di primo grado, che supporremo ridotte alla seguente forma

$$\begin{array}{rcll} a_1 A + b_1 B + c_1 C + \dots + r_1 R + s_1 S + \omega_1 & = & 0 \\ a_2 A + b_2 B + c_1 C + \dots + r_2 R + s_2 S + \omega_2 & = & 0 \\ a_3 A + b_3 B + c_3 C + \dots + r_3 R + s_3 S + \omega_3 & = & 0 \\ \dots & & \dots \\ a_m A + b_m B + c_m C + \dots + r_m R + s_m S + \omega_m & = & 0 \end{array}$$

avendo in esse figurate per maggior chiarezza le m incognite con le m lettere grandi, che supporremo succedersi secondo l'ordine alfabetico, e con altrettante lettere piccole dello stesso nome i rispettivi coefficienti, diversificati con gl'indici da una equazione all'altra. Inoltre una lettera greca ω , od altra, parimenti variata negl'indici, sarà destinata a rappresentare i termini cogniti.

9. Ciò posto sieno dapprima le due equazioni

$$a_1 A + b_1 B + \omega_1 = 0, \quad a_2 A + b_2 B + \omega_2 = 0$$

e proponghiamoci a trovare il valore di B . In questo proposito porremo in generale

$$b_n B + \omega_n = \phi_n, \text{ e quindi } b_1 B + \omega_1 = \phi_1, \quad b_2 B + \omega_2 = \phi_2,$$

e le date equazioni si cangeranno nelle altre

$$a_1\Lambda + \phi_1 = 0, \quad a_2\Lambda + \phi_2 = 0$$

Ricavando dalla prima il valore di Λ ch'è $-\frac{\Phi'}{a_x}$ e sostituendolo nella seconda, si avrà, tolto il denominatore a_x , l'equazione sgombra dell'incognita Λ

$$a_1 \phi_2 - \phi_1 a_2 = 0$$

contenente la sola incognita B avvolta nelle ϕ . Si osservi intanto che il suo primo membro è il polinomio, che risulta dalle due permutazioni delle lettere α, ϕ , formate con la regola data più sopra, e quindi apponendo alle due lettere di ciascuna gl'indici successivi 1, 2. In conseguenza potrà scriversi

$$p_2(a_1 \phi_2) = 0$$

Essendo ora $\phi = bB + \infty$, ed osservando che B non dev'essere affetta da in-

dice, l'ultima equazione diverrà

$$B \times P_2(a_1 b_2) + P_2(a_1 \omega_2) = 0$$

e se ne ricava pel valore di B

$$B = -\frac{P_2(a_1 \omega_2)}{P_2(a_1 b_2)} \quad \text{ossia} \quad B = -\frac{a_1 \omega_2 - \omega_1 a_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}$$

Esaminando questo valore di B, si riconosce che il denominatore è il polinomio formato colla già detta regola dei segni dalle permutazioni delle due lettere a, b coefficienti di A, B, ed apposti quindi alle due lettere di ciascuna gl'indici successivi 1, 2. Ed il numeratore è ciò che diviene il denominatore cambiandovi b , coefficiente di B, nel termine noto ϕ , rimanendo immutati gl'indici ed i segni. V'ha di più che alla frazione così composta trovasi anteposto il segno —. Si vede pertanto che nel denominatore non entra per nulla il termine noto ω , mentre nel numeratore non trovasi la b coefficiente di B.

Con lo stesso processo potrebbe trovarsi il valore di A, ma è chiaro che questo valore può subito ricavarasi da quello di B, cambiando b in a ed a in b . Per tal modo il numeratore diverrà $P_2(b_1 \omega_2)$ ovvero $-P_2(\omega_1 b_2)$, ed il denominatore $P_2(b_1 a_2)$, ovvero $-P_2(a_1 b_2)$. Quindi sarà

$$A = -\frac{P_2(\omega_1 b_2)}{P_2(a_1 b_2)} \quad \text{ossia} \quad A = -\frac{\omega_1 b_2 - b_1 \omega_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}$$

e si ravvisa che il denominatore è lo stesso di quello del valore di B, mentre il numeratore è pure ciò che diviene il denominatore scambiandovi in ω la lettera a coefficiente di A, rimanendo immutati gl'indici ed i segni; ed a questa frazione trovasi parimenti anteposto il segno —.

10. Sieno ora le tre equazioni

$$a_1 A + b_1 B + c_1 C + \omega_1 = 0,$$

$$a_2 A + b_2 B + c_2 C + \omega_2 = 0,$$

$$a_3 A + b_3 B + c_3 C + \omega_3 = 0.$$

Nel proposito di trovare C porremo $cC + \omega = \phi$, e le equazioni diverranno

$$a_1 A + b_1 B + \phi_1 = 0,$$

$$a_2 A + b_2 B + \phi_2 = 0,$$

$$a_3 A + b_3 B + \phi_3 = 0$$

Traendo dalle due prime i valori di A e B , e sostituendoli nella terza quest'incognite si troveranno eliminate. Essendo come poc'anzi

$$A = -\frac{P_2(\phi, b_2)}{P_2(a_1, b_2)}, \quad B = -\frac{P_3(a_1, \phi)}{P_3(a_1, b_2)},$$

eseguita la sostituzione, e tolti i tratti si avrà l'equazione

$$-P_2(\phi, b_2)a_3 - P_2(a_1, \phi)b_3 + P_3(a_1, b_2)\phi = 0$$

equivalente all'altra

$$P_3(a_1, b_2\phi) = 0;$$

ma per essere $\phi = c\omega + \omega$, essa cangiasi in

$$C \times P_3(a_1, b_2c_3) + P_3(a_1, b_2\omega_3) = 0$$

risulterà dunque

$$C = -\frac{P_3(a_1, b_2\omega_3)}{P_3(a_1, b_2c_3)}, \text{ ossia } C = -\frac{a_1b_2\omega_3 - a_1\omega_2b_3 + \omega_1a_2b_3 - b_1a_2\omega_3 + b_1\omega_2a_3 - \omega_1b_2a_3}{a_1b_2c_3 - a_1c_2b_3 + c_1a_2b_3 - b_1a_2c_3 + b_1c_2a_3 - c_1b_2a_3}.$$

Cambiando in questa espressione c in b e b in c si ha

$$B = -\frac{P_3(a_1, \omega_2c_3)}{P_3(a_1, b_2c_3)}, \text{ ossia } B = -\frac{a_1\omega_2c_3 - a_1c_2\omega_3 + c_1a_2\omega_3 - \omega_1a_2c_3 + \omega_1c_2a_3 - c_1\omega_2a_3}{a_1b_2c_3 - a_1c_2b_3 + c_1a_2b_3 - b_1a_2c_3 + b_1c_2a_3 - c_1b_2a_3}.$$

E finalmente cambiandovi c in a ed a in c si ottiene

$$A = -\frac{P_3(\omega_1b_2c_3)}{P_3(a_1, b_2c_3)}, \text{ ossia } A = -\frac{\omega_1b_2c_3 - \omega_1c_2b_3 + c_1\omega_2b_3 - b_1\omega_2c_3 + b_1c_2\omega_3 - c_1b_2\omega_3}{a_1b_2c_3 - a_1c_2b_3 + c_1a_2b_3 - b_1a_2c_3 + b_1c_2a_3 - c_1b_2a_3}.$$

Si vede all'istante che i valori delle tre incognite son formati colla stessa legge rilevata pel caso di due equazioni. Essi infatti hanno per determinator comune il polinomio $P_3(a_1, b_2c_3)$ composto dietro la solita regola dei segni dalle permutazioni di a, b, c , e quindi apposti alle tre lettere di ciascuna gl'indici successivi 1, 2, 3. Il numeratore poi di A , è ciò che diviene il denominatore cambiandovi a in ω ; quello di B ciò che esso diviene cambiandovi b in ω ; e quello di C ciò che diviene cambiandovi c in ω : gli indici ed i segni rimangono immutati, ed a ciascuna frazione trovasi anteposto il segno —.

11. Sapendo trovare i valori delle incognite per tre equazioni, si potrà passare a quattro equazioni, poscia a cinque, quindi a sei, ecc. ecc. e si perverrà sempre a risultamenti subordinati alla stessa legge, ma or mostriamo che questa legge dee verificarsi qualunque sia il numero delle equazioni. A tale effetto la supporremo verificata per $m-1$ equazioni, e proveremo che sarà necessariamente verificata anche per m equazioni. Proponendoci adunque a ricavarne il valore della incognita S dalle m equazioni scritte poc'anzi (§ 8) porremo

$$sS + \omega = \phi$$

ed in virtù della supposizione, si avrà dalle prime $m-1$ equazioni.

$$A = -\frac{P_{m-1}(\phi_1 b_2 c_3 \dots r_{m-1})}{P_{m-1}(a_1 b_2 c_3 \dots r_{m-1})}, \quad B = -\frac{P_{m-1}(a_1 \phi_2 c_3 \dots r_{m-1})}{P_{m-1}(a_1 b_2 c_3 \dots r_{m-1})}, \dots, \quad R = -\frac{P_{m-1}(a_1 b_2 c_3 \dots \phi_{m-1})}{P_{m-1}(a_1 b_2 c_3 \dots r_{m-1})};$$

sostituendo questi $m-1$ valori nell'ultima equazione

$$a_m A + b_m B + c_m C + \dots + r_m R + \phi_m = 0$$

si avrà un' equazione contenente la sola incognita S avvolta nella ϕ . Or quest' equazione tolti i fratti sarà com'è manifesto

$$-P_{m-1}(\phi_1 b_2 c_3 \dots r_{m-1}) + P_{m-1}(a_1 \phi_2 c_3 \dots r_{m-1}) - P_{m-1}(a_1 b_2 \phi_3 \dots r_{m-1}) + \dots, \\ -P_{m-1}(a_1 b_2 c_3 \dots \phi_{m-1}) r_{m-1} + P_{m-1}(a_1 b_2 c_3 \dots r_{m-1}) \phi_{m-1} = 0$$

e poichè il primo membro si compone di m polinomi, moltiplicati ciascuno per una lettera ch'esso non contiene, così essa sarà equivalente all'altra

$$P_m(a_1 b_2 c_3 \dots r_{m-1} \phi_m) = 0,$$

e quindi, per essere $\phi = sS + \omega$, si cangerà nella seguente

$$S \times P_m(a_1 b_2 c_3 \dots s_m) + P_m(a_1 b_2 c_3 \dots \omega_m) = 0,$$

osservando che il secondo polinomio è ciò che diviene quello che forma parte del primo termine cambiandovi s coefficiente di S in ω , ultimo termine.

Avendosi pertanto

$$S = -\frac{P_m(a_1 b_2 c_3 \dots \omega_m)}{P_m(a_1 b_2 c_3 \dots s_m)},$$

si vede che questa espressione è subordinata alla legge accennata di so-

pra, e sarà facile di conchiudere altrettanto pei valori delle altre incognite A, B, C, ecc. Questa legge è già verificata per due e per tre equazioni; quindi sarà vera per 4, per 5 ecc. ecc., ed in generale per m equazioni.

12. Risulta da ciò che precede che i valori delle incognite, qualunque sia il numero delle date equazioni, sono espressioni frazionarie, che hanno comune il denominatore; e per comporle può stabilirsi la regola seguente:

1.° Ridotte le equazioni alla forma del §. 8 si formerà il polinomio $P_m(a, b, c, \dots)$, cioè si comporranno colla data regola dei segni le permutazioni delle lettere a, b, c, \dots rappresentanti i coefficienti delle incognite, e quindi si apporranno alle m lettere di ciascuna gl'indici successivi 1, 2, 3, ... Sarà questo polinomio il denominator comune dei valori delle incognite.

2.° Il numeratore poi per ciascuna incognita si dedurrà dal denominatore, cambiandovi il suo coefficiente nell'ultimo termine.

3.° Ad ogni frazione si anteporrà il segno —.

13. Se le equazioni fossero ridotte alla forma

$$aA + bB + cC + \dots + sS - \omega = 0$$

vale a dire con l'ultimo termine negativo, i valori delle incognite si comporranno esattamente nello stesso modo come se ω fosse positivo; ma alle frazioni corrispondenti dee stimarsi preposto il segno +.

14. Se abbiansi m equazioni con $m - 1$ incognite, affinchè possano coesistere conviene che tra i coefficienti si verifichi una certa relazione, la quale si ottiene ricavando da $m - 1$ equazioni i valori delle $m - 1$ incognite, e sostituendoli nella rimanente. Or posto che le date equazioni abbiano la forma

$$\begin{array}{l} a_1A + b_1B + c_1C + \dots + r_1R + \phi_1 = 0 \\ a_2A + b_2B + c_2C + \dots + r_2R + \phi_2 = 0 \\ \text{ecc.} \qquad \qquad \text{ecc.} \qquad \qquad \text{ecc.} \end{array}$$

è chiaro, dopo ciò che precede, che l'equazione di condizione di cui trattasi, sarà

$$P_m(a, b, c, \dots, r_m, \phi_m) = 0$$

cioè il polinomio che risulta dalle permutazioni delle m lettere a, b, c, \dots, ϕ .

$$\begin{aligned} \alpha_1 A + b_1 B + c_1 C + \dots + r_1 R + s_1 S + \omega_1 \Omega &= 0 \\ \alpha_2 A + b_2 B + c_2 C + \dots + r_2 R + s_2 S + \omega_2 \Omega &= 0 \\ \alpha_3 A + b_3 B + c_3 C + \dots + r_3 R + s_3 S + \omega_3 \Omega &= 0 \\ &\vdots \\ \alpha_{m-1} A + b_{m-1} B + c_{m-1} C + \dots + r_{m-1} R + s_{m-1} S + \omega_{m-1} \Omega &= 0 \\ \alpha_m A + b_m B + c_m C + \dots + r_m R + s_m S + \omega_m \Omega &= 0 \end{aligned}$$

Si formi ora con tutte le $m-1$ incognite il gruppo

ABCD . . RSΩ

con quell'ordine che piace; e poi vi si cambii ad una per volta, ciascuna incognita nel suo coefficiente nella prima equazione, scrivendola in primo luogo ed osservando di cambiare il segno per ogni scambio di posto pari, cioè B, D, ecc. Si avranno per tal modo $m + 1$ gruppi di m incognite, preceduti da un coefficiente.

Chiameremo *1. linea* l'insieme di questi gruppi, e però si avrà

$$1. \text{ linea } a_1 \text{BCD} \dots \text{RS} \Omega - b_1 \text{ACD} \dots \text{RS} \Omega + c_1 \text{ABD} \dots \text{RS} \Omega - \dots \\ - + \omega_1 \text{ABCD} \dots \text{RS}.$$

Si pratici con ciascuno di questi gruppi, ciò che si è fatto col primo, ma con la seconda equazione, cioè si scambii ad una per volta ciascuna incognita nel suo coefficiente nella seconda equazione, ed osservando di cambiare il segno ad ogni scambio di posto pari; per esempio, per quello scritto in primo luogo, $a_1BCD \dots RS\Omega$ si cambierà il segno nello scambio di C, di E, ecc. e così per gli altri. Si avrà per tal modo un' altra serie di gruppi, di $m-1$ incognite, l'uno, preceduti ciascuno da un prodotto di due lettere incognite. Diremo 2. linea il loro insieme, e però si avrà

$$2. \text{ lin. } a_1 b_2 \text{CD} \dots \text{RS} \Omega - a_1 c_2 \text{CD} \dots \text{RS} \Omega + \text{ecc. ecc.} \\ - b_1 a_2 \text{CD} \dots \text{RS} \Omega + \text{ecc.} \dots + c_1 a_2 \text{BD} \dots \text{RS} \Omega - \text{ecc.}$$

Ripetendo quest'operazione sui gruppi d'incognite contenuti in questa linea, ma con la terza equazione, osservando di mutare i segni per gli scambi di posto pari, si avrà una *terza linea* con gruppi di $m-2$ incognite, preceduti ciascuno di un prodotto di tre lettere cognite.

Mediante questa *terza linea* e la quarta equazione, si comporrà in pari modo una *4. linea*; e così continuando a formare altre linee finchè

sieno esaurite tutte le m equazioni; avverrà che nell'ultima linea, cioè la m esima, i gruppi d'incognite si troveranno ridotte ad una incognita sola, e ciascuna sarà preceduta da un prodotto di m lettere cognite, tra le quali non esiste quella che ha la stessa denominazione della incognita. Dinotando con una lettera sola l'insieme dei prodotti di queste lettere cognite, che appartengono ad una stessa incognita, l'ultima linea avrà dunque la forma

$$\text{Ultima linea} \quad a'A + b'B + c'C + \dots + r'R + s'S + \omega'\Omega$$

e dessa servirà a dare i valori delle incognite nel modo seguente.

» Ciascuna incognita avrà per valore una frazione il cui numeratore
 » sarà il coefficiente di questa stessa incognita nell'ultima linea, mentre il
 » denominatore comune a tutte sarà il coefficiente, che trovasi avere nel-
 » la stessa ultima linea la incognita introdotta Ω .

$$\text{Quindi sarà} \quad A = \frac{a'}{\omega'} \quad , \quad B = \frac{b'}{\omega'} \quad , \quad C = \frac{c'}{\omega'} \quad , \quad \dots \quad , \quad S = \frac{s'}{\omega'} \quad .$$

16. Bezout si è limitato ad indicar la regola senza darne dimostrazione; ma essa risulta con molta semplicità da' principi da noi esposti. In fatti è chiaro dapprima, che l'ultima linea, a prescindere dalle lettere grandi, e dagli indici delle piccole, contiene le combinazioni ad m ad m delle $m+1$ lettere $a, b, c, \dots, s, \omega$ (V. Teorica delle combinazioni e permutazioni); e però ciascuno dei coefficienti $a', b', c', \dots, s', \omega'$ rappresenterà le permutazioni di m lettere, vale a dire a' quelle che si hanno escluse la a ; b' quelle che si hanno esclusa la b , ecc. ecc. e poscia apposti alle m lettere di ciascuna permutazione gl'indici successivi $1, 2, 3, \dots, m$. In conseguenza sarà (§. 6)

$$a' = -P_{m-1}(\omega_1 h_2 c_3 \dots s_m), \quad h' = -P_{m-1}(a_1 \omega_2 c_3 \dots s_m), \quad \dots, \\ s' = -P_{m-1}(a_1 h_2 c_3 \dots \omega_m), \quad \omega' = +P_{m-1}(a_1 h_2 c_3 \dots s_m).$$

Se sopra questi polinomi si verificasse la regola dei segni (§. 2), è mani-

festo che le frazioni $\frac{a'}{\omega'}, \frac{b'}{\omega'}, \frac{c'}{\omega'},$ ecc. corrisponderebbero esattamente

ai valori delle incognite $A, B, C, D,$ ecc. determinati in altra guisa, ma egli è pur facile assicurarsi di questa circostanza. Si rifletta infatti che se

nell'ultima linea si scambiasse ciascuna lettera grande nella corrispondente lettera piccola, si avrebbero, a prescindere dagli indici, tutte le permutazioni delle $m+1$ lettere $a, b, c, \dots, r, s, \omega$, vale a dire si avrebbe il polinomio $P_{m+1}(abc \dots rs\omega)$ sul quale dee verificarsi la solita regola dei segni; ed in vero il gruppo $ABC \dots RS\Omega$ dev'essere riguardato come il generatore di tutti i termini di questo polinomio, nel quale il termine $abc \dots sr\omega$, in cui le lettere si succedono ordinariamente, dev'essere affetto dal segno $+$.

Or quando in esso si scambia una lettera grande nella corrispondente lettera piccola, e si porta in principio, il numero dei posti che percorre ogni lettera grande di posto pari essendo sempre impari, i segni dei termini che ne risultano debbono esser necessariamente contrari a quello di $abc \dots rs\omega$.

Applicando lo stesso ragionamento a ciascuno dei gruppi della seconda, terza linea ecc. ecc. si conchiuderà infine che i segni dei termini del polinomio $P_{m+1}(abc \dots rs\omega)$ sono gli stessi che quelli che verrebbero con la regola del § 2, la quale si trova dunque applicata anche ai polinomi parziali $P_m(\omega bc \dots rs)$, ec. i quali però avranno tutti segno contrario a quello di $P_m(abc \dots rs)$, (s. 6)

Resta dopo ciò provato che i valori delle incognite, che si ottengono con la regola di Bezout sono gli stessi di quelli che si ottengono con le regole di Cramer.

17. Intanto è evidente che la regola di Bezout si applica tanto alle equazioni letterali qualunque esse sieno, quanto alle numeriche, come pure alle incomplete, dovendo in quest'ultimo caso trascurarsi nel calcolo di ciascuna linea quei termini che risultano dallo scambio di ciascuna incognita nel proprio coefficiente, ov'esso sia o .

Applichiamo intanto questa regola ad alcuni esempi. Sieno dapprima le due equazioni

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ dx + ey + f &= 0 \end{aligned}$$

figurata con z la incognita da introdursi negli ultimi termini, e poscia formato il gruppo

$$xyz$$

si avranno dalla prima e seconda equazione rispettivamente le due linee

$$1. \text{ linea. } ayz - bxz + cxy$$

$$2. \text{ linea } aez - afy - bdz + bfx + cdy - cex$$

$$\text{ossia } (ae - bd)z + (bf - ce)x + (cd - af)y$$

$$\text{e quindi si ha } x = \frac{bf - ce}{ac - bd}, \quad y = \frac{cd - af}{ae - bd}$$

Per secondo esempio sieno le tre equazioni numeriche complete

$$2x - 4y - 9z - 28 = 0$$

$$7x + 3y - 5z - 3 = 0$$

$$9x + 10y - 11z - 4 = 0$$

Figurata con v la incognita da introdursi negli ultimi termini, e formato il gruppo

$$xyzv,$$

si avranno successivamente dalla 1, 2, e 3 equazione le tre linee

$$1. \quad 2yzv + 4xzv + 9xyv + 28xyz$$

$$2. \quad \left\{ \begin{matrix} +2.3 \\ +4.7 \end{matrix} \right\} zv + \left\{ \begin{matrix} +2.5 \\ +9.7 \end{matrix} \right\} yv + \left\{ \begin{matrix} -2.3 \\ +28.7 \end{matrix} \right\} yz + \left\{ \begin{matrix} +4.5 \\ -9.6 \end{matrix} \right\} nv + \left\{ \begin{matrix} -4.3 \\ -28.3 \end{matrix} \right\} nz + \left\{ \begin{matrix} -9.3 \\ -28.5 \end{matrix} \right\} xy;$$

ovvero

$$2. \quad 34zv + 73zv + 190yz - 7xv - 90xz - 167xy$$

$$3. \quad \left\{ \begin{matrix} -34.11 \\ +73.10 \\ -7.9 \end{matrix} \right\} v + \left\{ \begin{matrix} 34.4 \\ 190.10 \\ +96.9 \end{matrix} \right\} z + \left\{ \begin{matrix} +73.4 \\ +190.11 \\ -167.9 \end{matrix} \right\} y + \left\{ \begin{matrix} -7.4 \\ -96.11 \\ +167.10 \end{matrix} \right\}$$

od ancora riducendo

$$3. \quad +293v + 1172z + 879y + 586x$$

$$\text{Laonde si avrà } x = \frac{586}{293} = 2, \quad y = \frac{879}{293} = 3, \quad z = \frac{1172}{293} = 4$$

Questa regola sol perchè non obbliga di ricorrere a formole, e quindi a sostituzione di lettere dee tenersi come più semplice con quella di Cramer; ma la superiorità di questa regola è incontrastabile per l'equazioni incomplete. Eccone un esempio. Siano le quattro equazioni

$$\begin{aligned} 7y - 4z &= 0 \\ 7x + 3z - 7 &= 0 \\ 2z - 7v - 14 &= 0 \\ 2x - 3y - v - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Figurata con u l'incognita da introdursi negli ultimi termini, e formato il gruppo $xyzvu$; si avranno successivamente da queste quattro equazioni le quattro linee corrispondenti

$$\begin{aligned} 1.^{\text{a}} \text{lin.} & - 7xzvu - 4xyvu \\ 2.^{\text{a}} \text{lin.} & - 7^2zvu + 7 \cdot 3xvu - 7^2xzv - 4 \cdot 7yvu + 4 \cdot 3xvu - 4 \cdot 7xyv \\ 3.^{\text{a}} \text{lin.} & - 2 \cdot 7^2vu + 7^3zu + 2 \cdot 7^3zv + 3 \cdot 7^2xu - 2 \cdot 7^2xv + 7^3xz - 4 \cdot 7^2yu + 2 \cdot 4 \cdot 7^2yv + 4 \cdot 7^3xy \\ 4.^{\text{a}} \text{linea} & \left[\begin{array}{c} 2 \cdot 7^2 \\ + 2 \cdot 3 \cdot 7^2 \\ - 3 \cdot 4 \cdot 7^2 \end{array} \right] u + \left[\begin{array}{c} - 2 \cdot 5 \cdot 7^2 \\ - 2 \cdot 2 \cdot 7^2 \\ + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7^2 \end{array} \right] v + \left[\begin{array}{c} - 5 \cdot 7^3 \\ + 2 \cdot 7^3 \\ + 2 \cdot 7^3 \end{array} \right] z + \left[\begin{array}{c} - 4 \cdot 5 \cdot 7^2 \\ + 2 \cdot 4 \cdot 7^2 \\ + 2 \cdot 4 \cdot 7^2 \end{array} \right] y + \left[\begin{array}{c} - 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \\ - 2 \cdot 7^2 \\ - 3 \cdot 4 \cdot 7^2 \end{array} \right] n \end{aligned}$$

Pria di dedurre da questa linea i valori delle incognite è da osservarsi che tutt'i termini hanno il fattor comune 7^2 tanto nel numeratore quanto nel denominatore di ciascuno di quei valori; la riduzione dei coefficienti delle s incognite diverrà dunque assai più semplice, togliendo fin da ora questo fattor comune, di tal che la 4 linea diverrà subito

$$-4u + 10v - 7z - 4y + u,$$

e si avrà di seguito

$$x = -\frac{1}{4}, \quad y = 1, \quad z = \frac{7}{4}, \quad v = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$$

Intanto è pure da rimarcarsi che anche i termini della 2.^a linea hanno il fattor comune 7, e quelli della 3.^a il fattor comune 7^2 ; ed è poi chiaro che il fattor comune di una linea qualunque lo è pure in ciascuna delle linee seguenti, e quindi esso può, e deve anzi per maggior semplicità dei calcoli sopprimersi nelle stesse linee. Per tal guisa la 2.^a e 3.^a linea divengono semplicemente

$$2.^{\text{a}} \text{ linea} = 7zvu + 3xvu - 7xzv - 4yvu - 4xyv$$

$$3.^{\text{a}} \text{ linea} = 2vu - 7zu + 14zv + 3xu - 2xv + 7xz - 4yu + 8yv + 4xy$$

e così il progresso del calcolo diviene di gran lunga più semplice e spedito.

19. Giova finalmente riflettere che nell'applicazione di questa regola è sommamente utile di cominciare il calcolo delle diverse linee da quelle equazioni che si mostrano più semplici e propriamente da quelle cui manca un maggior numero di termini, riserbando al calcolo delle ultime linee le equazioni più complesse. È chiaro, che in tal guisa le calcolazioni divengono assai più semplici; ed è così che vedesi praticato sull'esempio precedente. Se si fosse presa la 2^a per 1^a equazione il calcolo sarebbe stato più lungo; e tanto maggiormente se per prima si fosse presa la 1^a equazione.

MEMORIE

PER LE

SCIENZE NATURALI

PRESENTATE DA' SOCH ALL' ACCADEMIA NELL' ANNO 1853.

E DA ESSA APPROVATE.

RICERCHE

INTORNO

AL MAGNETISMO DELLE ROCCE

MEMORIE PRESENTATE ALL' ACCADEMIA

DAL SOCIO ORDINARIO

MACEDONIO MELLONI

SULLA

POLARITÀ MAGNETICA DELLE LAVE

E ROCCE AFFINI

MEMORIA I.

La maravigliosa proprietà che possiede la bussola , ovvero un ago d'acciajo calamitato e orizzontalmente sospeso, di tener sempre rivolta una delle sue estremità verso settentrione si attribuisce generalmente ad una forza magnetica o elettrodinamica procedente dalle viscere della terra. Noi sappiamo tuttavia che tra le varie sostanze semplici, ond'è formata la porzione sinora esplorata del globo, il ferro nelle diverse combinazioni naturali è uno de' corpi più comuni; e le rocce ferrifere operano quasi tutte più o meno energicamente sulla calamita. Perchè dunque il magnetismo del nostro pianeta non consisterebbe in una potenza analoga alla gravitazione, sicchè la direzione della bussola fosse l'effetto d'una pura risultante delle forze magnetiche diffuse per tutta la massa terrestre? La scienza non possiede ancora i dati occorrenti per rispondere adeguatamente a questo importante quesito.

Ad ogni modo, non è da porre in dubbio l'azione che certe rocce più o men cariche di ferro esercitano sulla posizione d'equilibrio dell'ago magnetico.

E siccome il magnetismo semplice o *unipolare* (analogo a quello del ferro puro) tira a sè ambe le estremità della calamita, dove che il magne-

tismo *bipolare* (1) (simile alla duplice azione attraente e repellente propria dell'ago magnetico) respinge una delle due estremità della calamita ed attrae l'altra, ne segue; che in alcune situazioni della bussola rispetto alla roccia perturbatrice, le variazioni cagionate da queste due specie di forze devono aver luogo in direzioni contrarie: ne segue pure, che la medesima quantità di ferro contenuta in una data roccia sotto una combinazione determinata, deve produrre sulla bussola una perturbazione assai maggiore nel secondo, che nel primo caso.

Ma nessuno, per quanto mi sappia, si occupò finora di simili ricerche; perchè toltono i pochi fatti contrari del tufo di Roscillo, de' basalti di Drevin, e della rupe scistosa dell'Heidelberg, descritti sulla fine del secolo decimottavo da Breislak, da Gnyton e da Humboldt (2), e caduti, non si sa perchè, in una generale dimenticanza, le rocce che alterano ad una prossimità più o men grande la declinazione della bussola si supposero tutte dotate, nel primo terzo di questo secolo, della sola forza attraente e quindi prive della doppia polarità magnetica.

In vano il più celebre de' tre dotti ora nominati tornò sul medesimo argomento nella descrizione posteriore de' suoi viaggi d'America, mostrando come taluni porfidi trachitici del monte Chimboraco e del villaggio di Voisaco presso Quito erano, essi pure, forniti del magnetismo bipolare (3): i fisici ed i geologi continuarono a serbare generalmente nei loro scritti il più assoluto silenzio su questo interessante fenomeno: e la massima parte de' filosofi naturali ignorando o respingendo una serie di osservazioni ben defi-

(1) Le espressioni di magnetismo *unipolare* o *bipolare* non devono prendersi in senso assoluto, ma si bene come semplici modi di dire atti a rendere più chiaro e spedito il discorso. Di fatto, i fisici sanno che ogni qual volta il ferro puro è magneticamente attratto, vi si rinvençon sempre le due polarità magnetiche, e che il movimento prodotto devesi unicamente all'esser l'una di esse, cioè la polarità amica, più energica della nemica in virtù della sua prossimità maggiore, sicchè tale eccesso d'energia d'una delle polarità indotte nel corpo attratto è sempre relativo alla forza magnetica attiva predominante; e però il mobile s'accosta tanto all'uno quanto all'altro polo della calamita. Ecco perchè, attenendosi al risultamento finale può dirsi, che il ferro puro sia dotato della unipolarità magnetica, in opposizione ad un corpo calamitato, o bipolare, il quale è ora attratto ora respinto, in certe date direzioni, dall'uno e dall'altro polo della calamita.

(2) Breislak. *Topografia fisica della Campania*. Firenze 1798 p. 42. — Guyton. *Annales de Chimie*. Paris 1797 t. 24 p. 460. — A. de Humboldt. *Ibidem*. Paris 1797 tom. 22 p. 47.

(3) A. de Humboldt. *Essai géognostique sur le gisement des roches dans le deux Hémisphères*. 42 edit. Paris 1826. p. 93 e 132.

nite sembrò, per così dire, imbevuta della falsa opinione d'uno de' più recenti autori di elettricità e di magnetismo, il quale nega, *a tutte le sostanze che racchiudono del ferro allo stato di combinazione o di semplice mescuoglio, la proprietà bipolare, e concede loro soltanto l'azione attrattiva su ambi i poli della calamita* (1).

Che tale proposizione sia erronea bastavano a dimostrarlo ed i fatti dianzi allegati, ed una precedente osservazione di Romé de l'Isle il quale notò, prima d'ogni altro, l'esistenza del magnetismo bipolare nei cristalli di ferro oligisto. La possibilità di eccitare le proprietà della calamita nella massima parte delle sostanze che racchiudono del ferro allo stato di combinazione o di semplice mescuoglio fu poi ampiamente confermata, tre anni sono, dalle numerose sperienze di Delesse, che ripetendo e variando i risultamenti già ottenuti da Tralles, Haussmann ed Henrici sul ferro speculare e sul serpentino dell'Heidelberg, calamitò in qualunque direzione le lave, i basalti, i serpentinì e moltissime altre rocce e parecchi cristalli feriferi (2). Laonde sarebbe oramai indispensabile che le opere di fisica e di

(1) « *Toutes les substances qui renferment du fer, soit par voie de melange soit par voie de combinaison, agissent sur l'aiguille aimantée; c'est-à-dire exercent sur elle une action attractive; mais pour l'apercevoir, il faut employer quelquefois des appareils délicats, dont nous ne pouvons encore donner la description. Ces substances, quoique réagissant comme le fer doux sur l'aiguille aimantée, n'acquièrent jamais la polarité* ». (Becquerel. *Traité expér. de l'électr. et du magnét.* Paris 1834 tom. II p. 262).

Tredici anni dopo, lo stesso autore scriveva « *Lorsque les roches contiennent du fer, l'action exercée par elles peut être très-énergique; il résulte de là que sous l'influence terrestre elles peuvent posséder la propriété polaire et constituer des aimants permanents* ». (Becquerel etc. *Élém. de phys. terrestre et de météorologie.* Paris 1847 p. 578).

Io non intendo, con queste citazioni, intaccare menomamente il merito scientifico del sig. Becquerel, che so valutar al pari di qualunque altro amatore degli studi fisici. Avrei solamente bramato, che nell'ultima opera egli avesse francamente confessata l'inesattezza della dottrina insegnata nella prima; mostrando, per così dire, d'aver messo in pratica la massima del Fontenelle, il quale dopo d'aver esposto il parer suo intorno agli argomenti sprovvisti di dimostrazione matematica, soggiungeva: *je suis de cette opinion, quant à présent*. E veramente, quando certi dati a noi ignoti, o recentemente scoperti in virtù del progresso o del perfezionamento de' mezzi d'osservazione, vengono a cambiare l'aspetto d'una quistione, perchè dobbiamo astenerci dal convenire dell'errore di una conseguenza risultante dalla imperfezione de' dati anteriori? Non è anzi dover nostro di metter questo errore in evidenza se amiamo sinceramente il vero, e se vogliamo meritare l'onorevolissimo titolo di filosofi?

(2) *Ann. de Chim. et de Phys.* Paris 1849 tom. 25. p. 194 e seg.

geologia contenessero alcune nozioni fondamentali sulle varie specie di minerali atti a ricevere e conservare la doppia polarità magnetica.

Ma lasciamo la quistione ben assodata della molteplicità de' corpi ai quali la presenza del ferro comunica la suscettibilità di potersi calamitare stabilmente come l'acciajo, e veniamo allo scopo principale di questo lavoro.

Non è ancor compiuto l'anno da che l'egregio nostro collega prof. Scacchi aggiungeva alle osservazioni di Breislak, di Guyton e d'Humboldt intorno al magnetismo bipolare che posseggono naturalmente le rocce di Roseillo, di Drevin e dell'Heidelberg un quarto esempio in alcuni pezzi di antichissime lave da lui raccolti sul monte Vulture (1): e due anni prima, in seguito del lavoro citato pocanzi sulla possibilità di comunicare il magnetismo permanente alle sostanze minerali ferifere, il sig. Delesse aveva, dal canto suo, trovato de' segni manifesti di doppia polarità naturale in una dolerite del Grandneato di Baden (2).

Ora, considerando che, se le specie de' terreni ove furono osservati i cinque casi precedenti non erano tutte esattamente conformi alla lava, avevano certamente con essa la massima analogia, sicchè non poteva sorgere alcun dubbio sulla comune loro origine ignea; e riflettendo inoltre, che un cilindro di ferro o d'acciajo rovente mantenuto in una posizione verticale durante il suo passaggio alla temperatura ordinaria, diventa stabilmente calamitato quando gli si comunica, coi mezzi noti a' fisici, una certa dose di quella forza che, per l'attitudine sua a conservare ne' corpi lo stato magnetico, porta il nome di coercitiva; e che finalmente, le lave ed altri minerali feriferi usciti dal seno della terra nello stato d'incandescenza, sono dotati dopo la loro consolidazione di forza coercitiva, come lo dimostrano ad evidenza le predette sperienze del Delesse; mi cadde in animo, che tutte queste specie di rocce dovrebbero possedere una dose più o meno sensibile di magnetismo bipolare; per modo che, gli esempi surriferiti non fossero già eccezioni della legge generale, ma semplici casi particolari dove l'effetto mostrasi più spiccato ed evidente, sia per la maggior quantità di ferro contenuto nella roccia, sia per lo speciale suo stato di combinazione, la rapidità del raffreddamento o l'assenza delle cagioni che

(1) *Il monte Vulture, ed il tremuoto del dì 14 agosto 1851.* Napoli, 1852, p. 70.

(2) *Ann. des Mines* Tom. XV, 4 serie p. 8 della Mem.

alterarono posteriormente la composizione del corpo, o l'energia e la disposizione delle sue forze magnetiche.

Per vedere se l'esperienza era favorevole o contraria a questo mio pensiero, conveniva dunque avere un mezzo pronto e facile di scoprire ne' corpi la qualità della benchè minima virtù magnetica, conveniva, in altri termini, procacciare uno strumento atto a mostrare se l'azione esercitata da un dato corpo sull'ago calamitato, per debole ch'ella sia, procede da una sola forza attraente o da due forze antagoniste che esercitino sulle due estremità dell'ago magnetico gli effetti contrarî dell'attrazione e della repulsione.

Sin dall'epoca in cui Ampère faceva succedere alla memorabile scoperta d'OErsted quella magnifica serie d'induzioni e di sperienze che fondava in pochi mesi due nuove scienze, l'elettro-magnetica e l'elettro-dinamica, io mi prevalsi dell'ingegnosa sua invenzione del doppio ago astatico per adattarla alle più delicate ricerche relative all'esistenza del magnetismo. Lo strumento, che trovai tuttora compreso nelle collezioni dell'Università di Parma sotto il nome di *magnetoscopio*, consiste in una coppia d'aghi calamitati parallelamente fitti coi poli arrovesciati a traverso di un sottil cilindro verticalmente sospeso ad un semplice filo di seta naturale. Questo sistema è del tutto analogo a quello dei galvanometri astatici del Nobile meno le dimensioni; poichè gli aghi hanno nove centimetri di lunghezza e sono tra loro distanti della medesima quantità: l'uno sta nel fondo d'un tamburro verticale sostenuto da tre piedi a vite, l'altro sporge sopra un quadrante diviso, ed è coperto, a cinque o sei millimetri di distanza, da un vetro piano che poggia sopra l'orlo superiore del tamburro, ed è munito d'un foro centrale di due centimetri di diametro, dalla cui circonferenza s'innalza perpendicolarmente un tubo di vetro, lungo venti centimetri, che serve di custodia al filo di sospensione. Alla parte superiore di esso tubo evvi un'asticella mobile intorno al proprio asse ed un foro centrale immobile, che porgono il mezzo di poter allungare od accorciare il filo senza rimuoverlo dall'asse dello strumento. Il quadrante è pertugiato lungo uno de'suoi diametri tanto che basti per servire all'introduzione dell'ago inferiore, e può girare intorno al suo centro, indipendentemente dal sistema astatico e dalle sue pertinenze, mediante che porgono il mezzo di poter allungare od accorciare il filo senza rimuoverlo dall'asse dello strumento. Il quadrante è pertugiato lungo uno de'suoi diametri tanto che ba-

sti per servire all'introduzione dell'ago inferiore, e può girare intorno al suo centro, indipendentemente dal sistema astatico e dalle sue pertinenze, mediante un secondo tamburro interno fornito d'un manubrio sporgente dalla base.

Per mettere lo strumento in attività basta voltare convenientemente l'asticella suprema, il manubrio inferiore e le viti del piede, ora nell'uno ora nell'altro verso, sino a tanto che il sistema astatico si trovi esattamente condotto nella sua posizione centrale, e l'ago visibile possa percorrere liberamente tutta l'estensione della scala.

Non è poi necessario il soggiugnere altre istruzioni quanto al modo di adoperarlo: imperocchè ognuno intende che la maggior lunghezza e distanza degli aghi del magnetoscopio, relativamente a quelli del galvanometro, e la forma della custodia destinata a ripararli dalle agitazioni dell'aria ambiente permettendo di avvicinarsi sommamente all'uno de' quattro poli magnetici e di mantenersi ad una certa distanza dagli altri tre, rende più efficace l'azione da esplorarsi. Sicchè tutto l'artificio dello sperimentatore consiste ad accostare il corpo debolmente magnetico sino al contatto di quella parte della lamina di vetro soprastante ad una delle estremità dell'ago superiore ed a produrre, per attrazione o per ripulsione, il massimo sviamento possibile facendo strisciare il corpo lungo la superficie vitrea (1).

I corpi doppiamente magnetici o calamitati si distinguono di leggieri da quelli puramente magnetici o calamitati, non solo per la proprietà di aver essi due o più porzioni della loro massa capaci di attrarre e respingere la medesima estremità o polo dell'ago calamitato, ma ben anche, e più prontamente, per l'avvicendamento di queste due forze quando si passa dall'una all'altra estremità dell'indice magnetico, senza cambiare la por-

(1) Coloro che in fatto di proprietà letteraria ammettono il solo dato della stampa sosterranno probabilmente che l'idea d'impiegare l'ago astatico allo studio delle deboli azioni magnetiche è dovuta al Nobile, il quale pubblicò la descrizione di un magnetoscopio simile al precedente nelle sue *Memorie ed osservazioni* stampate a Firenze l'anno 1834 Vol. II. pag. 24. Ma chi pone sulla stessa linea della stampa la pubblicità nelle lezioni orali, e consideri soprattutto, che il modello descritto qui sopra fu illustrato e deposto nel gabinetto di fisica dell'Università di Parma sin dal 1832, non converrà forse nella medesima sentenza. Per me, io abbandonerei volentieri, a questo proposito, ogni sentimento d'amor proprio individuale e nazionale, e direi; che i magnetoscopi a due aghi sono applicazioni troppo semplici e dirette del sistema astatico d'Ampère per meritare il titolo d'invenzione, e rientrano pertanto nella numerosa classe delle ingegnose combinazioni sperimentali, che la fisica deve all'illustre fondatore della scienza elettro-dinamica.

zione esplorata del corpo. Anzi gli osservatori che vorranno occuparsi del magnetismo delle rocce risparmieranno tempo e noia trascurando del tutto la prima proprietà ed attenendosi esclusivamente alla seconda. Una sola delle due specie di movimenti risultanti dalle azioni magnetiche esigerà allora una doppia operazione: imperocchè, se avvi ripulsione ad una delle estremità dell'ago calamitato, la roccia possederà indubitatamente uno stato magnetico analogo a quello della calamita, e sarà inutile il verificare, sia l'attrazione immaneabile di quella stessa parte all'altra estremità dell'ago, sia l'esistenza d'una seconda parte della roccia dotata di azioni inverse. Quando poi il lato del corpo accostato all'indice magnetico produca l'attrazione della sua estremità anteriore, converrà cimentare subito l'azione di questo medesimo lato sull'estremità posteriore, giacchè l'attrazione o la ripulsione deciderà allora definitivamente del magnetismo semplice o bipolare appartenente al corpo esplorato.

Dalle nozioni contenute nella tavola seguente si vedrà, che i campioni di lave, trachiti, e rocce congeneri raccolti di qua e di là dal Faro o provenienti dal resto d'Italia, dalla Germania, dalla Francia, dall'Islanda ed altre regioni, essendo stati alle prove ora descritte del magnetoscopio, si mostrarono tutti, come io lo supponeva, più o meno calamitati, cioè forniti d'uno o più punti, i quali respingono l'una o l'altra estremità dell'indice magnetico.

Questa tavola è formata di tre colonne. La prima contiene i nomi e le provenienze delle rocce. La seconda indica le rispettive loro repulsioni sul magnetoscopio. Siccome poi in alcune circostanze queste repulsioni erano tali da spinger l'indice dello strumento oltre i 180° , che costituiscono l'estremo limite di misura, così s'ebbe cura di notare nella terza colonna gli angoli, parimente ripulsivi, ottenuti in siffatte circostanze, da una piccola bussola comune, il cui ago, lungo otto centimetri, essendo scostato di 90° dal meridiano magnetico e quindi abbandonato a sè medesimo, si fermava dopo di aver descritte 75 oscillazioni in 132 minuti secondi. Quanto al sistema astatico del magnetoscopio, esso aveva le dimensioni accennate di sopra e compiva due oscillazioni circa in un minuto; ciò che bastava a render ben distinte le più deboli forze magnetiche delle rocce esplorate, conservando entro i limiti della scala la massima parte degli effetti dovuti alle altre

NOME E PROVENIENZA DELLA ROCCIA.	ANGOLO DI RIPULSIONE (4).	
	al magne- toscopio.	alla bussola.
Angitifiro del monte Vulture, Basilicata, antistorico	180°	45
Lava pirossenica della Valle del Bove, Etna, eruzione del 1852	»	44
» porfirica presso Biancavilla, Etna, epoca ignota	»	10
» pirossenica porosa, Etna, eruzione dell'anno di Roma 631	»	9
» scoriacea, presso Bronto, Etna, eruzione del 1381	»	8
» feldispatica di Somma, Vesuvio antico, antistorica	»	8
» pirossenica del Vesuvio, eruzione del 1613	»	6
» feldispatica di Linosa presso Lampedusa, antichissima	»	5
Basalte dell'isola de' Ciolopi, Etna, epoca ignota	»	4,5
Lava pirossenica presso Catania, Etna, eruzione del 1669	»	4,5
» porfirica della Valle di Calanna, Sicilia, epoca ignota	»	4,3
» pirossenica del Vesuvio, cava Sabotaniello	»	4
Bomba vulcanica di Monte Luaro, Campi Flegrei	»	4
Trachite scoriacea dell'Arso, Ischia, eruzione del 1301	»	4
Lava pirossenica del Vesuvio, eruzione del 1850	»	3,6
» pirossenica dell'Etna, eruzione dell'anno di Roma 631	»	3,5
Trachite del cratere degli Astroni, Campi Flegrei, antistorica	»	3
Porfido traibitico di Raccomanina, Terra di Lavoro, antichissimo	»	3
Bomba del Vesuvio, eruzione del 1822	»	2,5
Trapp amiddaloideo con anelime, Islanda	»	2,5
Trachite scoriacea del cratere di Campana, Campi Flegrei	»	2,3
Basalte de' vulcani estinti della Valle di Nolo, Sicilia	»	2
Scoria del vulcano sottomarino che formò l'isola scomparsa di Sciaccia	»	2
Lava tabulare della Montagnola, sommità dell'Etna	»	2
» con hauque di Niedernending presso Coblenz	»	1,5
Trapp amiddaloideo di Onondarfiord, Islanda	»	1,5
Lava pirossenica de' fratelli pii, Etna	»	1,5
» presso Bronte, eruzione del 1813	»	1,3
Trachite di Campagnano, Ischia	»	1,3
Lava porfirica alterata della Valle di Calanna, Sicilia	»	1
» feldispatica del piano del lago, cima dell'Etna	»	1
» pirossenica del piano del Principe, Vesuvio	»	1
» pirossenica di Torre dell'Annunziata, Vesuvio	»	0,9
Conglomerato vulcanico metamorfizzato di Castel d'Acì, Etna	»	0,8
Leucitifiro a grossi cristalli di leucite, vulcani di Roccamanina	»	0,8
Augitifiro del Vesuvio, eruzione del 1631	120	0
Lava pirossenica di Boscoreale, Vesuvio	120	»
Augitifiro amiddaloideo delle Isole Eolie	100	»
Gneiss di Siebehn, Sassonia	90	»
Lava di Laacher-see, Valle del Reno, antistorica	85	»
» basaltina di Capo di bove, Romagna	80	»
Masso erratico di ruina, augite, e ferro ossidato, Vulture	78	»
Conglomerato vulcanico metamorfizzato, Somma	75	»
Idem del Vulture	70	»
Trachite della collina Rotondella, Astroni, Campi Flegrei	65	»

(4) I campioni esplorati non essendo eguali in volume o in peso, alcuni di loro essendo stati raccolti allo stato erratico, altri spacciati sotto varie inclinazioni dalla sommità, dal centro o dal fondo delle rocce, ed altri finalmente estratti dalle collezioni pubbliche e private, senza nessuna cognizione intorno alle circostanze che potrebbero, per avventura, averne modificate le condizioni magnetiche, è chiaro che le loro azioni sugli strumenti magnetoscopici non possono né devono prendersi in senso assoluto. Il punto essenziale consisteva nel mostrare che questi campioni erano più o meno calamitati; bastava pertanto mettere in evidenza le loro repulsioni magnetiche. Il valore esatto di tali repulsioni era in certa qual guisa superfluo. Per dare un esempio partente delle differenze d'energia che s'incontrano talora tra le forze magnetiche de' diversi frammenti d'una medesima corrente di lava, riferiremo gli angoli massimi di repulsione prodotti sulla bussola ordinaria da alcuni campioni di grossezze presso a poco uguali della lava eruttata dall'Etna nell'anno di Roma 631*, che corrisponde all'anno 122 dell'era cristiana.

1.° campione 9.

2.° » 3,5

3.° » 1,2

Qualunque sospetto d'incertezza sulla comune origine di questi tre pezzi di lava o sulle diverse provenienze delle rocce appartenenti a' vulcani della Sicilia e delle isole circostanti dovrà necessariamente svanire quando si saprà che, tanto i minerali quanto le nozioni ad esse relative ci vennero cortesemente somministrati dal chiar. profess. di Catania Carlo Gemellaro.

NOME E PROVENIENZA DELLA ROCCIA.	ANGOLO DI RIPULSIONE	
	al magne- toscopio.	alla bussola.
Trachite di Montagnone, Ischia	63	0
Leucitofiro, tra Sessa e Roccamonfina	60	"
» erratico della foce del Fusaro, Campi Flegrei	60	"
Trapp con analcime, Etna	58	"
Leucitofiro di monte Somma	58	"
Fonolite d'Ausig, Boemia	57	"
Clorite scistosa anfibolica di Zoptan, Moravia	50	"
Trapp di Montecchie maggiore, Vicentino	48	"
Augitofiro di S. Maria del pianto, Napoli	46	"
Lava turchinaccia di Pozzo vecchio, isola di Procida	45	"
Trachite di Fossa lupara, Campana, Campi Flegrei	45	"
Lava cellulare della Valle di Calanna, Sicilia	40	"
» feldispatica alterata del Balzo di trifoglietto, Sicilia	40	"
» amiddaloidea di Vulcano, Isole Eolie	39	"
» trachitica della punta de'monaci, isola di Procida	38	"
» de'colli della valle del Bove, Etna	36	"
» delle pietre arse, isola di Procida	33	"
Augitofiro scomposto dalle fumarole del Vesuvio	30	"
Trachite isolata della Solfatara, Campi Flegrei	30	"
Basalte con arnotomo di Honnef presso Bonn	29	"
Leucitofiro di Roccamonfina, terra di Lavoro	29	"
Trachite della punta S. Alessandro, Ischia	28	"
» dell'Arso presso punta Molino, Ischia	27	"
» friabile degli Astroni, Campi Flegrei	27	"
» della punta Caruso, isola d'Ischia	26	"
» in massa de'crateri di Campana, Campi Flegrei	25	"
» di monte Rotaro, Ischia	25	"
» friabile di Fossa lupara, Campi Flegrei	24	"
» di Monte Spina, Lago d'Agnano	24	"
Leucitofiro vetrificato del cratere del Vesuvio	23	"
» del monte Cortinella, Roccamonfina	23	"
Grünstein di Maxen, Sassonia	22	"
Trachite del monte Ofelio, Roccamonfina	22	"
» del monte Olibano presso Pozzuoli	22	"
» del monte Taborre, Ischia	21	"
Sienite di Frederikswarm, Svezia	21	"
Perlite amiddaloidea di Vulcano, Isole Eolie	20	"
Trachite della punta S. Pietro, Ischia	20	"
» scoriacea del bosco Maranisi, Crateri di Campana	19	"
» di Vulcano, Isole Eolie	19	"
Leucitofiro di Valogno, Roccamonfina	18	"
Conglomerato vulcanico della Somma	18	"
Serpentino di Zöblitz, Sassonia	17	"
Ruiofiro del vulcano di Melfi	16	"
Trachite con breistakite del monte Olibano, Pozzuoli	16	"
Basalte anfibolico di Predazzo, Tirolo	15	"
Ossidiana di Lipari, Isole Eolie	14	"
Lava trachitica di Monte nuovo, Campi Flegrei	14	"
Leucitofiro amiddaloideo erratico del Fusaro, Campi Flegrei	13	"
Trachite del monte Pezza, Ischia	12	"
» di Monte Spina, Lago d'Agnano	12	"
Conglomerato vulcanico metamorfizzato, Etna	11	"
» con cristalli liberi d'augite, Somma	11	"
Granito di Zobtenberg, Slesia	10	"
Stignite de'Campi Flegrei	10	"
Sienite delle vicinanze di Dresda	10	"
Lava pirossenica con ialite di Vulcano, Isole Eolie	9	"
Trachite isolata di Monte nuovo, Campi Flegrei	9	"
» di Monte Ofelio, Roccamonfina	8	"
» del Monte Taborre, Ischia	7	"
» vitrea di S. Maria del pianto, Napoli	5	"
» vitrea di Porriacchio, Procida	5	"
Sienite iperstenica di Muddesprung, Harz	4	"

Le repulsioni dell'indice, molte delle quali sono visibili sulla bussola e le altre tutte distintissime al magnetoscopio, manifestano dunque chiaramente la qualità del magnetismo delle lave e rocce affini che son tutte, giova ripeterlo, calamitate, e non già semplicemente magnetiche con alcune rarissime eccezioni di polarità, come s'era creduto sino al giorno d'oggi.

Ma se' tu ben certo, soggiugnerà forse taluno, che le indicazioni delle tue macchine sotto l'azione delle lave procedono da vere forze magnetiche? E non potrebbero esse derivare da altre cagioni?

Per chiarire la quistione si fattamente da non doversi più ragionevolmente muover dubbio intorno alla natura delle perturbazioni esercitate dalle lave sulla direzione normale dell'ago calamitato, si dovrebbe dimostrare, che questi minerali sostituiti alle calamite riproducono esattamente gli stessi fenomeni magnetici, converrebbe cioè accertarsi: 1.° che le lave sono attratte e respinte dalle calamite; 2.° che alcune parti di queste rocce si attraggono tra di loro, ed altre si respingono; 3.° che le dette rocce convenientemente sospese si dirigono per l'azione del globo terrestre; 4.° che spezzando per traverso un prisma o cilindro di lava il quale abbia i suoi centri di massima attrazione e di massima repulsione verso l'una e l'altra estremità dell'asse, le due frazioni danno le medesime azioni del cilindro intero; sicchè una delle loro estremità attrae e l'altra respinge lo stesso polo dell'ago calamitato. E, per quanto mi sappia, quest'ultimo caso soltanto fu osservato da Humboldt, da Breislak, e dagli altri scienziati che credettero rinvenire nella doppia polarità magnetica di taluni minerali una eccezione alla supposta legge generale della unipolarità di qualunque roccia ferrifera.

Per rendere il doppio magnetismo delle lave una verità irrefragabile, era dunque necessario chiarirsi degli altri tre casi e vedere, se realmente le prefate rocce vulcaniche si attraggono e si respingono in virtù del magnetismo terrestre. Ora questi tre fatti capitali furono da me posti in evidenza sospendendo delicatamente un piccolo prisma di lava all'estremità d'un filo di seta naturale lungo 25 centimetri, e fissando, con un po' di cera molle, l'altra estremità contro un punto eccentrico della volta d'una campana di vetro; per modo che il pezzo di lava girava liberamente intorno all'asse di sospensione rasentando una delle pareti laterali del recipiente.

Con questo semplicissimo congegno vidi infatti il corpo sospeso girare pian piano orizzontalmente, ora a destra, ora a sinistra dell'osservatore, secondo che gli si accostava esternamente l'uno o l'altro verso d'un pezzo di lava; e vidi poi questi medesimi movimenti di rotazione riprodursi con una energia molto maggiore quando, in vece della lava, s'adoperava una spranga calamitata. Abbandonando finalmente il mobile alla sola azione direttrice della terra, esso incominciò ad oscillare lentamente intorno ad una certa direzione dell'orizzonte ove finì per arrestarsi; scostato più volte da questa posizione d'equilibrio in virtù d'una calamita, egli vi tornò costantemente dopo alcune oscillazioni.

Osserviamo che questi movimenti di attrazione e di repulsione si producono accostando le lave e le camite all'esterno del recipiente, precisamente come si manifestano gli effetti delle forze magnetiche ordinarie a traverso i vetri delle bussole e de'magnetoscopi; e che, nel caso delle azioni sufficientemente intense onde poter operare ad una certa distanza, si ottengono ancora gli stessi fenomeni quando s'interpone, fra la custodia di vetro ed il corpo donde emana la forza perturbatrice, una lamina più o meno grossa di legno, di cartone, di porcellana, di marmo, o d'un metallo qualunque, tranne il ferro: ciò che rende compiuta la serie de' caratteri comuni alle forze magnetiche provenienti dalle lave e dalle calamite naturali ed artificiali.

Non sarà forse inutile l'avvertire chi volesse ripetere queste curiose esperienze, che le lave più acconce allo scopo devono esser leggere, porose, e dotate di discreta virtù magnetica, come quelle trachitiche e spugnose che trovansi nel luogo detto *L'Arso* situato nella parte settentrionale dell'isola d'Ischia. Una certa leggerezza è infatti necessaria per non gravar troppo l'esilissimo filo di seta estratto direttamente dal bozzolo; ed è pur necessaria una certa facilità di divisione onde si possa formare il cilindretto da appendersi, il cui asse magnetico deve evidentemente disporsi orizzontalmente, secondo la maggior dimensione del mobile, quando si voglia ottenere il massimo effetto possibile: ognuno intende finalmente, che i fenomeni si renderanno tanto più sensibili, quanto più intenso sarà il magnetismo della roccia: i prismi tratti dalle predette lave d'Ischia compiono, in virtù di quest'ultima forza, due oscillazioni circa per minuto, sotto una lunghezza di 15 o 20 millimetri.

Ed è poi bello il vedere come tagliando la roccia, ora per l'uno, ora

per l'altro verso, relativamente alla direzione secondo la quale trovansi situati i punti più attivi, si possano avere de' prismi o cilindri mobili che si fermano in varie posizioni rispetto all'ago calamitato. E però, oltre quelli che si dispongono da settentrione a mezzogiorno, se ne ottengono altri che dirigonsi da levante a ponente, da greco a libeccio, e via dicendo.

Humboldt osservò, che la roccia scistosa dell'Heidelberg, la cui virtù magnetica è tanto poderosa da capovolgere in talune situazioni l'ago calamitato alla distanza d'un metro, non attrae da vicino la menoma particella di ferro; Breislak ed il prof. Seacchi verificarono la stessa incapacità di sollevare le dette particelle nel tufo di Roscillo e nella lava del Vulture. Laonde non recherà punto maraviglia se tutte le rocce magnetiche da me sottoposte all'esperienza non presenteranno alcun segno di attrazione al contatto della più fina limatura di ferro.

Tuttavia i minuti frammenti di questo metallo aderiscono sì copiosamente alle calamite naturali ed artificiali, che riesce difficile il reprimere ogni sentimento di sorpresa quando si mette in parallelo, ne' casi più cospicui come quello osservato da Humboldt, la mancanza d'attrazione della polvere vicinissima di ferro, colla proprietà di operare sull'ago magnetico ad una distanza molto maggiore, che nol farebbe una delle più poderose calamite. Stantechè le due forze sono, in ultima analisi, del tutto identiche e non si capisce, di prima giunta, perchè la roccia che da lontano tira sì possentemente a sè una delle due estremità della bussola, perda poi ogni virtù attraente al contatto di corpicciuoli sì leggeri, quali sono appunto i polviscoli metallici.

Ma pochi momenti di riflessione bastano per trovar la ragione sufficiente del fenomeno nella debolezza e diffusione di alcune forze, rispetto all'energia e concentrazione delle altre. Imperocchè la risultante di molte deboli attrazioni provenienti da diversi punti di una gran massa può superare da lontano l'azione di poche forze attraenti assai più intense ma ristrette in poco spazio, ed esserle poi inferiore da vicino. Ora il polo, ossia quel punto della calamita ove si concentrano, per così dire, tutte le sue vigorose forze di attrazione, s'accosta nell'esperienza della limatura di ferro sino ad una brevissima distanza, e tale prossimità non può effettuarsi per le fievoli e disperse azioni magnetiche della rnpa, se non se relativamente ad una piccolissima parte aliquota: l'energia della prima azione deve dunque essere immensamente superiore alla seconda. Per motivi del

tutto analoghi il diminuire rapidissimo delle forze proveniente dallo scostamento (che segue la ragione de'quadrati delle distanze) si renderà molto più efficace nella spranga calamitata che nella rupe magnetica, e le azioni di questi due corpi assumeranno bentosto un ordine inverso del precedente divergendo di più in più tra di loro; sicchè ad un certo limite di lontananza l'effetto dovuto alla rupe magnetica diverrà superiore d'assai a quello della spranga calamitata.

È poi facile il dimostrare direttamente che anche le calamite perdono la virtù di attrarre le più minute particelle di ferro quando la loro forza giunge ad un dato grado di languidezza. Infatti si disponga verticalmente una spranga di ferro puro, grossa uno o due centimetri e lunga 80 o 100, e s'accosti la sua estremità inferiore al polo settentrionale della bussola: questo polo verrà respinto, l'altro attratto, e l'ago così capovolto seguirà la spranga in qualunque posizione intorno al piano dello strumento.

Si ripeta ora la medesima esperienza sull'estremità della bussola volta a mezzogiorno impiegandovi la sommità della spranga recata a livello dello strumento: lo stesso fenomeno si riprodurrà in senso inverso relativamente alle due estremità dell'ago magnetico; per modo che il polo meridionale fuggirà la spranga ed il polo settentrionale le terrà dietro nel suo movimento.

Avvi dunque ripulsione ed attrazione dell'uno e dell'altro polo alle due estremità della spranga, che trovasi per conseguente calamitata nell'istante dell'esperienza.

Ora, rimossa la bussola e posta la limatura di ferro a contatto della estremità inferiore, o di qualsiasi altra parte di questo corpo calamitato, non si ottiene nè sollevamento, nè aderenza della benchè minima particella metallica. Anche qui le calamite sufficientemente affievolite operano dunque come le rocce magnetiche: e resta quindi provata l'insussistenza di tutte le obbiezioni relative alla polarità magnetica delle lave.

La virtù calamitica acquistata da una spranga o cilindro di ferro puro verticalmente disposto chiamasi da' fisici *magnetismo di posizione*, perchè dipendente dalla situazione superiore o inferiore delle porzioni estreme, e non già dalla loro individualità. Capovolta infatti la spranga, quella tale estremità che respingeva il polo settentrionale ed attraeva il polo meridionale, inverte le proprie forze e produce azioni opposte, respingendo il secondo polo ed attraendo il primo; e così pure dell'altra, che, contraria-

mente alle sue affezioni primitive, attrae dopo il capovolgimento il polo meridionale e respinge il polo settentrionale.

Per rendere ben chiara e manifesta la cagione del magnetismo di posizione, ed intendere perfettamente lo scopo di alcuni lavori da me fatti eseguire sopra una delle numerose correnti di lava che circondano questa metropoli, è d'uopo ricorrere a certe sperienze ed osservazioni di fisica terrestre, che procurerò di esporre brevemente e colla massima semplicità possibile.

Si pigli un'asta o cilindro d'acciajo grosso un pollice e lungo 8 o 10 ed un ago ordinario da cucire, e dopo d'averli tutti e due calamitati si sospendano, separatamente, pel loro punto di mezzo ad un filo, onde conoscere e notare le estremità P, p, che si volgono a settentrione, e le estremità Q, q, che guardano a mezzogiorno.

Rimossa poi l'asta calamita dal suo sistema di sospensione s'introduca nel bel mezzo d'un globo di legno di due o tre piedi di diametro: è chiaro che l'asse magnetico traverserà il centro, e che essendo prolungato col pensiero segnerà sulla superficie due punti opposti, tra i quali si potrà immaginar condotto un equatore o circolo massimo perpendicolare all'asse ed avere pertanto la superficie divisa in due emisferi che, per amor di brevità, chiameremo co' nomi stessi de' poli magnetici più vicini; sicchè l'un d'essi sarà per noi l'emisfero P, e l'altro l'emisfero Q. Affine di non confondere i poli di questi due emisferi con quelli della spranga magnetica sottostante ci serviremo della denominazione di centri di superficie, senza incorrere perciò in errori etimologici, stantechè la loro distanza da qualunque punto dell'equatore è costante.

Ciò posto, si fermi orizzontalmente l'asse magnetico del globo, ma in direzione diversa da quella della bussola. Stretto poscia tra le dita il capo libero del filo che sostiene l'ago da cucire magnetizzato, si trasporti superiormente al centro della sfera, e si faccia scendere pian piano, mantenendolo sempre sulla verticale. L'ago che, in virtù dell'azione magnetica terrestre, stava fuori del piano verticale condotto per l'asta calamitata, vi si andrà man mano accostando nella discesa, e vi si disporrà finalmente, ad una piccola distanza dalla superficie sferica: le sue estremità si troveranno allora inversamente situate rispetto ai poli magnetici della spranga interna; per modo che q sarà volto verso P, e p verso Q. Ambedue staranno però ancora sollevate al medesimo livello.

Ma l'orizzontalità verrà immediatamente distrutta quando il mobile passerà sull' uno o sull' altro emisfero ; e vedrassi l' estremità dell' ago che guarda verso il centro della superficie emisferica, tanto maggiormente inclinata, quanto più l' osservazione si compierà lontano dall' equatore.

In queste diverse stazioni l' ago scostato dalla sua posizione d' equilibrio vi tornerà con una serie di oscillazioni , le quali si faranno tanto più celeri e vibrato, quanto maggiore sarà l' inclinazione dell' ago, e quindi la distanza all' equatore. Siffatto accrescimento di vivacità nel moto vibratorio dello scandaglio magnetico accenna evidentemente un aumento nell' energia della forza motrice, che dovrà pertanto esser minima all' equatore, massima a' centri delle due superficie emisferiche.

Ognun intende che l' orizzontalità e la debolezza primitiva delle oscillazioni sono dovute alla egual distanza da' due poli magnetici, e la successiva inclinazione ed accelerazione del moto vibratorio, alla maggior vicinanza dell' uno di essi poli. S' intende del pari, che da questa maggior prossimità d' una delle estremità magnetiche ne nascerà la predominanza del magnetismo P nell' emisfero P, e del magnetismo Q nell' emisfero Q, come pure un aumento graduale d' azione di mano in mano che si va scostando dall' equatore.

Ora, tutti i viaggiatori che nelle loro peregrinazioni marittime traversarono colla medesima nave molti gradi di latitudine han potuto osservare sull' ago calamitato , che serve di guida ai naviganti nelle vaste solitudini dell' Oceano, de' fenomeni d' inclinazione totalmente analoghi a quelli che abbiám ora descritti. Imperocchè, prendendo per punto di partenza la linea equinoziale e progredendo verso l' uno o l' altro polo della terra, l' estremità della bussola volta a tramontana scende gradualmente sotto la linea di livello nell' emisfero boreale, ed assume una inclinazione opposta nell' emisfero australe. Laonde, per ristabilire l' orizzontalità , il nocchiero deve allontanare od accostare più o meno al centro di sospensione un piccolo contrappeso a scorsoio disposto appositamente dal costruttore sopra uno de' lati dell' ago magnetico.

Di più ; gli osservatori che , privi di strumenti di precisione, vogliono conoscere in un dato punto del globo la vera direzione impressa dal magnetismo terrestre all' ago calamitato, usano sospendere orizzontalmente un sottil prisma o cilindro d' acciaio temperato ad un filo senza torsione e gli comunicano poscia, coll' uno de' metodi conosciuti , lo stato magnetico

permanente. Il cilindro si vede allora animato da due forze direttrici, una delle quali lo fa oscillare intorno ad una linea diretta da settentrione a mezzogiorno, e l'altra gli fa perdere la posizione orizzontale; sicchè il mobile finisce per fermarsi stabilmente nel meridiano magnetico conservandosi obliquo all'orizzonte, colla sua estremità settentrionale sotto o sopra il piano di livello condotto pel centro di sospensione, secondo che l'esperienza si compie nell'emisfero boreale o nell'emisfero australe. Questa obliquità cresce andando verso l'uno o l'altro polo, e sparisce compiutamente quando l'osservazione ha luogo in certi dati punti della zona torrida che formano una curva inclinata di alcuni gradi sull'equatore. Finalmente, contando le oscillazioni che l'ago scostato dalla sua posizione d'equilibrio compie nel medesimo intervallo di tempo, si trovano tanto più veloci e numerose, quanto più si va accostando alle regioni polari.

I movimenti dell'ago calamitato alla superficie terrestre sono dunque perfettamente rappresentati dalla nostra esperienza del globo di legno internamente munito di una spranga magnetica. E però, lasciando del tutto intatta la quistione relativa alla cagione del fenomeno, possiamo francamente asserire che la terra si comporta come se racchiudesse nel suo seno una gran calamita donde provenissero le forze magnetiche osservate. Se, per maggior semplicità, applichiamo a queste forze i nomi geografici corrispondenti, direi dunque che il *magnetismo boreale* sta nell'emisfero boreale, ed il *magnetismo australe* nell'emisfero australe. Adottate siffatte denominazioni, la virtù magnetica appartenente all'estremità settentrionale dell'ago calamitato dovrà chiamarsi australe, e boreale quella dell'estremità contraria: in altri termini; il magnetismo australe risiederà nel polo della bussola che guarda verso tramontana, ed il magnetismo boreale nel polo che guarda verso mezzogiorno. Ciò risulta manifestamente dalle posizioni inverse che, nell'esperienza del globo di legno, assumono i poli o estremità dell'ago sospeso relativamente a quelli dell'asta magnetica.

Partendo da considerazioni del tutto analoghe si renderà pure manifesto: 1. che nel nostro emisfero la causa del magnetismo di posizione si è la predominanza della forza magnetica boreale; 2. che la virtù magnetica eccitata da questa forza nelle spranghe verticali di ferro puro sarà necessariamente australe alla parte inferiore, e boreale alla parte superiore; 3. che la minima azione si otterrà mettendo la spranga orizzontale e vol-

tandola poi perpendicolarmente al meridiano magnetico, cioè perpendicolarmente al piano verticale innalzato secondo la direzione della bussola ordinaria di declinazione; 4. che per avere il massimo effetto, non si dovrà disporre la spranga verticalmente, ma parallelamente all'ago magnetico d'inclinazione, che ne' nostri climi forma un angolo di 50 a 60 col'orizzonte.

Eccoci ora in possesso delle nozioni necessarie per intendere la distribuzione probabile delle forze magnetiche nelle rocce ferrifere d'origine ignea, giusta l'opinione che attribuisce la genesi di tali forze all'azione del magnetismo terrestre. L'analogia tra così fatta distribuzione e quella del magnetismo di posizione sarà completa. E però, nelle correnti di lava consolidate sotto queste latitudini il magnetismo australe dominerà, generalmente parlando, alla parte inferiore, ed il magnetismo boreale alla parte superiore: la massima energia de' due principii dovrà tuttavia incontrarsi nella direzione del meridiano magnetico inclinata di 50 a 60 verso settentrione, e la minima energia nella direzione perpendicolare a questa inclinazione ed al meridiano magnetico.

Osserviamo in primo luogo, che se nelle rocce calamitate del nostro emisfero avvi realmente sovrapposizione del magnetismo boreale al magnetismo australe, sarà oltremodo facile il verificarlo. Basterà infatti staccare un piccol frantume di queste rocce giacenti nella loro posizione iniziale, dopo di avervi segnate con alcune intaccature le porzioni superiori ed inferiori; le quali porzioni essendo poi cimentate al magnetoscopio dovranno condursi come le parti estreme d'un cilindro di ferro verticalmente disposto, cioè a dire, che il polo australe dell'indice magnetico dovrà essere attratto dalle estremità superiori e respinto dalle estremità inferiori. Vi sarà solamente tra queste due azioni magnetiche la differenza, che il ferro cambia, come abbiain veduto, la sede delle forze attraenti e repulenti colla varia sua situazione rispetto all'orizzonte; dove che la roccia, verticale od obliqua, diretta o inversa, dovrà mostrarsi costantemente dotata della medesima forza alla medesima estremità. Ora tutte le lave antiche o moderne appartenenti a' sistemi geologici del Vesuvio e de' Campi Flegrei da me studiate a questo modo, confermarono col fatto le previsioni della teorica: i punti che stavan sopra nella loro giacitura naturale attrassero, ed i punti che stavan sotto respinsero il polo australe dell'indice magnetoscopico: quelli erano, per conseguente, dotati di magnetismo boreale

e questi di magnetismo australe. Siffatte azioni non variavano colla posizione diretta o inversa del campione presentato all'indice del magnetoscopio: desse eran dunque pertinenti a quel tale o tal punto di esso campione e provenivano da una bipolarità magnetica permanente affatto simile alla calamita, e non già da un doppio magnetismo fugace come quello concepito da una spranga verticale di ferro.

S'immagini ora uno de' massi ben compatti di lava, fermo tuttora sulla prima sua base, tagliato e lavorato in una delle facce laterali secondo un piano verticale diretto giusta il meridiano magnetico. Abbiassi un modello di figura rettangolare allungata ricavato da un foglio di cartone o di latta. S'applichi reiteratamente questo modello contro la detta faccia verticale lavorata, per modo che i lati di maggior dimensione seguano successivamente le direzioni dell'orizzonte, del filo a piombo, e della inclinazione magnetica. Si segnino stabilmente sulla roccia i tre contorni e si faccia poi cadere il masso rimuovendo il terreno sottostante. Si estrarcano infine a colpi di scarpello i tre disegni tramutati in prismi rettangolari perfettamente uguali, o si esplorino le rispettive loro virtù magnetiche.

Dopo quanto abbiain veduto è chiaro, che in tutti vi sarà superposizione del magnetismo boreale al magnetismo australe, ma che però lo stato calamitico risultante dal complesso di questi due principii sarà più vigoroso nel prisma tratto dalla posizione obliqua, più debole nel prisma orizzontale, intermedio nel prisma verticale.

Queste deduzioni teoriche furono pienamente confermate da confronto degli angoli di ripulsione e d'attrazione prodotti nel magnetoscopio dalle estremità omologhe di solidi d'egual dimensione e figura, estratti da una cava di Portici conosciuta sotto il nome di *Caramanica*. Le sezioni si fecero nel fondo dello strato, pochi pollici lontano dal letto di scorie sottostante, perchè ivi soltanto la roccia era di una tessitura uniforme, siccome accade ordinariamente nelle correnti di poca profondità. Ecco i valori delle ripulsioni prodotte da tre prismi lunghi 32 centimetri con base quadrata di 10 centimetri.

Prisma	orientale	22
	verticale	45
	diretto secondo l'inclinazione dell'ago magnetico	61

Sarebbe stato indubitabilmente utile per la geologia e per la fisica del

globo il variare queste sperienze , e soprattutto il ripeterle togliendo successivamente i pezzi di lava da compararsi magneticamente insieme , dal centro e dagli strati superiori ed inferiori d'una delle poderose correnti vesuviane che si lavorano negli scavi della *Scala* e della *Villa Inglese*, onde studiare le forze magnetiche della superficie, del fondo e della parte intermedia, e vedere se la loro distribuzione è uniforme , oppure se gli elementi superiori hanno influito sull'energia e la direzione degli elementi centrali. Ma fui trattenuto dal timore d'incorrere in ispece eccedenti i limiti che mi sono prescritti dalle circostanze attuali ; e però queste ultime ricerche verranno da me differite a tempi più opportuni , quando non siano prima felicemente condotte a termine da altri osservatori.

Dal complesso de' fatti contenuti nell'ultima parte di questa memoria sembra intanto risultarne colla massima evidenza ; che l'origine del magnetismo bipolare , più o meno intenso , da noi rinvenuto in qualunque specie di lava ed altre rocce d'analogia formazione, si è la forza magnetica della terra. Ora questa forza può operare sulle materie fuse per l'azione del calore in due modi diversi: rapidamente , per conseguenza dell'abbassamento di temperatura e del consecutivo passaggio allo stato di solido : o lentamente , per virtù dell'accumulazione successiva degli effetti prodotti nella materia consolidata. Il primo caso è quello da noi sostenuto: il secondo si appoggerebbe sull'analogia delle calamitazioni che succedono , coll'andar del tempo, nelle croci o punte de' campanili, nelle banderuole, ne' parafulmini , ed altri oggetti di ferro , i quali rimangono più o meno lungamente esposti alle vicissitudini dell'atmosfera.

L'ispezione della tavola generale fornisce già una prova bastantemente dimostrativa in favore della prima opinione ; imperocchè le lave consolidate sotto gli occhi nostri non sembrano punto inferiori nella forza magnetica a quelle de' vulcani estinti sino dalla più remota antichità (1).

Ma una prova , a nostro credere evidentissima , della calamitazione delle lave ne' primi tempi della formazione si è la tenacità colla quale esse conservano il proprio stato magnetico. Questa tenacità è tale, che fermato stabilmente un pezzo di lava in una posizione diversa dalla sua natural

(1) È chiaro che qui si fa astrazione dal primo campione della tavola raccolto dal prof. S cacchi sul monte Vulture, dovendosi esso riferire ad uno di que' pochi casi particolari, ove l'energia magnetica si è straordinariamente esaltata pel concorso di quelle tali circostanze speciali menzionate alla pag. 124.

giacitura, sicchè il magnetismo boreale non sia nè superiore, nè situato nello stesso piano verticale del magnetismo australe, le centinaia e migliaia d'anni non valgono a riprodurre l'equilibrio nelle condizioni volute dalla forza magnetica della terra.

Per quanto strana sembri a primo aspetto così fatta proposizione, noi abbiain potuto dimostrarla col massimo rigore estraendo dalle pareti dell'anfiteatro di Pompei de' pezzi di leucitofiro ed altre qualità di lave, che esplorati col magnetoscopio si trovarono calamitati sotto qualunque inclinazione rispetto all'orizzonte; prova manifesta, che quelle pietre vulcaniche conservarono i loro assi magnetici nelle posizioni medesime che riceverterro dalla mano dell'uomo diciannove o venti secoli fa, all'istante del loro impiego come materiali di fabbrica. Ma se la terra non può alterare la distribuzione de' due principii magnetici nella lava consolidata, l'eccitazione e l'equilibrio di questi principii non derivano certamente dall'azione esercitata sulla roccia nel suo stato presente. Dunque la calamitazione fu prodotta quando la lava recentemente comparsa alla superficie del globo, trovavasi in circostanze diverse di coesione e di temperatura.

Le chimiche reazioni effettuate durante il consolidamento delle lave e le modificazioni che ne risultano nell'intima loro struttura, sono quasi del tutto ignote, e non possiam quindi asseverare se contribuiscono, o no, alla produzione di quella forza coercitiva, donde nasce la persistenza della roccia consolidata nel suo equilibrio magnetico iniziale. Limitiamoci però alle azioni fisiche ed appoggiandoci alle analogie dell'acciajo e del ferro, dove sparisce ogni apparenza di forza coercitiva quando il metallo arroventito si raffredda lentamente, ed avvi, per lo contrario, suscettibilità di calamitazione permanente in conseguenza di un rapido abbassamento di temperatura o delle impressioni meccaniche tendenti ad alterare l'equilibrio molecolare, diremo; che l'una e l'altra di tali forze contribuiscono probabilmente a fissare l'induzione magnetica terrestre ne' frantumi di scorie o di lava, i quali sono, come le bombe vulcaniche, violentemente staccati dalla massa e lanciati con una certa velocità a traverso l'atmosfera; ma che la causa generale del fenomeno ci sembra consistere negli urti e nelle consecutive vibrazioni risultanti dal movimento discendente proprio di queste materie semifluidi, e principalmente dalle contrazioni e cristallazioni che si rendono sì manifestamente sensibili all'udito per virtù di quella specie particolare di scoppiettio, ben noto a chiunque ebbe l'occasione di assistere all'imponente spettacolo delle eruzioni vulcaniche.

SOPRA

LA CALAMITAZIONE DELLE LAVE

IN VIRTÙ DEL CALORE

E GLI EFFETTI DOVUTI ALLA FORZA COERCITIVA
DI QUALUNQUE ROCCIA MAGNETICA

MEMORIA II.

L'esistenza indubitabile di uno stato calamitico permanente nelle lave ed altre qualità di rocce conduce a diverse importanti quistioni sulle forze che sviluppano e conservano la polarità magnetica ne' minerali e sulle perturbazioni ch'esse devono necessariamente introdurre nella simmetria degli elementi relativi alla distribuzione del magnetismo sul globo terrestre.

Queste quistioni si dividono naturalmente in due classi, una delle quali considera le qualità particolari de' corpi semplici o composti donde provengono le proprietà magnetiche delle rocce: l'altra studia le leggi che reggono tali proprietà. La prima, abbracciando una serie di fenomeni che appartengono specialmente alla mineralogia chimica, verrà esclusa dalle presenti nostre investigazioni, le quali verseranno quindi unicamente sulle azioni fisiche risultanti dal potere magnetico delle sostanze minerali.

Cominciamo colla esposizione di alcune sperienze che devono considerarsi qual commento ed amplificazione delle idee accennate sul finire della precedente memoria.

La calamitazione permanente delle lave venne da noi attribuita alla loro consolidazione ed al successivo loro raffreddamento sotto l'azione del

magnetismo terrestre. Considerando poi che , per ritenere stabilmente la polarità magnetica , l'acciajo rovente abbandonato a se medesimo deve acquistare nel raffreddarsi , un certo grado di forza coercitiva per mezzo della tempra o d'altra azione meccanica influente sull'equilibrio atomistico, si riconobbe, che le parti superficiali o staccate della corrente s'erano trovate nella prima circostanza , per la libertà del loro irraggiamento ed il contatto dell'aria atmosferica ; e che le parti interne avean subito l'impero della seconda, in virtù delle vibrazioni prodotte durante il movimento discendente della massa semifluida.

Ma se l'acquisto della forza coercitiva nelle varie porzioni delle piccole correnti di lava , che scendono a precipizio dalle pendici vulcaniche , è facile a spiegarsi per mezzo de' principii accennati , non si può dire altrettanto delle porzioni interne appartenenti alle grandi masse di lava accumulate nelle pianure , dove il movimento e la diminuzione di temperatura succedono colla massima lentezza.

La difficoltà procede direttamente , come ognun vede , dalla perfetta analogia che supponiamo esistere, in fatto di proprietà magnetiche, tra le lave e le sostanze metalliche dotate di forza coercitiva.

Ora, l'acciajo arroventito e spogliato per conseguente d'ogni magnetica virtù , non acquista raffreddandosi lentamente nessuna calamitazione permanente ; dove che la lava , posta nelle medesime condizioni , si calamita sensibilmente e stabilmente, per quel dato verso che comporta il magnetismo del globo terrestre.

I fatti che ci svelarono questa singolar proprietà delle lave sono semplici e decisivi.

Diversi pezzi di leucitofiro ed altre qualità di rocce vulcaniche furono posti in mezzo ai carboni ardenti s'intanlochè ebbero acquistata una luce propria di color rosso cupo , quindi recati alla temperatura ordinaria , taluni rapidamente per mezzo dell'immersione nell'acqua fredda , ed altri più o meno lentamente coprendoli di cenere calda o posandoli semplicemente sulla nuda terra. Tutti respinsero , colla superficie che stava sotto durante il raffreddamento, l'estremità australe dell'indice magnetoscopico ed attrassero questa medesima estremità essendo capovolti ; ciò che metteva fuor d'ogni dubbio la stabilità della loro calamitazione. Fatti arroventire di bel nuovo e raffreddati in posizione inversa, trovossi che s'erano del pari invertite le loro azioni attraenti e repellenti, la parte inferiore re-

spingendo sempre e la parte superiore attraendo il polo australe del magnetoscopio. L'arroventamento della lava distrusse dunque lo stato calamitico precedente, e l'azione della terra le impresso, durante il successivo suo raffreddamento, una nuova calamitazione i cui poli erano in opposizione coi precedenti. Ripetuto più volte l'esperimento, si ottenne sempre lo stesso effetto dell'inversione de' poli magnetici.

È importante l'osservare che, se in qualunque circostanza tutti i pezzi riuscirono costantemente calamitati secondo la direzione richiesta dal magnetismo terrestre, l'energia della calamitazione fu però sempre maggiore in quelli che patirono il raffreddamento più rapido, restando così confermata l'idea che lo stato calamitico delle scorie e bombe vulcaniche poteva in parte attribuirsi ad una specie di tempra dovuta alla velocità del loro abbassamento di temperatura.

Ad ogni modo queste sperienze dimostrano, che una pronta diminuzione di temperatura o un movimento di scossa e vibrazione non essendo, come credevamo, le sole circostanze capaci di comunicare alle lave la forza coercitiva necessaria a ritenere la polarità magnetica sviluppata dal globo terrestre, e bastando anche un certo grado di quiete e di lenta dispersione calorifica, l'obiezione relativa alla calamitazione interna delle poderose correnti di lava raccolte ne' piani, perde ogni suo valore.

Passiamo ora all'esame delle proprietà appartenenti a qualunque minerale magnetico. A tal fine dobbiam cominciare coll'esposizione d'una serie d'osservazioni magnetoscopiche sopra diverse rocce ferrifere, stratificate, plutoniche e metamorfiche, onde porre in chiaro le analogie o le differenze che potrebbero trovarsi sotto il rapporto magnetico fra i terreni vulcanici già da noi esplorati, e quelli provenienti dalle altre formazioni geologiche.

I risultati di queste osservazioni sono registrati nella tavola seguente, dove la prima colonna indica il nome e l'origine della roccia, e la seconda gli effetti da essa prodotti sul magnetoscopio. Siccome poi il magnetismo osservato non si mostrò sempre bipolare, come nel caso delle lave, ed assunse anche talora l'unipolarità (1) passando successivamente dall'una

(1) Vedi pel significato di queste denominazioni, la memoria I delle nostre *Ricerche intorno al magnetismo delle rocce*.

all'altra forma magnetica secondo che la roccia trovasi più o men prossima all'indice dello strumento, così la seconda colonna ha due sezioni, ognuna delle quali si partisce in due suddivisioni; quelle servono per conoscere se l'azione in discorso ebbe luogo da vicino o da lontano; e queste per sapere se l'azione procede da un magnetismo semplice, analogo a quello del ferro segnato colle lettere *aa*) oppure da un magnetismo simile a quello della calamita o dell'acciajo calamitato (contraddistinto dalle lettere *ra*). Gioverà poi rammentare che i numeri compresi nelle quattro colonne rappresentano le perturbazioni angolari indotte per attrazione o per ripulsione nella posizione normale dell'indice dello strumento.

Le osservazioni non vi sono distribuite per classi mineralogiche, nè secondo la proporzione o lo stato fisico o chimico del ferro o d'altre sostanze magnetiche contenute nelle rocce esplorate; ma semplicemente per ordine della forza con cui siffatte rocce operano sul magnetoscopio.

NOME E PROVENIENZA DELLA ROCCIA	AZIONE SUL MAGNETOSCOPIO			
	DA VICINO (5 o 6 millimetri)		DA LONTANO (25 o 30 millimetri)	
	a. a.	r. a.	a. a.	r. a.
Epidoto con amfibolo (Arendal, Norvegia).	180	—	—	180
Pirossene shalite (Treverselle, Piemonte) .	—	180	—	180
Pirossene edenbergite (Zuckmantel, Slesia)	180	—	—	180
Granato nel granito (Roendal)	180	—	90	—
Ferro nel labrador (Finlandia)	180	—	80	—
Micascisto (Norvegia)	—	150	—	60
Smeriglio (Naxos)	—	140	—	45
Micascisto (Modum, Svezia)	—	135	—	40
Arenaria con fosfato di ferro (Moravia) . .	—	60	—	20
Gneiss (Siebelhen)	—	60	—	20
Micascisto (Hainichen, Sassonia)	50	—	—	—
Bronzite (Salisburgo)	—	45	18	19
Talco con amfibolo (New Haven)	—	25	—	12
Sienite con sfeno (Arendal Norvegia) . . .	—	20	—	7
Termandite (Boemia)	—	15	—	5
Ferro idrato melmoso (Regno di Napoli) . .	—	12	—	4
Argilla ferrifera (Alberona, Capitanata) . .	—	12	—	4
Argilla ferrifera (Toscana)	—	10	—	3
Marna ferrifera (Alberona, Capitanata) . .	—	6	—	2
Litomargo ferrifero (Planitz Zwiken)	—	5	—	2
Scisto sotto lucente calcare (Moravia) . . .	—	5	—	2
Glauconia ferruginosa (Svizzera)	—	4	—	1
Glauconia ferruginosa sabbiosa (Harz) . . .	—	3	—	1
Micascisto (Wesenstein, Sassonia)	2,0	—	—	—
Oolite inferiore (Witby, Jork)	2,0	—	—	—
Sferosiderite (Moravia)	1,5	—	—	—
Grès del lias superiore (Inghilterra)	1,5	—	—	—
Lievrite con epidoto (Isola d'Elba)	1,5	—	—	—
Roth toth liegendes (Boemia)	1,0	—	—	—
Marna ferrifera (Regno di Napoli)	1,0	—	—	—
Grès del Keuper (Bamberg)	0,5	—	—	—
Grès terziario (Francia)	0,5	—	—	—
Grawache untere (Inghilterra)	0,5	—	—	—
Calcare grossolano (Regno di Napoli)	0,5	—	—	—

Aggiungiamo qui sotto una nota supplementare di diverse sostanze le quali, quantunque ferrifere non esercitano *nel loro stato naturale* nessun' azione apparente sul magnetoscopio. Vedremo in breve la necessità della condizione espressa in carattere corsivo, che questi minerali privi di ogni benchè minima virtù magnetica non siano stati precedentemente sottoposti a nessuna forza che potesse aver alterato l'equilibrio de' loro principii magnetici.

Amfibolo con pirite di ferro (Norvegia)	Limonite argillifera (Inghilterra)
Argillolite metamorfizzata (Etna)	Marna del Keuper (Bamberg)
Argillofiro (Klein Naundorf, Dresda)	Marna ferrifera con fucoidi (Melfi)
Argillofiro (Budingen, Reno)	Marna ferrifera (Calabria)
Calcare ferrifero (Wonheim, Reno)	Marna ferrifera (Cacoxeno, Boemia)
Calcare grossolano (Vitulano Regno di Napoli)	Menilite (Vicinanze di Parigi)
Cererite (Barlaes, Svezia)	Opal jaspis (Chiahon Boemia)
Diallagia (Corsica)	Ossido di ferro argilloso (Balti more)
Diorite seistoide (Gersdorf, Freiberg)	Ostracs della formazione inferiore (Wurtemberg)
Diorite (Monzoni Tirolo)	Peeten personatus (Boemia)
Eufotite decomposta (Jano, Volterrano)	Plumbago (New York)
Granito con pienite (Altenberg, Sassonia)	Petroselee variegato (Breseiano)
Granito (Joen Gerogenstadt, Sassonia)	Pirossene (Timbo, Svezia)
» (Sinceberg, Sassonia)	Pirossene schalite (Rothen Kopf, Tirolo)
» (Annaberg, Sassonia)	Roth toth liegendes (Sassonia)
» (Asihaffenberg Baviera)	Semi opale (Herlung Ungheria)
» (Heideberg Baviera)	Seisto sotto lucente ferrifero (Dillenburg)
» (Fishtelgebirge, Weissenlenk)	
» (Naundorf, Freiberg)	Seisto argilloso (Geefrees Boemia)
Grès bigarré oolitico (Saugerhausen)	Taleo verdastro (Tirolo)
Grès ferrifero (Aalen Wurtemberg)	Termantide (Boemia)
Grès bigarré oolitico (Svizzera)	Terra verde (Verona, Lombardia)
Grès del Keuper (Faulenberge Würzburg)	

Dai dati contenuti nella tavola e nel suo supplemento risulta manifestamente,

1.° Che in tutti i casi dove la roccia assume i due stati magnetici col variare della distanza, la bipolarità succede da lontano e l'unipolarità da vicino.

2.° Che molte rocce, le quali contengono indubitalamente una porzione notevole di ferro non esercitano nessuna azione sensibile sul magnetoscopio.

3.° Che le rocce più-attive sono quasi tutte calamitate.

Noi abbiám già dichiarato di volerci astenere in questo lavoro da qualunque considerazione sulle chimiche combinazioni che conservano o tolgono ai metalli le loro proprietà magnetiche. Tralascieremo pertanto l'esame del secondo fatto e ci occuperemo soltanto del primo e dell'ultimo.

L'esperienza d'un corpo che pel semplice variare della distanza respinge ed attrae il medesimo polo dell'ago magnetico è ben nota ai fisici ed ognuno può riprodurla facilmente. A tal fine basta presentare al polo settentrionale o meridionale d'una bussola di dilicata costruzione l'estremità inferiore o superiore d'una chiave ordinaria o d'una spranghetta verticale di quella qualità particolare di ferro ben puro ed uniforme contraddistinto col nome di *ferro dolce*: la quale estremità, tanto che troverassi lontana di qualche centimetro respingerà (più o meno secondo le sue dimensioni uno de' poli dell'ago magnetico, e cambierà quindi la detta repulsione in attrazione quando la distanza sarà ridotta a pochi millimetri.

Dopo quanto si disse, nel nostro precedente lavoro, intorno alle cagioni della unipolarità e del magnetismo di posizione, la spiegazione del fenomeno non offre nessuna difficoltà. L'azione della terra sviluppa nella spranga di ferro verticalmente disposta una data quantità di magnetismo australe alla parte inferiore, e di magnetismo boreale alla parte superiore. L'una o l'altra di queste due porzioni essendo accostata, nella predetta posizione verticale, al polo omologo dell'ago magnetico, vi produrrà dunque la ripulsione. Ma giunta ad una piccola distanza essa patirà, sotto l'azione di esso ago, un altro sviluppo magnetico inverso di quello dovuto al globo terrestre; stantechè la parte inferiore, che possiede sotto l'influenza della terra il magnetismo australe, acquisterà in forza delle condizioni sperimentali il magnetismo boreale, e la parte superiore dotata per l'azione del globo di magnetismo boreale, acquisterà, in forza delle medesime condizioni, il magnetismo australe. Ora l'energia dell'induzione magnetica dovuta all'azione della bussola aumenta rapidamente col diminuire della distanza, dovechè il magnetismo proveniente dalla terra rimane sempre lo stesso. E però ad un certo grado di avvicinamento, la seconda potenza diventando maggiore della prima, l'ago dovrà muoversi verso la chiave *per virtù d'un'attrazione magnetica di reazione*.

Soggiugniamo ora, che questo avvicendamento delle due forze, il quale si ripete indefinitamente accostando ed allontanando la spranga o la

chiave della bussola, non esige necessariamente nè ferro dolce, nè azione del globo terrestre. E di fatto esso può ottenersi ugualmente coll' acciaio fortemente temperato e debolmente calamitato. Un certo rapporto di massa tra la spranga impiegata e l'ago della bussola non è di rigore; tuttavia riesce meglio con una spranga le cui dimensioni siano assai maggiori di quelle dell'ago suddetto. Quanto al suo grado di calamitazione basta che sia tale da non poter capovolgere l'ago magnetico; ma è preferibile che non lo cacci per ripulsione oltre i 35° , o 40° . S' intende poi, che per sottrarre interamente la spranga all'azione magnetica della terra, fa d'uopo tenerla orizzontale e perpendicolare al meridiano magnetico.

Anche quì il fenomeno risulta evidentemente dalla costanza della forza che produce la ripulsione e dalla variazione del principio opposto dovuto alla presenza della bussola: se non che le conseguenze sono alquanto diverse.

E veramente, siccome la chiave o la spranga di ferro dolce della prima speriienza son prive di forza coercitiva, potrebbe darsi che l'azione del magnetismo proprio della bussola distruggesse compiutamente il magnetismo indotto dalla terra nel ferro e vi sostituisse il proprio, che sparirebbe in seguito e sarebbe di bel nuovo surrogato dall'induzione magnetica terrestre, quando l'azione della bussola non può più operare sulla chiave sufficientemente lontana.

Ma questa supposizione non regge nel caso della spranga d'acciajo temprato e calamitato. Imperocchè, da vicino il principio repellente di essa spranga resta bensì sopraffatto, ma non già distrutto, come lo dimostra evidentemente la ricomparsa della ripulsione allorchè la spranga viene rimossa ad una certa distanza dalla bussola. Per rendere la ragione dei due movimenti opposti si deve dunque necessariamente ammettere che, nello sviluppare il principio amico sulla estremità più prossima della spranga, l'ago magnetico vi lasci tuttavia sussistere *in istato d'attività* il principio omologo o nemico; il quale, inferiore da vicino al suo rivale, si mostra di bel nuovo predominante quando l'azione dell'ago s'affievolisce in virtù della lontananza.

Ma ecco un fatto dove la dissimulazione e la ricomparsa delle proprietà attraenti e repellenti d'un corpo calamitato assumono la forma di un vero *paradosso magnetico*.

Abbiassi una bussolina ossia un leggier ago di declinazione impernato

o sospeso ad un filo, e due spranghe d'acciajo temperato le cui dimensioni siano tra loro molto diverse, e superiori d'assai a quelle della bussola. Si calamiti la spranga maggiore a saturazione e si sospenda quindi pel suo punto di mezzo ad un fascio di fili di seta senza torsione affine di renderla mobile orizzontalmente intorno al proprio centro di gravità a guisa d'una gran bussola o ago magnetico di declinazione. Comunicato poi alla spranga minore tanto magnetismo permanente che basti appena per capovolgere, in virtù della ripulsione de' poli omologhi, la bussola più leggiera, si cerchi di produrre nella stessa guisa il capovolgimento della bussola maggiore; e vedrassi con sorpresa, che in tal caso, *i poli omologhi si attraggono, in vece di respingersi tra loro*. Ripetendo una seconda volta il primo cimento comparirà di nuovo la ripulsione, che nella seconda esperienza si convertirà poi in attrazione, e via dicendo: sicchè *la medesima estremità della spranga respingerà costantemente il polo omologo della bussola minore ed attrarrà costantemente il polo omologo della bussola maggiore*.

Come spiegare tali apparenze de' corpi calamitati ammettendo la teoria, generalmente adottata di una sola *forza coercitiva*, cioè a dire l'unità delle due azioni che producono nell'acciajo temperato e generalmente ne' corpi più o men capaci d'una calamitazione permanente, la resistenza alla manifestazione della polarità magnetica e la persistenza della polarità sviluppata? Se una sola fosse la cagione de' due fenomeni, pare evidente che la sostituzione dell'una all'altra polarità ne' corpi dotati di forza coercitiva dovrebbe essere necessariamente definitiva e non temporanea.

Chechè ne sia di questo argomento tendente a stabilire una differenza essenziale tra la forza *magneto-resistente* e la forza *magneto-persistente*, ognun vede che il fatto, comune all'acciajo ed alle sostanze minerali ferrugineose, di un corpo fornito di polarità magnetica e temporalmente animato d'un magnetismo contrario a quello ch'egli possiede realmente, può condurre a conseguenze illecite sulla qualità magnetica delle rocce.

E per esserne convinto basterebbero i soli dati raccolti nella nostra tavola, giacchè tra questi trovansi alcuni campioni, i quali operano come corpi calamitati o come semplici sostanze ferrugineose, secondo che sono più o men rimoti dall'indice del magnetoscopio: per modo che un osservatore inesperto che ignorasse la coesistenza delle due azioni ed avvicinasse troppo la roccia allo strumento, ne arguirebbe, a torto, la mancanza della polarità magnetica permanente.

Ma così fatta deduzione erronea diventa poi, in alcuni casi, del tutto inevitabile anche per coloro che, peritissimi nell'arte di sperimentare, volessero decidere dello stato magnetico d'una roccia dal semplice suo modo di comportarsi relativamente alla bussola o ad altro analogo congegno essenzialmente composto d'un solo ago magnetico. Anzi io sarei di parere, che la vera cagione per cui la legge generale della calamitazione propria ad ogni specie di lava si sottrasse finora all'occhio sagace di tanti egregi osservatori, deve unicamente attribuirsi all'uso di codesti strumenti nelle indagini mineralogiche e geologiche.

E di fatto, per quanto grande sia la mobilità dell'ago magnetico intorno al punto di sospensione, esso trovasi pur sempre fortemente tenuto nella sua posizione naturale dall'azione magnetica del globo. Ora ognuno intende che per vincere questa resistenza ed avere un criterio sicuro del magnetismo polare di un minerale debolmente calamitato, è d'uopo accostarlo quanto più si possa ad una delle due estremità dell'ago, e produrvi un movimento di fuga mediante l'azione repellente di quelle porzioni che posseggono lo stesso principio magnetico. Ma se tale azione ripulsiva è di molto inferiore alla forza che conserva nella sua posizione d'equilibrio l'ago magnetico, questo rimarrà immobile anche nelle più piccole distanze: ed allora il minerale si troverà dominato dall'azione propria dell'ago recata, per la somma vicinanza, alla massima sua energia; la quale azione svolgendo, come si disse altrove, la forza magnetica amica nella porzione più vicina, darà luogo all'attrazione dei due poli; e spogliando per tal modo la roccia d'ogni carattere polare le imprimerà le apparenze tutte di un corpo ferruginoso calamitato. *Le sostanze minerali calamitate devono dunque avere, come l'acciajo, un limite inferiore di calamitazione oltre il quale le loro azioni ripulsive sull'ago magnetico isolato saranno, non solamente insensibili, ma surrogate dall'attrazione.*

Questa deduzione teorica importantissima, come ognun vede, per la geologia e la fisica del globo, fu pienamente confermata dall'esperienza. Imperciocchè tutti que' campioni di lave ed altre rocce ferri-ferre, i quali dimostrano vittoriosamente il proprio stato calamitico producendo sul magnetoscopio degli angoli di repulsione di 50°, 100° ed anche 120° (1) ti-

(1) L'angolo massimo di repulsione prodotto sul magnetoscopio dalle rocce calamitate

rano a se , sotto qualunque disposizione , l'una e l'altra estremità della spranghella impernata che i mineralogisti adoperano nelle loro ricerche sul magnetismo delle rocce. Laonde chi volesse giudicare dalle pure indicazioni di questo strumento , direbbe, che i detti campioni sono del tutto privi di magnetismo polare.

L'esperienza riesce veramente graziosa e convincente quando si pongono le due azioni a confronto immediato.

Trovato pertanto il lato del minerale che esercita la massima repulsione sull'indice del magnetoscopio , si passa alternativamente da questo strumento alla spranga magnetica de' mineralogisti ; e si vede la stessa porzione del medesimo corpo , mantenuta in una posizione invariabile rispetto all'orizzonte , produrre costantemente la ripulsione nel primo caso e l'attrazione nel secondo.

Non è poi indispensabile l'impiego della prefata spranga calamitata de' mineralogisti , potendosi ugualmente ottenere l'intento con qualunque ago magnetico appeso ad un filo o bilicato sopra un perno come le bussole di declinazione, d'inclinazione e d'intensità, purchè si possa accostare indefinitamente alle loro estremità il minerale sottoposto all'esperienza.

E qui cade in acconcio l'osservare, che la bussola di cui è parola nel nostro primo lavoro sul magnetismo delle rocce , essendo stata impiegata per sopperire ai casi ove l'indice del magnetoscopio era spinto di là dai limiti della sua scala, noi ci contentammo di tenere i campioni esplorati alla medesima distanza dall'estremità respinta dell'ago ; sicchè , non avendo oltrepassato un certo grado di prossimità, il cambiamento della ripulsione in attrazione, proveniente dall'eccessiva vicinanza dell'ago magnetico, dovette necessariamente sfuggire alle nostre indagini.

Ma perchè il fenomeno si è manifestato nella seconda serie d'osservazioni ; e come siffatta manifestazione ha potuto effettuarsi mediante il solo magnetoscopio, che se ne mostrò egli pure incapace per tutti i casi raccolti nella tavola antecedente ?

Notiamo primamente , che il cambiarsi della ripulsione in attrazione quando la roccia si trova alla minima distanza dall'indice del magneto-

le quali per l'attrazione dell'uno e dell'altro polo d'una bussola ordinaria sembrano puramente magnetiche, dipende evidentemente dalla sensibilità del primo di questi due strumenti. È chiaro che le quantità allegate qui sopra si riferiscono all'apparecchio magnetoscopico a pagine 6, 7 e 8 del precedente nostro lavoro sul magnetismo delle rocce.

scopio non essendosi mai avverato durante la prima serie di osservazioni, la necessità di passare al cimento della bussola apparì, come si disse dianzi, ne' soli casi dove la ripulsione cacciava l'indice del magnetoscopio oltre i limiti della sua scala, cioè a dire quando la roccia respingeva l'indice suddetto di là dai 180° ; ed in tal caso la roccia trovandosi munita d'una forza calamitica sufficiente a respingere distintamente i poli della bussola, il fatto delle due azioni nello stesso minerale non poteva prodursi, nè sull'uno, nè sull'altro strumento.

Entrando poi nell'esame diretto della quistione faremo osservare che, siccome due corpi, i quali posseggono la medesima quantità di ferro ossidato o d'altra sostanza magnetica, sono suscettivi di calamitarsi, più o meno energicamente secondo la forza impiegata, così due rocce potranno avere lo stesso grado di calamitazione e racchiudere delle proporzioni diverse di una data combinazione ferrifera. Ora, supposto quest'ultimo caso, è chiaro che la forza in virtù della quale la ripulsione si cambia in attrazione dovrà essere maggiore nel corpo più carico di materia magnetica; e che, per conseguente, la sostituzione dell'una all'altra forza comincerà prima per questo corpo che per l'altro.

Ammettiamo dunque che le lave contengano meno materia magnetica di quelle sostanze minerali capaci di produrre nel magnetoscopio il doppio effetto della ripulsione e dell'attrazione pel semplice variare della distanza, e siano in pari tempo più fortemente calamitate, ed apparirà chiaro perchè le prime non valsero ad eccitare il fenomeno delle seconde.

Ma possiamo spingere più oltre la probabilità di questa nostra ipotesi e convertirla, direi quasi, in una verità perfettamente dimostrata, imitando la natura coll'arte sperimentale.

Ad una certa quantità di cera vergine s'unisca tanta trementina che basti a formarne un corpo discretamente plastico. Procacciato quindi nel protossido o della semplice limatura di ferro (tersa o arrugginita dall'aria umida, poco importa) se ne aggiungano alcuni millesimi ad una porzione della del detto miscuglio di cera e trementina, e si faccia in modo che il composto ben impastato di queste tre sostanze, ridotto a forma cilindrica, e fortemente calamitato per mezzo di due spranghe magnetiche, ecciti nel magnetoscopio una ripulsione che, crescendo coll'avvicinamento, non oltrepassi però i 120° alla minima distanza possibile; cioè, una ripulsione che arrivi tutt'al più a questo limite di 120° quando il cilindro tocca il ve-

tro che chiude la parte superiore dello strumento. Se la prima prova fallisce si tornerà da capo, aumentando o diminuendo la proporzione di ferro, e dopo alcuni saggi l'effetto corrisponderà certamente all'intento. I corpi che contengono una debolissima porzione di sostanza magnetica fortemente calamitata si comportano dunque realmente al magnetoscopio come le lave ed altre rocce che, lontane o avvicinate sino al contatto della lamina di vetro soprastante all'indice dello strumento, conservano la propria loro polarità.

Si formi ora, colla medesima pasta di cera e trementina, un altro cilindro dove la quantità di ferro sia di molto superiore alla precedente, e gli si comunichi una polarità debolissima ma però sufficiente per eccitare nel magnetoscopio la stessa ripulsione di 120° ad una distanza di cinque o sei pollici. Accostando rapidamente allo strumento questo secondo cilindro mentre l'indice s'allontana per ripulsione dallo zero della scala, si vedrà cessare per un istante il movimento di fuga prodotto dalla forza repellente, poi l'indice obbedire ad una forza contraria di attrazione che lo richiama verso il suo punto di partenza. Laonde questo secondo cilindro opera esattamente sul magnetoscopio, come le rocce bipolari da lontano, ed unipolari da vicino.

L'argomento addotto pocanzi per dimostrare l'origine delle differenze d'azione esercitate dai minerali sull'ago magnetico resta dunque pienamente convalidato dall'esperienza; ed è fuor d'ogni dubbio che variando convenientemente le proporzioni della sostanza magnetica ed il suo grado di calamitazione si riproducono esattamente nel magnetoscopio gli stessi segni o caratteri distintivi de'minerali a semplice e a doppio effetto.

È quasi superfluo il soggiugnere che siffatta divisione de'corpi in due classi è tutta artificiale e dipendente dal valore, dalla distanza e dalla mobilità dell'indice magnetoscopico, sicchè la medesima roccia si vedrà transitare dall'una all'altra di esse classi secondo le forze magnetiche assolute e relative degli aghi che formano i sistemi astatici degli strumenti impiegati.

Abbiassi tuttavia ben presente quanto dicevamo dianzi sulla fallacia degl'indizii tratti dalle forze magnetiche *di reazione* e sull'impossibilità di conoscere le deboli calamitazioni mediante l'ago magnetico isolato: e siccome il sistema astatico s'accosta tanto più all'indole della bussola, quant'è minore il suo grado di perfezione e che, per conseguenza, gli

effetti di reazione e le probabilità d'errore aumentano nella medesima ragione, così ognuno intenderà perfettamente che per determinare con sicurezza il vero stato magnetico delle rocce, si dovrà sempre ricorrere all'uso de' più squisiti magnetoscopi, i quali permettono di operare ad una distanza notevole dall'ago calamitato.

Ma ecco un'altra serie di fatti che renderà sempre più manifesta l'assoluta necessità di evitare, nella predetta determinazione, la reazione magnetica delle rocce esplorate.

Quando un pezzo qualunque di ferro dolce, o d'altro corpo magnetico privo di forza coercitiva, muove successivamente per virtù d'attrazione diverse spranghe calamitate più o meno voluminose, bilicate sopra un perno o sospese orizzontalmente mediante alcuni fili di seta senza torsione, l'influenza dovuta alla varia mole di tali spranghe è così poco apparente, che non si sa veramente decidere se le più leggere sono o no attratte con maggior forza delle più gravi. Ma se, in vece del ferro dolce, si adopera un prisma o cilindro d'acciajo fortemente temprato, privo di magnetismo polare, e d'una grossezza uguale, o superiore, ad un pollice, la differenza d'attrazione tra le spranghe maggiori e le spranghe minori è sensibilissima e tutti s'accorgono immantinente che le prime muovonsi con maggior celerità delle seconde.

Per rendersi ragione di questa diversità d'azione del ferro dolce e dell'acciajo temprato sulle medesime spranghe calamitate, convien notare in primo luogo, che tutte le forze motrici in discorso appartengono a quel genere da noi detto *di reazione*. Imperocchè, la spranga calamitata desta nel metallo inerte ed immobile, il potere calamitico; il qual potere, una volta sviluppato, reagisce sulla spranga e la costringe a muoversi verso il metallo.

Ora, il ferro dolce essendo privo di forza coercitiva cede immediatamente all'azione calamitica più o meno intensa della spranga operante e si costituisce in uno stato magnetico proporzionale a questa potenza. E, siccome ne' corpi calamitati a saturazione, quali sono appunto le nostre spranghe, l'energia magnetica cresce in ragion delle masse, le forze motrici varieranno proporzionalmente alle masse da muoversi, le quali assumeranno, per conseguente, delle velocità prossimamente uguali (1).

(1) Queste velocità non possono essere rigorosamente uguali tra loro: 1° , perchè le resistenze prodotte dagli attriti e dal mezzo ambiente variano dall'una all'altra spranga;

Ma tale uguaglianza non potrà succedere relativamente all'acciajo temprato che, a cagione della sua forza coercitiva o, per meglio dire, a cagione della sua forza magneto-resistente, si oppone con maggior successo alle azioni deboli che alle azioni energiche; per cui le spranghe più poderose vi producono un effetto molto più intenso di quello che comporterebbe la proporzione de' volumi o dei pesi. In questo caso le reazioni aumenteranno dunque secondo una ragione più rapida de' rapporti di massa, e le spranghe maggiori verranno attratte più vigorosamente delle spranghe minori.

Questi fatti congiunti alla somma probabilità che la forza coercitiva cambi dall'uno all'altro minerale magnetico, c'indussero a studiare le reazioni prodotte dall'avvicinamento di varie rocce ferrifere a due spranghe calamitate di lunghezze presso a poco uguali (3 decimetri) ma di diverso volume; la prima cilindrica, d'un raggio di $\frac{1}{2}$ millim., la seconda prismatica larga 25 millim., grossa 6 millim.

La tavola che segue contiene gli angoli massimi descritti dalle due spranghe per virtù delle reazioni delle rocce accostate fin presso il contatto d'uno de' poli magnetici, e mantenute, il più che si poté, alla stessa minima distanza dal polo per tutta la durata del movimento.

Le sue notazioni hanno lo stesso significato della prima tavola; per cui nelle colonne *aa* stanno le indicazioni delle rocce le quali operano come semplici sostanze magnetiche, e nelle colonne *ra* trovansi le indicazioni delle rocce che si comportano come corpi calamitati.

È importante l'osservare che gli esperimenti cominciarono sempre nell'ordine delle iscrizioni, cioè a dire, dalla reazione della roccia sulla spranga minore. Questa precedenza dell'esperimento relativo alla spranga minore è assolutamente indispensabile, come lo vedrem tra poco.

Siccome poi non si trovò nessun rapporto numerico apparente tra gli archi descritti per attrazione o per ripulsione dall'una e dall'altra spranga, così le azioni osservate vennero disposte secondo l'ordine alfabetico de' nomi delle rocce sottoposte all'esperienza.

2°, perchè quand'anche tali resistenze fossero uguali, non è ben dimostrato che calamitando a saturazione una serie di spranghe della medesima qualità d'acciajo ed ugualmente temprate ma di volume diverso, si ottengano delle forze magnetiche proporzionali alle masse.

NOME E PROVENIENZA DELLA ROCCIA	AZIONE SULLA SPRANGA			
	MINORE		MAGGIORE	
	a. a.	r. a.	a. a.	r. a.
Amfibolo laminare radiato (Norvegia) . . .	—	—	2,5	—
Arenaria con fosfato di ferro (Moravia) . .	0,5	—	53,0	—
Argilla ferrifera (Alberona, Capitanata) . .	0,7	—	42,0	—
Diallagia (Corsica)	—	—	2,0	—
Diorite (Monzoni, Tirolo)	—	—	2,0	—
Epidoto con amfibolo (Arendal, Norvegia) .	15,0	—	50,0	—
Ferro nel labrador (Finlandia)	4,0	—	13,0	—
Franklinite (New Jersey)	4,0	—	12,0	—
Lava dell'Etna (Eruzione del 1852)	—	8,0	20,0	—
Lava dell'Etna (Antistorica)	—	5,0	16,0	—
Lava del Vesuvio (Eruzione del 1850) . . .	—	3,0	12,0	—
Lava del Vesuvio (Antichissima)	—	1,5	10,0	—
Lava de Campi Flegrei (Crateri di Campana)	—	0,5	15,0	—
Lava d'Ischia (Punta Caruso)	2,0	—	9,0	—
Limonite pisiforme (Newkirsch)	—	—	2,0	—
Limonite argillifera (Inghilterra)	—	—	1,5	—
Marna ferrifera (Alberona, Capitanata) . . .	0,6	—	25,0	—
Micaseisto (Hainichen, Sassonia)	4,0	—	13,0	—
Micaseisto (Norvegia)	—	2,0	12,0	—
Micaseisto (Modum, Svezia)	—	1,0	47,0	—
Pirite magnetica (Badenonais)	5,0	—	33,0	—
Pirite magnetica (Vesuvio)	6,0	—	30,0	—
Pirossene edenbergite (Zuckmantel, Slesia)	10,5	—	35,0	—
Pirossene shalite (Traverselle, Piemonte) .	—	3,0	27,0	—
Pirossene (Timbo, Svezia)	—	—	3,0	—
Smeriglio (Naxos)	—	1,5	40,0	—
Siderosa (Stiria)	1,0	—	6,0	—
Siderosa (Huttenberg, Carinzia)	—	—	9,0	—
Siderosa (Devonshire, Inghilterra)	—	—	4,0	—
Siderosa (Sicilia)	—	—	3,0	—
Terra verde (Verona, Lombardia)	—	—	4,5	—
Trapp con analcime (Etna)	6,0	—	20,0	—
Trachite de' Campi Flegrei (Fossa Lupara) .	3,0	—	12,0	—
Tungstato di ferro (Zinwald, Boemia) . . .	—	—	1,0	—

La mancanza di una relazione qualunque tra il vigore e la natura attraente o repellente delle due azioni comparate dimostra manifestamente che le rocce ferrifere operano sull'una e l'altra spranga come l'acciajo temprato e non già come il ferro dolce. Per convincersi poi che la forza coercitiva varia colla qualità delle rocce esplorate, basterà osservare, *che*

in tutti i casi avvi attrazione della spranga maggiore, mentre la forza esercitata dal minerale sulla spranga minore è ora attrattiva, ora repulsiva, ED ORA PERFETTAMENTE INSENSIBILE. Le due prime azioni sono semplici riproduzioni delle sperienze precedentemente descritte.

Quanto all'ultimo fatto, di una forza sensibile alla spranga maggiore e nulla per la spranga minore, esso proviene evidentemente dalla somma energia con cui la roccia resiste allo sviluppo de' suoi principii magnetici. E siccome i corpi dotati di un eccesso di forza magneto-resistente posseggono anche, generalmente parlando, un eccesso di forza magneto-persistente, così sarà possibile, anzi oltremodo probabile, che la roccia conservi tutto o parte del magnetismo posteriormente acquistato sotto l'azione predominante della spranga maggiore, sicchè, accostata di nuovo alla spranga minore, vi produca un effetto sensibile: ecco giustificata la necessità dell'ordine sperimentale indicato pocanzi. La reazione energica deve seguire e non precedere la più debole, perchè altrimenti potrebbe destarsi nella roccia sottoposta all'esperienza una proprietà magnetica che le mancava nel suo stato naturale.

Soggiungiamo che così fatto cambiamento nelle proprietà magnetiche della roccia succede indubitatamente quando l'attrazione del minerale per rispetto alla spranga maggiore è preceduta dalla sua completa nullità d'azione relativamente al magnetoscopio ed alla spranga minore. Imperocchè in tutti questi casi, la roccia dopo di aver agito sul primo strumento diventa capace di operare sugli altri due come fanno i corpi calamitati.

Ad ogni modo, la diversità d'azione dello stesso minerale sull'una e l'altra spranga (la quale diversità è sì estesa, che ora vedi una sola spranga muoversi per attrazione e l'altra conservare il proprio stato di quiete, ed ora osservi tra le due spranghe i movimenti opposti di attrazione e di repulsione) prova irrefragabilmente che *la forza coercitiva cambia colla natura del minerale sottoposto all'esperienza*.

Vedendo poi la spranga maggiore descrivere costantemente degli archi più estesi di quelli percorsi dalla spranga minore, si direbbe che la prima è più idonea della seconda a determinare i diversi gradi del magnetismo posseduto dalle rocce. Ma qualora pongasi mente a quanto fu detto superiormente intorno alle forze magnetiche di reazione, se ne arguirà tosto che così fatti moti derivano in gran parte da uno sconvolgimento dei principii magnetici risiedenti ne' minerali e che, per avere le proporzioni

e lo stato naturale di essi principii è d'uopo abbandonare l'uso di qualunque spranga calamitata sottoposta a tutta l'azione direttrice del globo terrestre, e ricorrere all'impiego del magnetoscopio.

Si è introdotto da qualche tempo negli studi di geologia e di fisica terrestre un metodo di valutare l'importanza delle rocce rispetto al magnetismo del globo, che, dopo le precedenti osservazioni ed esperienze, ci pare manifestamente fondato sopra una base del tutto erronea.

Polverizzate le sostanze minerali, si sottopongono, in parità di peso, all'azione attraente di una vigorosissima calamita naturale od artificiale; e dalle proporzioni delle polveri che rimangono successivamente aderenti allo stesso polo riferite al peso totale, che rappresenta l'effetto della calamita sul ferro, se ne arguiscono i così detti *poteri magnetici delle rocce*.

Ora, se lo scopo di codesti lavori è di determinare l'azione perturbatrice de' terreni circostanti alle bussole, come pare realmente (1), poche riflessioni basteranno per dimostrarne tutta l'insufficienza.

E veramente, noi abbiain veduto che le rocce più attive sull'ago magnetico sono per la massima parte calamitate; che altre rocce acquistano bensì un certo potere magnetico sotto l'influsso d'una poderosa calamita, ma non hanno nel loro stato naturale nessuna azione sensibile sulla bussola. Quest'ultimo fatto procede, come si disse dianzi, dalla resistenza alla calamitazione; l'altro poi deriva evidentemente dalla persistenza della medesima proprietà già spiegata per cause anteriori. E tanto l'una quanto l'altra resistenza al cambiamento di stato magnetico restano totalmente annullate dalla polverizzazione: dappoichè tutti sanno che questa operazione distrugge nei corpi ogni traccia apparente di forza magneto-resistente o magneto-persistente e li lascia indistintamente esposti, come il ferro dolce, alla sola attrazione dell'uno e dell'altro polo della calamita.

Dedurre le perturbazioni magnetiche dovute alla costituzione geologica d'un paese dalle quantità proporzionali delle rocce circostanti ridotte in polvere ed attratte da una calamita di grande energia, sarebbe quasi lo

(1) . . . » On conçoit d'après cela que la constitution ou la carte géologique d'un lieu étant connue il serait possible à l'aide du pouvoir magnétique des roches qui composent le sol et qui sont le plus rapprochées, de déterminer par le calcul quelle est la déviation que l'aiguille aimantée éprouve en ce lieu relativement à la direction du méridien magnétique » (*Sur le pouvoir magnétique des roches* par M. A. Delesse. *Annales des Min.* 4. Série 1849 fin du mémoire).

stesso che valutare le azioni immensamente diverse esercitate sull'ago magnetico da varie spranghe, ugualmente distanti ma più o men calamitate e temprate d'acciajo, di ghisa, di ferro dolce, battuto o contorto, per mezzo dell'attrazione magnetica delle loro limature, operazione che condurrebbe evidentemente alla conseguenza di una perfetta uguaglianza delle azioni esplorate!

L'esistenza della forza coercitiva nelle sostanze minerali, dimostrata sin dall'epoca in cui Romé de l'Isle s'avvide dello stato calamitico permanente de' cristalli di ferro oligisto, confermata successivamente in altri corpi cristallizzati ed amorfi dalle osservazioni di Tralles, di Breislak, d'Humboldt, d'Hausmann ed Enrici, e venuta finalmente in tanta luce mediante le belle ricerche del Deléssé sulla calamitazione di qualunque specie di rocce, avrebbe pur dovuto destare non pochi sospetti sulla rettitudine di questo metodo sperimentale; giacchè, se le rocce ferrihere posseggono la forza coercitiva, era probabile che l'energia di questa forza variasse, come si è già dimostrato, colla qualità de' minerali; e pochi momenti di riflessione bastavano per dedurne l'esistenza di un limite, variabile esso pure colla natura delle rocce, oltre il quale cessa assolutamente, come lo vedremo tra poco, la forza di reazione di esse rocce: proposizioni che, congiunte alla nozione dell'esistenza di terreni calamitati più numerosi di quel che supposevasi generalmente, bastano per giustificare il nostro parallelo tra la polverizzazione delle rocce magnetiche e quello delle spranghe più o meno calamitate di ghisa, d'acciajo e di ferro.

D'altra parte non è da tacersi che l'illusione degli sperimentatori venne alimentata da una certa oscurità di nozioni sull'energia comparata delle perturbazioni dovute al magnetismo semplice ed al magnetismo polare.

E per vero, tutti avevano certamente osservato che ad una certa distanza le agitazioni della bussola sotto l'azione di una spranga calamitata sono assai più violenti di quelle dovute ad un'enorme quantità di ferro dolce; ma non è forse stato finora così generale il desiderio di formarsi un concetto chiaro delle cagioni di tanto divario tra l'una e l'altra azione e di conoscere, per conseguenza, quali sieno rispetto alle perturbazioni dell'ago magnetico, i veri caratteri distintivi della unipolarità e della bipolarità.

Immaginiamo pertanto che un dato punto di massa d'acciajo temprato, o meglio ancora di una roccia ferrifera, divenga successivamente uni-

polare e bipolare, conservando la medesima intensità d'azione; e vediamo di esprimere matematicamente i valori relativi di queste due forze.

Osservisi ; 1.° che ognuna delle due azioni in discorso può considerarsi come composta di una coppia di forze applicate alle estremità d'una leva orizzontale mobile intorno al suo punto di mezzo ; 2.° che tali componenti sono cospiranti nella bipolarità, ed opposte nella unipolarità ; 3.° che in quest'ultimo caso, della unipolarità, la risultante si riduce a zero in tutti i punti del piano condotto pel centro dell'ago normalmente al meridiano magnetico, a cagione della perfetta uguaglianza che posseggono allora le due forze componenti ; e che, per lo contrario, la posizione più favorevole all'azione unipolare si è la direzione rettilinea che passa pei due poli dell'ago, perchè ivi nasce appunto la massima differenza tra le predette componenti della unipolarità. Supponiamo dunque il punto da rendersi successivamente unipolare e bipolare in quest'ultima direzione; dapoiè, se l'azione magnetica del punto bipolare risulterà in tal caso superiore a quella del punto unipolare, così sarà certamente per tutti gli altri.

Sia l la lunghezza dell'ago, d la distanza del suo centro al punto magnetico. Avremo

$$\frac{1}{(d-\frac{1}{2}l)^2} - \frac{1}{(d+\frac{1}{2}l)^2} = \frac{(d+\frac{1}{2}l)^2 - (d-\frac{1}{2}l)^2}{(d-\frac{1}{2}l)^2(d+\frac{1}{2}l)^2} = \frac{2ld}{(d^2-\frac{1}{4}l^2)^2}$$

per l'azione unipolare ; e

$$\frac{1}{(d-\frac{1}{2}l)^2} + \frac{1}{(d+\frac{1}{2}l)^2} = \frac{(d+\frac{1}{2}l)^2 + (d-\frac{1}{2}l)^2}{(d-\frac{1}{2}l)^2(d+\frac{1}{2}l)^2} = \frac{4d^2+l^2}{2(d^2-\frac{1}{4}l^2)^2}$$

per l'azione bipolare.

Dunque il rapporto cercato sarà espresso dai due numeratori $2ld$, e $4d^2+l^2$. Ora se l è picciolissima rispetto a d , il suo quadrato potrà trascurarsi ; ed arriveremo così alla conclusione che l'azione unipolare sta alla bipolare come la lunghezza dell'ago magnetico alla sua distanza dal punto perturbatore.

Giova però tener sempre presente che questo *massimo* valore dell'unipolarità, già inferiore d'assai, nel caso da noi considerato, a quello della

bipolarità, lo diventa molto di più quando il punto magnetico esce dalla direzione de' poli e s'accosta al piano condotto pel centro dell'ago normalmente al meridiano magnetico, nel qual piano esso annullasi compiutamente a qualunque distanza, come fu testè osservato; dove che l'azione bipolare si conserva perfettamente costante passando dall'una all'altra posizione estrema, quando sia trascurabile il quadrato della lunghezza dell'ago relativamente alla somma di quattro volte il quadrato della sua distanza al punto magnetico.

Di fatto le più semplici considerazioni geometriche dimostrano che la forza esercitata dal punto bipolare nel piano normale all'ago magnetico è

$$\frac{1}{\frac{1}{4}l^2 + d^2} + \frac{1}{\frac{1}{4}l^2 + d^2} = \frac{2}{\frac{1}{4}l + d^2} = \frac{8}{l^2 + 4d^2}$$

E noi sappiamo che la medesima forza bipolare quando il punto trovasi nella direzione dell'ago è $\frac{4d^2 + l^2}{2(d^2 - \frac{1}{4}l^2)^2}$

Il rapporto cercato sarà dunque

$$\frac{4d^2 + l^2}{2(d^2 - \frac{1}{4}l^2)^2} : \frac{8}{4d^2 + l^2} :: \frac{4d^2 + l^2}{(4d^2 - l^2)^2} : \frac{1}{4d^2 + l^2} :: (4d^2 + l^2)^2 : (4d^2 - l^2)^2$$

dove apparisce chiaramente l'enunciata uguaglianza nel caso di l^2 picciolissima per rapporto a $4d^2$.

Alla condizione di parità d'energia dell'azione unipolare e dell'azione bipolare, cui abbiám dovuto necessariamente sottomettere il punto magnetico per compararne gli effetti relativi, convien poi aggiugnere la circostanza che la prima di tali forze essendo indiretta e proveniente dalla bussola, traversa due volte lo spazio interposto tra essa bussola ed il punto magnetico, e riesce quindi quattro volte più debole delle azioni dirette.

Finalmente l'ultima circostanza la quale contribuisce a render l'azione unipolare inferiore d'assai all'azione bipolare si è la forza coercitiva. Abbiám veduto che la presenza di questa forza nelle rocce magnetiche risulta dalla stessa loro attitudine alla calamitazione permanente; e che la varia sua energia nelle diverse specie di rocce è una conseguenza del di-

verso rapporto d'effetto dinamico che ognuna di tali specie esercita su due spranghe mobili d'acciajo di diverso volume, calamitate a saturazione: la quale varietà di rapporto è talmente estesa e manifesta, che talune rocce agiscono ugualmente su ambedue le spranghe ed altre si mostrano del tutto inerti per rispetto alla spranga minore ed attraggono la maggiore.

Cominceremo col dedurre che, a parità di distanze, *la forza perturbatrice proveniente dalla reazione della medesima roccia ferrifera può essere talora nulla e talora più o meno sensibile, secondo la mossa dell'ago magnetico impiegato.*

Ma tornando al nostro assunto di mostrare come la forza coercitiva sia una terza importantissima cagione d'inferiorità dell'azione unipolare relativamente all'azione bipolare, diremo; che, ammessa una volta l'esistenza della prefata forza coercitiva, è facile il dimostrare come *per quanto intensa sia la virtù calamitica impiegata, il fenomeno d'induzione magnetica risultante dalla prossimità della bussola alla roccia ferrifera, non si estenda indefinitamente nello spazio a modo delle azioni dirette, ma cessi fisicamente o, per meglio dire, assolutamente, ad un certo limite di distanza.*

Per farsi ben capace della verità di questa proposizione è d'uopo considerare due spranghe calamitate di diversa energia e scomporre, col pensiero, il magnetismo della spranga maggiore in tanti elementi uguali all'azione magnetica della spranga minore considerata quale unità. Poichè allora s'intenderà subito come la forza coercitiva della roccia, sufficientemente vigorosa per resistere in alcuni casi all'unità d'azione, ceda agli sforzi congiunti d'un certo numero di tali unità. S'intenderà pure che la spranga maggiore, dove trovasi per ipotesi la somma degli sforzi capace di vincere, all'unità di distanza, la forza coercitiva della roccia, non potrà più produrre lo stesso effetto aumentando la distanza sino ad un certo limite facile a determinarsi.

Prendiamo per esempio una delle diverse qualità di lave pirosseniche del Vesuvio e de' Campi Flegrei adoperate nel lastricato della capitale; le quali, benchè tutte calamitate, non respingono l'indice del magnetoscopio oltre i 120°, ed attraggono pertanto, da ogni punto della loro periferia, l'uno e l'altro polo dell'ago magnetico isolato.

Siano tre spranghe mobili *A, B, C* calamitate a saturazione. Supponiamo per maggior semplicità che le forze magnetiche di queste spranghe

provengano unicamente dalle loro differenze di massa ed abbiano tra loro i rapporti de' numeri 1 : 9 : 25. Ammettiamo finalmente che la reazione della lava sulla prima spranga cominci a manifestarsi alla distanza di due millimetri, ciò che non si scosta gran fatto dalla verità quando tale spranga sia un filo d'acciajo di mezzo millimetro circa di diametro.

In queste circostanze l'unità di distanza (2 millimetri) rappresenterà evidentemente il confine o limite, passato il quale, l'azione della spranga *A* perde il vigore necessario a vincere la forza magneto-resistente della lava. Si consideri presentemente che le azioni più energiche delle spranghe *B*, *C* si potranno diminuire coll'allontanamento per modo da renderle uguali all'azione limite della spranga *A*. Quindi, giusta la nota legge dei quadrati, i limiti di forza efficace delle spranghe *B*, *C* altrimenti, le distanze al di là delle quali le dette spranghe *B*, *C*, perderanno il vigore necessario a vincere la forza coercitiva della roccia, saranno 6 millim. e 10 millim.

Se le forze magnetiche delle tre spranghe mobili fossero 1, 36, 100, i limiti delle distanze dove le spranghe *B*, *C* perderebbero il vigore necessario a vincere la forza coercitiva della roccia avrebbero i valori rispettivi di 12 e 20 millimetri: questi limiti sarebbero 30 e 50 millimetri qualora i rapporti delle forze magnetiche di *B* e *C* fossero 225, 625. Laonde appare, che per avere il limite cercato basta moltiplicare la radice quadrata del potere magnetico della spranga impiegata per la distanza dove l'azione dell'unità magnetica è incapace di vincere la forza coercitiva della roccia.

Riassumendo le proposizioni più notabili contenute nella presente memoria, si raccoglie:

1.° Che le lave riscaldate sino all'incandescenza ed abbandonate a sè medesime si calamitano giusta la direzione voluta dalle forze magnetiche terrestri.

2.° Che operando sopra una sola specie di lava, l'energia di questa calamitazione dipende dalla rapidità del raffreddamento.

3. Che tre spranghe d'acciajo di varia grandezza possono calamitarsi per modo da rendere l'uno e l'altro polo della spranga mezzana repulsivo pel polo omologo della spranga minore ed attrattivo pel polo omologo della spranga maggiore.

4.° Che non solamente le lave, ma quasi tutte le altre rocce magnetiche trovansi più o meno calamitate.

5.° Che le deboli calamitazioni de' minerali sono insensibili all'ago di declinazione e generalmente a qualunque spranga calamitata sottoposta all'azione direttrice del globo, perchè la polarità opposta sviluppata nel minerale dalla prossimità della spranga essendo molto più intensa delle forze ripulsive della roccia, qualunque punto di essa roccia attrae l'uno e l'altro polo magnetico.

6.° Che per mettere in evidenza queste deboli calamitazioni, abbondantissime nel regno inorganico, è d'uopo ricorrere al magnetoscopio ossia al sistema astatico d'Ampère convenientemente disposto, il quale permette di esplorare ad una certa distanza il magnetismo proprio della roccia e rimuove pertanto la possibilità di eccitarvi la polarità magnetica di reazione.

7.° Che molte rocce ferrihere, le quali nel loro stato naturale non esercitano la menoma azione apparente, nè sul magnetoscopio nè sull'ago ordinario di declinazione, tirano a se una spranga magnetica di gran dimensioni liberamente sospesa pel suo centro di gravità, ed acquistano in pari tempo una calamitazione permanente sensibile al magnetoscopio.

8.° Che questo fatto e la disuguaglianza delle azioni attraenti e repellenti esercitate dalle varie specie di rocce magnetiche su due spranghe calamitate di diverso volume conducono manifestamente alla conseguenza d'un cambiamento di forza coercitiva passando dall'uno all'altro minerale ferrihero.

9.° Che il metodo di polverizzare le rocce e sottoporle in tale stato al contatto d'una vigorosissima calamita onde arguire dalle proporzioni delle polveri attratte e dai rispettivi volumi delle rocce cui appartengono, le perturbazioni magnetiche dovute alla loro vicinanza, è totalmente erroneo.

10.° Che tre sono le cagioni per cui la perturbazione delle rocce semplicemente magnetiche o unipolari trovasi da lontano tanto inferiore a quelle, proveniente dalle rocce le più debolmente calamitate; 1.° la resistenza che la forza coercitiva oppone allo sviluppo de' principii magnetici; 2.° la circostanza che l'azione, partendo inizialmente dallo strumento magnetico traversa due volte lo spazio frapposto tra questo strumento e il corpo ferrihero, e diventa perciò quattro volte minore delle forze dirette; 3.° le direzioni contrarie di rotazione che lo stesso punto della roccia perturbatrice imprime alle due estremità dell'ago magnetico.

RICERCHE

SVI

CROSTACEI AMFIPODI DEL REGNO DI NAPOLI

DEL DOT. ACHILLE COSTA

Uno sguardo fugace su quanto venne prima d'ora alla luce, per l'opera di Naturalisti distinti, intorno a' Crostacei che vivono nelle acque del Mediterraneo, farebbe a prima giunta pensare poco di ambiguo, nulla di indeterminato, e meno ancora di nuovo racchiudere delle cennate acque quella frazione che bagna il regno di Napoli. In prova di che basterebbe rammentare i lavori degli Olivi per l'Adriatico, quelli de Risso pel mare di Nizza, del Roux pel Mediterraneo in generale, dell'Audouin e dell'Edwards per le coste meridionali della Francia, del secondo di questi specialmente pel golfo di Napoli, del prof. O. G. Costa pel golfo stesso di Napoli e l'altro di Taranto: senza escludere le opere più antiche di Pennant, di Montagu e di Leach, le quali comunque trattassero de' Crostacei della Gran Bretagna, pure non sono fuori argomento, per li rapporti che esistono tra le specie di quelle acque e quelle del Mediterraneo. Avendo però con sedulità ricercato gli animali di tal classe da un lato, e dall'altro fatta una minuta analisi delle cennate opere, non ci è stato malagevole avvederci, che appena dir si possono studiate e conosciute abbastanza le specie degli ordini superiori, le quali comechè di statura maggiore, cadon più facilmente nelle

mani dell'investigatore. Tanto si osserva in effetti per li Decapodi e per gli Stomapodi. Ben altrimenti però va la faccenda per gli ordini inferiori, a cominciar da quello degli Amfipodi, ai quali limitiamo per ora la esposizione de' fatti raccolti. La picciolezza di tali Crostacei, la loro speciale organizzazione, e la condizione de' piedi delle prime paja che sottraggoni allo sguardo ordinario dell'osservatore, son tali circostanze, che ne rendono difficile la ricerca, e lo studio disadatto per chi non sia dotato di molta pazienza e scrupolosità nell'osservare, non meno che di buoni ottici strumenti fornito. Per la qual cosa trascurati o superficialmente studiati per lungo tempo, non è che in un'epoca a noi assai vicina ch'essi an cominciato a formare il soggetto di studi speciali; e proprio nel 1830, quando il sig. Milne Edwards, spinto dalle ragioni stesse, si determinava a pubblicare il risultamento delle sue ricerche sopra i Crostacei Amfipodi (1). Nel qual lavoro egli dava una più naturale classificazione di tali animali, e descriveva parecchie specie novelle, quattro delle quali proprie del golfo di Napoli (2). Il numero delle specie di Amfipodi si elevò allora a settantotto, non comprese le dubbie, precisamente quelle del Risso. Posteriormente il Kroyer ricercava gli Amfipodi nel mare della Groelandia, e vi discopriva una ventina di specie dalle già note diverse (3). E così di tratto in tratto il numero di questi animali è andato crescendo per contribuzione di varii in regioni svariate; per modo che nella più estesa opera del sudodato Naturalista francese sopra i Crostacei in generale, del 1840 (4), il numero ascese a cento e dieci. E più di recente ancora altri ne aggiungeva lo stesso Kroyer (5); il Rathke studiando le marine produzioni della Norvegia ne aggiungeva altre tredici (6); altre ne venivano descritte brevemente da noi medesimi (7); varii generi assai singolari

(1) Recherches pour servir à l'hist. nat. des Crustacés Amphipodes (Extrait.) — Ann. des sc. nat. — Aout 1830.

(2) *Lysianassa Costae* — *Amphitoe Prevostii* — *Am. Pausilipae* — *Gammarus Olivii*.

(3) Grönlands Amphipoder Beskreven.

(4) Histoire nat. des Crustacés-ne' Suit. à Buffon.

(5) In Tijdschrift voor Natuurlijke Geschiednis, IV. 2. 1844.

(6) Beitr. zur Fauna Norwegens — ne' *Nova Acta Acad. Caes. Leop. Car. Nat. Cur.* XX, 1843.

(7) Vedi: Catalogo de' Crostacei italiani, o di alcuni altri del Mediterraneo, ec. del Rev. Hope, Napoli 1851.

ritrovava G. De Natale in quell'ubertosissimo mar di Messina (1); ai quali ben associar si può per stranezza di forme l'altro in questo anno scoperto nel mare di Nizza dal distinto Naturalista inglese sig. Hope, il quale ne commetteva a noi la illustrazione, dandogli nome di *Guerinia* (2).

Quelle ragioni stesse pertanto, le quali rendono la ricerca e lo studio di questi Crostacei non atto per tutti, richiamavano la nostra attenzione, e ci impegnavano a lavorar su di essi. E niente risparmiando per più stagioni di quanto abbisognava per la investigazione di quelli che vivono nel golfo di Napoli, e riunendo questi a' già esistenti nel patrio gabinetto, raccolti nel Ionio dal prof. Costa nelle varie visite fatte a quel mare per missione di questa Reale Accademia; a taluni da noi medesimi ritrovati altra fiata nelle coste della estrema Calabria, e nelle acque dolci di diverse contrade in peregrinazioni da noi eseguite, ad alcuni infine inviatici dal nostro fratello Giuseppe tratti dall'Adriatico che bagna la Terra d'Otranto, siamo giunti ad un punto, superiore a quello cui da principio miravamo. Ed invero non potevamo pensare, che il numero delle specie d'Amfipodi che al nostro regno appartengono, si elevasse a più che sessanta, quante in realtà or ne possediamo. Noi le abbiám tutte sottoposte a diligente e scrupoloso esame; ne abbiám analizzata ogni esterna lor parte, soccorsi com'era mestieri da non mediocre microscopio. Per tal modo i caratteri loro, siano generici, siano specifici son rimasti nettamente chiariti. E le immagini delle specie nuove od illustrate che noi vi presentiamo, riunite in quattro tavole, crediamo siano sufficienti a dar luminosa prova della minutezza con la quale à proceduto l'esame. Delle loro specialità intanto diremo brevemente.

Delle sessantadue, quante propriamente son le nostre specie, ve ne à diciotto risapute abitatrici del Mediterraneo; cinque di mari a questo stranieri, come della Gran Brettagna (tre), della Norvegia (una) e dell'Egitto (una); e quattro proprie di acque dolci; in uno ventisette

(1) Descrizione zoologica di una nuova specie di Plojaria e di alcuni Crostacei del Porto di Messina, 1850 — Su pochi Crostacei del Porto di Messina 1850.

(2) Illustrazione di tre nuove specie di Crostacei scoperte dal Rev. Hope nel mare di Nizza.

già note. Le rimanenti trentacinque sembrano un patrimonio del quale oggi la Carcinologia si arricchisce. E tra esse parecchie ve n'è le quali, non prestandosi ad essere ascritte a generi già stabiliti, ci han costretti fondarne de' nuovi; siccome la opportunità avuta di esaminare i due sessi di specie già note, ci ha messi nel caso di modificare e chiarire i caratteri di alcuni generi fondati da altri naturalisti.

E dapprima il genere *Amphithoe*, qual si trova dall' Edwards caratterizzato, racchiude specie per abito tra loro dissimili più di quel che non siano alcune Amphitoe dai *Gammarus*. Ci è quindi sembrato acconcio separarle in generi diversi, soprattutto in seguito delle nuove forme delle quali si è ora accresciuto. Sicchè ai due già precedentemente da noi stessi proposti, *Epimeria* ed *Amphithonotus* (1), altri due or ne aggiungiamo, *Nototropis* e *Probolium*; quest'ultimo per comprendervi una singolare specie, in cui gli epimeri de' primi quattro anelli toracici sono grandi, e taluni quasi tra loro saldati costituendo un'ampia corazza da ciascun lato del corpo.

Il genere *Melita* fondato da Leach sul *Gammarus palmatus* descritto da Montagu tra gli animali nuovi delle coste meridionali del Devonshire (2) era quasi andato in obbligo, e la specie rimasta tradizionale, per non essersi più tal crostaceo osservato dopo del primo scopritore. Sicchè il Desmarest lo riportò con le parole stesse del Leach, e l'Edwards lasciò in dubbio per fino se identico fosse a quello ch'ei descriveva col nome di *Gammarus Dugesii* (3). Il Rathke tra i Crostacei raccolti nel mar di Norvegia uno trovonne, nel quale sembrogli intravedere la *Melita palmata*, senza potersene accertare, per esser l'individuo unico e mutilato. Noi abbiamo avuta la ventura di scoprire questo singolare crostaceo in copia di individui, per modo che abbiain potuto sottometterlo ad una analisi minuziosa; dalla quale risulta che non solo non devesi esso confondere col *Gammarus Dugesii* dell' Edwards, mancando d'ogni vestigio di filetto accessorio nelle antenne superiori, ma offre singolarità non ancora avvertite, per le quali il genere *Melita* si eleva ad una importanza scientifica tanto maggiore, per

(1) Catalogo sopracitato.

(2) Description of several marines anim. ec. Linn. Trans. VII, p. 69, tab. 6. f. 4.

(3) Suites à Buffon, Crust. III, p. 55.

quanto più sconosciuto è rimasto per poco men di mezzo secolo. Fra le quali singolarità cenneremo in primo luogo, che quella special forma di mani del secondo pajo, che Leach assumeva ad essenziale carattere generico, non appartiene che al maschio soltanto, nella femmina esse conformandosi al modo ordinario. Ed uno de' tanti individui ci à offerto sotto questo rapporto un caso di ibridismo, presentando un piede di maschio nel lato dritto, e quello di femmina nel sinistro. Il quale fatto viene ad ispirarci nell'animo una incertezza sulla normalità di quell'*Amphithoe* dell'Egitto figurata da Savigny, e dall'Audouin intitolata *A. Fresnelii*. In questa in effetti à luogo una differenza analoga fra i piedi del secondo pajo: quello di un lato avendo la mano assai grande e di forma speciale, piccola e di forma ordinaria quello dell'altro. Potrebbe come nella *Melita* l'una esser la forma propria del maschio, della femmina l'altra. Non meno degni di nota sono nella *Melita* i piedi del primo pajo, la cui mano nel suo lato anteriore resta divisa in due lobi per una profonda scissura, nel fondo della quale s'inserisce l'unghietta forte ed adunca, che nella flessione urta contro il lobo inferiore, al modo stesso che fa la superiore contro l'inferior mascella di uccello rapace.

Tra le specie che ci son servite di tipo per generi novelli due ve ne à assai affini ai *Gammarus*. L'una di esse distinguesi per li piedi posteriori, i quali lungi dallo avere il primo solo articolo dilatato e i rimanenti cilindracei, offre tutti gli articoli dilatati e laminari, l'ultimo solo essendo angusto e poco compresso; onde è stato da noi denominato *Elasmopus*. Nell'altro, che diciamo *Ceradoeus*, son le antenne inferiori caratteristiche, dal cui primo articolo sorge un pezzo soprannumerario, articolato con quello inferiormente alla inserzione del secondo articolo, lungo, stiliforme e diretto in avanti. Il qual fatto à il suo analogo nel genere *Rhoa* tra gl'Isopodi, ove lo abbiamo noi scoperto, senza che altri ne avesse fatta prima menzione.

Un altro genere, cui diamo nome di *Egidia*, vien caratterizzato dai piedi toracici del terzo e quarto pajo assai tra loro diversi, e ciascun pajo alla sua volta di forma ben dalle ordinarie lontana.

Medio tra gli *Alibrotus* ed i *Callisoma* si presenta un altro genere da noi detto *Lehnopus*, che à de' secondi la struttura de' quattro piedi anteriori, e de' primi le lunghe e gracili antenne. Questo crosta-

ceo però è assai più notevole di quel che a prima giunta può credersi, per un carattere di molta importanza relativo alla organizzazione di questi minuti animali. Alla base de' piedi toracici, al posto stesso ove stanno le vescichette respiratorie, trovansi altrettante appendici di forma piramidale, simili alle branchie de' Decapodi, formate da uno stelo mediano, e da un gran numero di lamelle a questo affidate nel modo ordinario. (Tav. I, fig. 3, *h.*) Sulla natura delle quali appendici non osiamo ancor pronunziare un definitivo giudizio, non avendo avuto agio di studiarle sul vivo e sopra molti individui. Sarebbero mai le appendici della femmina deputate a trattener le uova? Non vogliamo escluder questa possibilità, ma in pari tempo riconosciamo che ove pure ciò fosse, non cesserebbe di esser un fatto singolare per la forma e struttura tutta speciale che esse presentano.

In fine tra nuovi generi scoperti, spettanti alla famiglia de' Gammaridei, più interessante ancora crediamo quello cui abbiamo imposto nome di *Araneops*. Esso in effetti offre una rilevante eccezione al carattere generale degli occhi degli Amphipodi non solo, ma de' Crostacei tutti. Questi organi nella classe di cui parliamo sono al numero di due solamente e composti, tranne il caso non siano osservabili. Ne' Crostacei de' quali è parola non esistono occhi composti, bensì quattro ocelli, ossia occhi semplici, disposti due per cadaun lato presso l'anterior margine del capo, alla maniera propria degli *Araenidi*. La qual singolarità esso à di comune soltanto col gen. *Ampelisca* Kroy. col quale à certo il nostro moltissima simiglianza ancora per molti altri caratteri. Questi generi quindi si associano a' tanti altri, che qui non è luogo ricordare, i quali servono a dimostrar quella legge di filosofia zoologica, che la natura fra gli animali di una classe fa comparire come eccezionale un organo, che è poi caratteristico di animali di classe diversa.

Non meno ferace di fatti importanti è stata la piccola famiglia de' Podoceridei. A questa appartiene uno de' nuovi nostri generi, intitolato *Microdicutopus*, il quale avvicinasì al genere *Unciola*, Say dell'America, per essere i piedi del primo pajo maggiori de' secondi, allontanandosene poi per questi ultimi, i quali benchè gracili e piccoli, sono nulladimeno terminati da unghietta che inflettesi contro il margine anteriore della mano, formandone così un organo atto alla presa.

Oltre di che una notevole differenza osservasi nel nostro crostaceo ne' piedi del primo paio fra i due sessi: nel maschio avendo forma e proporzione ne' diversi articoli abbastanza singolari, mentre hanno forma ordinaria nella femmina. Un fatto analogo a luogo nel genere *Eriethonius* dell'Edwards, con tal diversità, che essendo quì i piedi del secondo paio maggiori, è in questi che la discrepanza fra i due sessi si osserva. E poichè il carattere tenuto per primario ed essenziale dal fondatore del genere è proprio del maschio soltanto, ne è risultata la necessità di modificar la diagnosi del genere, mentre l'abbiam pure accresciuto di una seconda specie assai dall'unica servita di tipo distinta. Nel genere *Corophium* si sono descritte due specie, il *C. longicorne*, ed il *C. Bonellii*: questo secondo dal primo diverso pel terzo articolo delle antenne inferiori mancante di spina. La specie che noi abbiám aggiunta ci mette nel dubbio che esse non siano che i due sessi di una medesima: mentre osserviamo appunto che nel maschio il terzo articolo delle antenne inferiori è fornito di tre spine decrescenti presso l'estremità, mentre ne è mancante del tutto nella femmina. La nostra pertanto a' varii caratteri fisici che la distinguono dal *C. longicorne*, associa pure l'abitazione. Di fatti secondo le osservazioni del sig. D'Orbigny il *C. longicorne* vive in cunicoli che si scava entro il fango. Il nostro, che abbiám chiamato *acherusicum*, abita il lago Fusaro, ove è abbondante; e stassene costantemente fra la cespugliosa *Acamarchide* ed i varii fuchi che crescono intorno alle canne, che gl'industriosi del lago impiantano al fondo per prestare attacco alle uova di ostriche.

Da ultimo nella sezione degli Amfipodi anomali non è mancata qualche specialità. Tale deve ritenersi una specie del genere *Vibilia*, di cui una sola conosceasene de' mari dell'Asia; oltre una *Hyperia* dalla comune del Mediterraneo molto distinta.

Or da' fatti cennati si può agevolmente dedurre, che le acque che bagnano la parte continentale delle Due Sicilie non solo abbondano di Crostacei Amfipodi, forse più che ogni altra regione, ma racchiudono pure forme non meno interessanti di quelle, che hanno offerte le acque dell'America al Say, della Groelandia al Kroyer, e le norvegiche al Rathke. E sembra non resti smentito quel che dal principio dicemmo, che il risultamento delle nostre ricerche è stato assai maggiore di quello, che ci avessimo potuto anticipatamente augurare.

Riassumendo le cose discorse, il lavoro che oggi vi presentiamo contiene la descrizione di trentacinque specie novelle, e di otto altre che abbiám credute degne di illustrazione, le une e le altre sistematicamente ordinate con le rimanenti diciannove che si sono indicate soltanto; più i caratteri di otto nuovi generi, spettanti tutti alla sezione degli Amfipodi genuini. I quali era mestieri armonizzare coi già conosciuti, de' quali taluni in seguito delle nostre osservazioni modificati ne'rispettivi caratteri generici. Abbiamo quindi stimato utile, se non necessario, premettere un prospetto della distribuzione sistematica degli Amfipodi genuini, nel quale le differenze generiche si rilevassero chiare ed evidenti.

PROSPETTO

DELLA DISTRIBUZIONE SISTEMATICA DEGLI AMFIPODI GENUINI. (*)

- I. Corpo compresso, con gli epimeri, soprattutto de'primi quattro anelli toracici, alti, abbraccianti i rispettivi piedi.

Fam. I.^a GAMMARIDEI.

- A. Capo con soli ocelli, senza occhi reticolati.

Sottofam. I.^a AMPELISCINI.

Ampelisca — Araneops

- AA. Capo con due occhi reticolati, senza ocelli.

- B. Piedi del primo paio non terminati a guisa di tanaglia.

- C. Antenne superiori crasse, assai più corte del peduncolo delle inferiori.

Sottofam. II.^a TALITRINI.

- a. piedi del secondo paio robusti, organizzati per la presa. Orchestia

- aa. Piedi del secondo paio delicati, non atti alla presa Talitrus

- CC. Antenne superiori più lunghe del peduncolo delle inferiori.

- D. Piedi del secondo paio, e d'ordinario anche del primo non atti alla presa.

Sottofam. III. LISIANASSINI

- b. antenne superiori fornite di filetto accessorio.

- c. antenne superiori brevi, col peduncolo assai grosso.

- d. piedi del primo paio robusti, terminati da unghia conica . . . Lysianassa

(*) Si abbia presente il § che riguarda tal Memoria nelle *notizie preliminari* a questo volume.

- dd. piedi del primo paio gracili, lunghi, filiformi Callisoma
- cc. antenne superiori lunghe e gracili.
- e. piedi del primo e secondo paio lunghi gracili e filiformi, diversi tra loro Ichnopus
- ee. piedi del primo e secondo paio quasi simili, con l'ultimo articolo spatoliforme, terminato da robusta unghietta conica Alibrotus *
- bb. antenne superiori prive di filetto accessorio.
- f. antenne superiori brevissime, con peduncolo grosso, le inferiori minute. Phlias *
- ff. antenne superiori ed inferiori lunghe e gracili Acanthonotus *
- DD. Piedi del secondo paio, e quasi sempre anche quelli del primo atti alla presa.
- Sottofam. IV.^a GAMMARINI.
- g. piedi del terzo e quarto diversi tra loro, quelli del quarto assai dilatati Egidia
- gg. piedi del terzo e quarto paio filiformi e simili.
- h. antenne superiori prive di filetto accessorio.
- i. piedi del secondo paio molto diversi ne'due sessi; quelli del primo con l'unghietta inserita in una smarginatura della mano Melita
- ii. piedi del secondo paio simili ne'due sessi; quelli del primo con l'unghietta inserita nell'angolo antero-superiore della mano.
- j. epimeri di grandezza ordinaria
- k. dorso ritondato, inerme Amphithoe
- kk. dorso spinoso.

- cc. quarto, quinto e sesto articolo del torace senza piedi distinti Cerapodina *
- bb. antenne inferiori piediformi Cerapus *
- aa. piedi del secondo paio poco diversi nei due sessi, in ambedue però l'ultimo articolo maggiore del penultimo Podocerus
- AA. Piedi del primo paio organizzati per la presa, molto più grandi di quelli del secondo paio.
Sottofam. VII. UNCIOLINI.
- d piedi del secondo paio minuti, filiformi, imperfettamente atti alla presa Microdeutopus
- dd piedi del secondo paio in niun modo atti alla presa. Unciola *
- AAA. Nessun paio di piedi atto alla presa.
Sottofam. VIII.^a COROFINI.
Corophium

N. B. I generi seguiti da asterisco non hanno finora alcun rappresentante nelle acque del Regno di Napoli.

Ben intendiamo non potersi il prospetto che precede considerare come completo. Egli è risaputo che ogni nuova forma che si scopre nel volerla armonizzare con le già note fa nascere il bisogno di modificare simili prospetti, i quali variar debbono a seconda de' materiali che si hanno ad ordinare. Ci auguriamo nondimeno che esso servir possa di scheletro per un più aggiustato ordinamento, che far se ne potrà da chi sia in condizione della nostra più favorevole ed in possesso di collezioni generali più estese.

(In appoggio di ciò che superiormente dicevamo, si hanno già due altri generi di Anfipodi da aggiungere ai sopra riportati, cioè *Pontoporeja* Kroyer, e *Bathyporeja* Lind. (1), che conosciamo soltanto per le descrizioni datene da' rispettivi autori.

(1) Lindström-Bidrag till kännedom om Östersjöns invertebrat-fauna — Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. Tofte Argangen 1855, Stockholm 1856, p. 60.

SEZIONE I.

AMFIPODI GENUINI

FAMIGLIA I.^a GAMMARIDEI — SOTTOFAMIGLIA I.^a AMPELISCINI

Genere ARANEOPS (1), A. Cost.

Caratteri generici — *Caput elongato-conieum. Ocelli quatuor in capituli margine anteo positi. Antennae superiores unisetae; inferiores longiores, pone illas insertae. Epimera quatuor anteriora infra valde producta, media angustiora. Pedes primi et secundi paris subaequales, prehensiles, ungue intus serrato; tertii et quarti cylindracei, ungue longo, articulum antepenultimum, ultimis duobus simul valde majorem, apice attingente. Pedes quinti, seti et septimi paris articulo primo valde elato, laminari.*

Singolare è questo genere per due principali caratteri; l'uno degli ocelli, l'altro de'piedi. Il capo è conico e declive, privo di occhi composti o reticolati, avendo invece quattro ocelli, due per cadaun lato, posti presso il margine anteriore, simili a quelli de'ragni. I piedi delle due prime paia sono quasi filiformi, lungamente frangiati, con unghietta che inflettesi contro il margine antero-inferiore della mano, come all'ordinario. Quelli delle due paia seguenti sono cilindracei, con l'antepenultimo articolo molto maggiore de'due ultimi presi insieme; terminati da unghietta lunga, quasi diritta ed acula, a guisa di lancetta, che nella

(1) Da *Aranea* ragno, ed ωψ occhio.

cessione adattasi con la estremità sulla faccia interna dell'antipennultimo articolo. I piedi delle tre ultime paia hanno il primo articolo assai dilatato, i rimanenti molto corti, soprattutto in quelli del settimo paio. Le antenne superiori sono impiantate all'estremità del capo: le inferiori contigue fra loro, e distanti dalle prime; col peduncolo composto di tre soli articoli distinti.

I più ampi dettagli possono rilevarsi dalla descrizione della specie seguente, che serve di tipo.

I (1) *ARANEOPS DIADEMA*, A. Cost.

Tav. I, fig. I.

A. antennis superioribus inferiorum pedunculo longioribus, seta pedunculo duplo longiore; inferioribus abdominis articulum primum attingentibus, pedunculi articulo ultimo praecedenti subaequali; albidus, orbitis maculaeque ad epimerorum anteriorum apicem rubris. — Long. Lin. 4 1/2.

Corpo oblungo, compresso, a dorso liscio ritondato. Capo conico-cilindraceo, lungo poco meno de' primi tre anelli toracici presi insieme, anteriormente ritondato. Torace ad anelli lisci nel margine posteriore. Addome coi tre primi anelli assai grandi, de' quali il terzo nel margine posteriore smarginato d'ambo i fianchi; gli altri tre piccoli e decrescenti. Antenne superiori di un quarto più lunghe del peduncolo delle inferiori: il primo articolo del loro peduncolo breve e rigonfiato; il secondo cilindraceo e più lungo del primo; il terzo assai corto; il filetto lungo il doppio del peduncolo, composto di ventiquattro articoli scarsamente pelaccinti. Antenne inferiori lunghe quanto il capo e torace insieme, o poco più; il peduncolo un terzo della lunghezza totale, il primo articolo non oltrepassa il margine inferiore degli epimeri, gli altri due quasi eguali in lunghezza: il filetto simile a quello delle superiori, con quaranta a quarantaquattro articoli. Epimeri de' primi quattro anelli toracici assai alti, ornati di cigli lungo il margine inferiore; il primo più angusto alla base, più largo inferiormente e ritondato; i due seguenti egualmente angusti in tutta la lunghezza; il quarto assai largo, e posteriormente abbracciante in parte il quinto; questo del pari che i due se-

guenti piccoli ed assai bassi. Piedi del primo paio, fig. 1 *b*, con gli ultimi due articoli quasi eguali in lunghezza, compressi, lungamente pelacciuti nel margine inferiore, l'ultimo un poco dilatato inferiormente presso la base, e ristretto gradatamente da questa all'estremità; unghia leggermente arcuata, con quattro a cinque spine sul margine concavo, l'ultima delle quali, formante l'estremità, maggiore, e tale che l'unghia sembra biarticolata. Piedi del secondo paio, fig. 1 *c*, diversi solo dai primi per gli ultimi due articoli filiformi, l'ultimo più corto del penultimo. Piedi delle due paia seguenti, fig. 1 *d e*, di egual lunghezza, i quarti poco più grossi de' terzi, cilindracei, con l'antepenultimo articolo fusiforme, il penultimo assai breve, l'ultimo cilindrico, leggermente arcuato: l'unghietta nella flessione tocca con la estremità il terzo inferiore dell'antepenultimo articolo. Piedi del quinto paio, fig. 1 *f*, col primo articolo assai dilatato e ritondato posteriormente, in modo da essere un poco più largo che alto; gli altri angusti compressi, il penultimo con una serie di punti impressi lungo il margine posteriore, l'ultimo più angusto de' precedenti; l'unghietta rivolta in dietro, dilatata e tridentata alla base dalla parte convessa, fig. 1, *g*. Piedi del sesto paio, fig. 1 *h*, simili ai quinti, col primo articolo però meno dilatato, e più alto che largo, quasi rettangolare, ad angoli ritondati. Piedi del settimo paio, fig. 1 *i*, più corti degli altri; col primo articolo ristretto alla base, e dilatato posteriormente fino a due terzi della lunghezza, indi ritondato e nuovamente ristretto, e prolungato inferiormente in lobo, nell'angolo antero-inferiore fornito di due denti spiniformi; i rimanenti articoli presi insieme poco più lunghi del primo, con l'unghia quasi diritta, lanceolata e frangiata ne' margini. Falsi piedi del sesto anello addominale sorpassanti notabilmente quelli del quarto e quinto, che terminansi ad egual livello. Appendici terminali dell'addome orizzontali, raggiungenti la metà degli stilette degli ultimi falsi piedi. Colore nel vivo bianco-latteo uniforme, con un cerchio intorno a ciascun ocello, ed una macchia all'estremità degli epimeri del primo anello toraccio di color scarlatto.

Assai abbondante in alcuni luoghi del golfo di Napoli, nella primavera. Vive tra fuchi. La femmina porta le uova già mature ne' primi giorni di giugno.

2 (2) ARANEOPS BREVICORNIS, A. Cost.

Tav. I, fig. 2.

A. antennis superioribus inferiorum articulum penultimum pedunculi vix superantibus, seta pedunculo sesqui longiore; inferioribus articulo ultimo pedunculi praecedente distincte brevior; seta pedunculo sesqui longiore; albido-cinereus, dorso fusco-griseo variegatus. — Long. lin. 5 1½.

Antenne superiori oltrepassanti appena il penultimo articolo del peduncolo delle inferiori; il primo articolo assai breve e rigonfiato, il filletto lungo una volta e mezza il peduncolo. Antenne inferiori lunghe quanto nella specie precedente; però il peduncolo proporzionalmente più lungo, occupando i due quinti della lunghezza totale, e de' suoi articoli l'ultimo distintamente più corto del penultimo. Primo articolo dei piedi del settimo paio dilatato dalla base fino all'estremità; i tre seguenti assai corti, il quinto ovato-ellittico. Falsi piedi del sesto anello addominale sorpassanti di poco i precedenti. Colore bianco sudicio, variegato di grigio oscuro sul dorso degli ultimi tre anelli toracici e de' primi tre addominali.

Vive con la specie precedente, della quale però è molto più rara. La femmina porta le uova mature nella stessa epoca.

Osservazioni. Egli è indubitato aver questo nostro genere grandissima affinità col genere *Ampelisea* Kroy.; però non avendo sott'occhio la originale descrizione dell'autore, nè le figure di quello per poterne fare il confronto d'ogni parte, non possiamo stabilire quali ne siano le più essenziali caratteristiche differenze.

(In questa stessa tribù deve prender posto il genere *Haploops*, fondato dal sig. Liljeborg (1) a spese di alcune specie del genere *Ampelisea* di Kroyer, distinte principalmente per aver due soli ocelli.

(1) Ofversigt af Kongl. Vetén. Akad. ecc. 1855. Stockholm 1856, p. 135.

SOTTOFAM. II.^a TALITRINI

Genere ORCHESTIA, Leach.

1 (3) ORCHESTIA LITTOREA.

Gammarus littoreus, Mont.—*Orechestia littorea*, Leach. Edw.

Frequente ne' littorali di varie contrade del regno. Nella Terra d'Otranto acquista dimensioni maggiori che altrove. Incontrasi egualmente presso le sponde di laghi che sono in comunicazione col mare: noi l'abbiamo in effetti trovato presso il lago del Bagno in Ischia, pria che questo fosse convertito in porto.

2 (4) ORCHESTIA MEDITERRANEA, A. Cost.

O. antennis superioribus inferiorum pedunculi articulum penultimum vix superantibus; pedibus secundi paris manu a tertio ad apicem angustata; margine unguiculari valde obliquo, subrecto, spinuloso, apice tuberculo minuto terminato, ungue basi valde arcuata, dehin subrecta, medio incrassata, ad apicem iterum inflexa; septimi paris articulis tertio et quarto valde elatis, margine serratis et spinulosis, quarto cordato, basi antice magis lobato-elato, infra angustiore. — Long. lin. 11.

Specie a primo aspetto assai affine alla *Orechestia littorea*, dalla quale nondimeno differisce per la forma delle mani del secondo paio, e per quella del quarto articolo de' piedi del settimo. Nella *Or. littorea* le mani del secondo paio sono alte poco meno che lunghe, inferior-

mente assai convesse; il margine unguicolare (1) è obbliquo, e forma angolo un poco ottuso con l'inferiore, del quale non è mica più lungo; è convesso, finamente dentellato e spinoso, e terminato inferiormente da un tubercolo, che è continuazione dello spigolo inferiore, il quale presso di quello offre dalla faccia interna una delicata scanalatura ove si alloga la estremità dell'unghietta: questa è regolarmente archeggiata, seguendo la curva del margine unguicolare. I piedi del settimo paio hanno il terzo articolo dilatato dalla base all'estremità, e quasi in triangolo isoscele, il quarto quasi sì largo alla base che lungo, poco ed in linea diritta ristretto da questa all'estremità, che è pressochè troncata: ambedue nel margine fatti a grossa sega e spinosi.—Nella *Or. mediterranea* la mano del secondo paio è sensibilmente più lunga che alta, col margine unguicolare immensamente obbliquo, lungo il doppio dell'inferiore, col quale forma un angolo ottusissimo; diritto od anche leggermente concavo, guernito di delicate spinuzze, non terminato da tubercolo inferiormente; l'unghietta è pur essa lunga, inarcata all'origine, indi quasi diritta ed ingrossata nel mezzo del lato inferiore, assottigliata ed archeggiata all'estremità. I piedi del settimo paio hanno il terzo e quarto articolo anche dilatati, seghettati e spinosi, però il quarto dopo la dilatazione basilare restringesi più o men bruscamente, risultando lobato. Del resto sulla dilatazione di questi articoli de' piedi del settimo paio noi attacchiamo poca importanza specifica, vedendo come essa sia soggetta a variare secondo il maggiore o minore sviluppo individuale.

Osservazioni. A' questa specie qualche affinità con la *Or. Montanui*; ma ne differisce per le antenne superiori nella nostra lunghe, come nella *littorea*, quanto i due primi articoli del peduncolo delle inferiori; e per la mancanza del grosso tubercolo puntuto o dente nel mezzo del margine interno.

Frequente sul littorale del mediterraneo, parimenti che dell'adriatico.

(1) Indichiamo con tal nome, che ci pare assai acconcio, il margine della mano contro del quale l'unghia s'infilette.

3 (5) ORCHESTIA CONSTRICTA, A. Cost.

O. antennis superioribus inferiorum pedunculi articulum penultimum haud vel vix superantibus; pedibus secundi paris manu ovalo-oblonga, margine unguiculari valde obliquo, convexo, ante apicem profunde sinuato; pone sinum spinuloso, antea constricta laevi; ungue basi valde arcuato, dehin subrecto, dente lato brevi obtuso ante medium armato, ad apicem iterum inflexo; pedibus septimi paris haud dilatatis, illis sexti similibus. — Long. lin. 11.

La nessuna dilatazione de'piedi del settimo paio farebbe in questa Orchestia riconoscere la *Or. Bottae* dell'Edwards. Poichè però egli nulla di preciso dice della forma delle mani del secondo paio, sulla quale meglio fondar si possono le specifiche differenze, mentre la dilatazione del terzo e quarto articolo del settimo paio l'abbiam trovata variabile, fino a svanire, sia nella *O. littorea*, sia nella nostra stessa *mediterranea*; così è che noi non abbiam potuto riferire la presente specie alla *O. Bottae*. Il primario carattere pertanto di questa Orchestia è riposto nella forma della mano del secondo paio. Essa è molto più lunga che alta, ristretta dal terzo posteriore all'estremità, col margine unguicolare assai obbliquo, formante angolo ottusissimo col posteriore, del quale è molto più lungo, sporgente e finalmente spinoso ne' due terzi posteriori, indi rientrando formando un seno oltre del quale la mano rimane più stretta e liscia. L'unghia è fortemente inarcata poco dopo la sua origine, indi cammina quasi diritta, offrendo nel lato interno una sporgenza tubercoliforme posta al primo terzo di questa porzione diritta, per modo che nella flessione va a prender posto nel seno descritto: l'estremità è assottigliata e leggermente archeggiata.

Trovata dal sig. Giuseppe Costa nell'adriatico che bagna la Terra d'Otranto, unita alle due precedenti, delle quali però sembra più rara.

4 (6) ORCHESTIA DESHAYESII.

Savig. Egit. tav. II, fig. 8.—*Orchestia Deshayesii*, And., Edw., A. Cost. Faun. Nap. tav. VIII bis, fig. 3.

Specie non molto rara nel nostro regno, benchè sia la meno frequente. L'abbiam raccolta sul litorale di Pozzuoli.

Osservazioni. Negl'individui che possediamo la mano de' piedi del secondo paio è molto meno inarcata sul dorso di quel che la figura del Savigny la rappresenti. Nel resto convengono perfettamente.

Genere TALITRUS, Latr.

1 (7) TALITRUS SALTATOR.

Squilla saltatrix, Klein.—*Oniscus locusta*, Pall.—*Cancer locusta*, Lin.—*Astacus locusta*, Penn.—*Gammarus locusta*, Fab.—*Talitrus locusta*, Latr., Leach., Desm.—*Gammarus saltator*, Mont.—*Talitrus littoralis*, Leach.—*Talitrus saltator*, Edw.

Frequentissima è questa specie sopra tutte le spiagge del regno, sotto le pietre, e tra fuchi od altri corpi marini rigettati dalle onde: per modo che a questa in preferenza dal volgo si applica il nome di *pulei di mare*. Vive pur essa presso le sponde de' laghi, siano assolutamente salsi, siano comunicanti col mare, insieme alla *Orchestia littorea*.

2 (8) TALITRUS PLATYCHELES.

Talitrus platycheles, Guer.—A. Cost. Fn. Nap. tav. VIII bis, f. 2.

Specie rarissima sulle coste del nostro regno.

SOTTOFAM. III.^a LISIANASSINI

Genere LYSIANASSA, Edw.

1 (9) LYSIANASSA SPINICORNIS, A. Cost.

Tav. I, fig. 4.

L. antennis superioribus articulo primo pedunculi infra in spinam antea producto, tertio secundo vix brevior, seta primaria pedunculi longitudine; inferioribus illis paulum brevioribus, seta pedunculo vix longiore; oculis maximis; pedibus secundi paris ungiculo praeditis; pedibus spuris abdominalibus fere aequae terminatis.—Long. lin. 3-31½.

Antenne superiori lunghe poco più del capo e due primi anelli toracici presi insieme; il primo articolo del peduncolo assai grande, all'estremità prolungato inferiormente in valida ed acuta spina, diretta in avanti, il terzo poco più corto del secondo, e tutti due insieme più corti del primo; il filetto primario lungo quanto il peduncolo, gracile, di otto articoli; l'accessorio metà del primario, con cinque articoli. Antenne inferiori gracili, un poco più corte delle superiori; i due ultimi articoli del peduncolo allungati, cilindracei, eguali fra loro; il filetto di un quinto più lungo del peduncolo, di otto a dieci articoli. Occhi assai grandi, occupanti la maggior parte de'lati del capo, a grosso reticolo. Piedi del primo paio robusti, col corpo lungo quanto la mano; questa ovato-conica, terminata da unghietta conica, formante continuazione con la mano. Piedi del secondo paio forniti di unghietta allungata, adunca e bidentata all'estremità, inflettentesi contro l'angolo antero-inferiore della mano assai prolungato. Piedi delle ultime tre paia crescenti successivamente in lunghezza da'quinti ai settimi, col terzo articolo un poco dilatato e

prolungato ad angolo acuto nella estremità posteriore. Falsi piedi degli ultimi tre anelli addominali allungati, gracili, terminati quasi ad egual livello. Appendici terminali dell'addome orizzontali, oblunghe, più corte del peduncolo degli ultimi falsi piedi. Epimeri de' primi quattro anelli assai alti; quelli del quarto più larghi ed abbraccianti in parte quelli del quinto.

Trovasi nel golfo di Napoli: assai rara.

2 (10) *LYSIANASSA LORICATA*, A. Cost.

Tav. I, fig. 5.

L. antennis superioribus inferioribus paulum longioribus, pedunculi articulis valde deerescentibus, seta primaria pedunculi longitudine; inferioribus seta pedunculo sesqui longiore; pedibus secundi paris unguiculo minutissimo praeditis; pedibus spuris abdominalibus quartis quintos, quintis sextos distincte superantibus. — Long. lin. 4.

Antenne superiori un poco più lunghe del capo e due primi anelli toracici insieme; coi tre articoli del peduncolo molto decrescenti in lunghezza e grossezza; il filetto primario quasi eguale al peduncolo in lunghezza, di tredici articoli; l'accessorio poco meno della metà del primario, con cinque o sei articoli. Antenne inferiori appena un poco più corte delle superiori; i due primi articoli del peduncolo non oltrepassanti il margine inferiore degli epimeri, i quali occultano ancora l'origine del terzo articolo; il filetto di un terzo più lungo del peduncolo. Occhi piccoli, reniformi. Piedi delle due prime paia simili a quelli della specie precedente, meno l'unghietta de'secondi, la quale è assai più rudimentale, e l'angolo antero-inferiore della rispettiva mano poco prolungato. Terzo articolo de' piedi delle ultime tre paia appena dilatato. Falsi piedi degli ultimi tre anelli addominali terminati a livello diverso, i quarti superando notabilmente i quinti, ed i quinti di altrettanto i sest.

Vive nel golfo di Napoli, tra fuchi, poco frequente.

3 (11) *LYSIANASSA HUMILIS*, A. Cost.

Tav. I, fig. 6.

L. antennis brevibus subaequalibus, superioribus pedunculi articulo tertio secundi fere longitudine, seta pedunculo paulum brevior; inferioribus filiformibus, seta pedunculo vix brevior; pedibus secundi paris unguiculo destitutis; pedibus spuris abdominalibus fere aequae terminatis. — Long. lin. 21½-3.

Antenne proporzionalmente più corte che nelle due specie precedenti; peduncolo con gli ultimi due articoli quasi eguali in lunghezza; il filetto primario eguale ai tre quarti del peduncolo in lunghezza, con sei ad otto articoli distinti: l'accessorio poco meno della metà del primario, con quattro articoli. Antenne inferiori appena un poco più corte delle superiori, con gli ultimi due articoli del peduncolo eguali fra loro; il filetto quasi eguale al peduncolo, con otto a dieci articoli. Piedi del primo paio col carpo assai più corto della mano; questa oblunga, cilindracea, ne' giovani individui ristretta all'estremità per modo che l'unghietta ne occupa quasi tutto il diametro; negli adulti terminata da un margine troncato e sinuoso, coll'angolo antero-inferiore un poco ottusamente prolungato, e l'unghietta occupa una porzione soltanto di detto margine, contro del quale s'infilette. Piedi del secondo paio con la mano troncata obbliquamente all'estremità, lungamente pelacciuta, senza alcun vestigio di unghietta. Piedi delle ultime tre paia poco crescenti in lunghezza da' quinti ai settimi, col penultimo articolo assai corto. Epimeri del quarto anello toracico abbraccianti pochissimo quelli del quinto. Falsi piedi addominali terminati quasi ad egual livello.

Vive nel golfo di Napoli, tra fuchi; assai rara.

(12) *LYSIANASSA COSTAE*.

Lysianassa Costae, Edw.—A. Cost. Fn. Nap.

con le precedenti, egualmente rara. Trovasi ancora nell'acqua bagna l'estrema Terra d'Otranto, d'onde ci è stata rimessa da G. Costa.

Genere CALLISOMA, Cost.

1 (13) CALLISOMA PUNCTATUM.

Callisoma punctatum, Cost. Fn. Nap. Tav. VIII, fig. 4-7.

Nel golfo di Napoli, tra fuchi, alquanto raro; nella primavera.

2 (14) CALLISOMA HOPEI.

Callisoma Hopei, A. Cost. Fn. Nap. Tav. VIII bis, fig. 1.

Nel golfo di Napoli, tra fuchi, non raro. Trovata talvolta in numero straordinario d'individui, raggruppati entro gusci di Spatanghi.

Genere ICHINOPUS (1), A. Cost.

Caratteri generici — *Antennae longae, graciles, superiores bise-tae. Pedes quatuor anteriores longi, graciles, filiformes, haud prehensiles, primi unguiculo minuto infra pectinato terminati; secundi submembranacei, manu apice longe fimbriata, unguiculo vix conspicuo.*

Illustrazione. Molto simile a' Callisomi per la conformazione de' piedi delle due prime paia, ne differisce essenzialmente per le antenne superiori lunghe e gracili al pari delle inferiori, e fornite ancora di filletto accessorio assai sviluppato. Dagli *Alibrotus*, cui per le antenne somiglia, discostasi per li quattro piedi di avanti diversamente conformati. È in questo genere che abbiám trovate quelle appendici simili alle branchie de' decapodi, inserite all'origine de' piedi toracici in forma piramidale, con uno stelo mediano, ed una serie di lamine da cadaun lato, accolte le une alle altre, e decrescenti dalla base all'estremità, che rappresenta l'apice della piramide.

(4) Dalle greche voci *ixvos* gracile, e *πους* piede.

1 (15) *ICHNOPUS TAURUS*, A. Cost.

Tav. I, fig. 3.

I. dorso rotundato inermi; antennis superioribus corporis dimidio paulum brevioribus, seta pedunculo quadruplo longiore; inferioribus longioribus, pedunculo illo superiorum duplo longiore; pedibus sex ultimis articulo primo margine postico serrulato, reliquis gracilibus filiformibus. — Long. lin. 41/2-5.

Corpo oblungo, mediocrementemente compresso, a dorso ritondato liscio. Antenne superiori lunghe poco men che la metà del corpo; il peduncolo brevissimo, di due soli articoli ben apparenti; il filetto primario quadruplo in lunghezza del peduncolo, con trenta a trentadue articoli; l'accessorio lungo quanto il peduncolo. Antenne inferiori di un quarto più lunghe delle superiori; il peduncolo lungo il doppio che in quelle, coi due ultimi articoli quasi eguali fra loro; il filetto con trentotto a quaranta articoli. Piedi del primo paio lunghi, filiformi, cilindracei; il penultimo articolo un poco più lungo dell'ultimo; questo terminato da unghietta leggermente inarcata, ed ornata inferiormente di uncinetti e setole stivati a guisa di spazzola. Piedi del secondo paio più lunghi dei primi, quasi membranacci, filiformi, compressi, con l'ultimo articolo un po' dilatato all'estremità, e terminato da un fascio di lunghi peli e delicate setole, in mezzo alle quali osservasi una unghietta rudimentale. Piedi delle ultime tre paia assai gracili, crescenti notabilmente in lunghezza da' quinti ai settimi, col primo articolo assai dilatato e finalmente seghettato sul margine posteriore. Falsi piedi degli ultimi tre anelli addominali terminati quasi ad egual livello, i sesti solo un poco più corti. Appendici terminali oblunghe, troncate all'estremità, impiantate sul dorso del sesto anello, al di là del quale poco si avanzano. Colore nel secco giallo-verdiccio pallido.

Rarissimo nel golfo di Napoli, presso Posilipo.

SOTTOF. IV.^a GAMMARINI

Genere EGIDIA, A. Cost.

Caratteri generici. — *Antennae superiores bisetae; inferiores articulo primo inermi. Pedes quatuor anteriores minuti, prehensiles, subaequales; tertii paris articulo ultimo spatuliformi; quarti compressi, valde elati, articulo ultimo tantum tereti; reliqui simplices.*

Illustrazione. Corpo piuttosto tozzo, pressochè come quello de' Calisomi. Antenne superiori con due filetti molto articolati. Piedi delle due prime paia delicati, quasi eguali fra loro; l'unghietta ne' primi inflettentesi contro il margine antero-inferiore come all'ordinario; ne' secondi contro l'angolo antero-inferiore prolungato, come in talune Lisianasse. Piedi del terzo paio robusti, angusti, con l'antepenultimo articolo maggiore de' due seguenti presi insieme; il penultimo assai piccolo, l'ultimo allungato e spatoliforme. Piedi del quarto paio con articoli larghi e laminari, l'ultimo solo quasi cilindraceo. I rimanenti piedi genericamente poco diversi dalle forme ordinarie.

Tra i diversi generi della tribù de' Gammarini, nella quale l'*Egidia* prender deve posto, a causa delle due prime paia di piedi atte alla presa, è quello che più si avvicina ai generi della tribù precedente per la brevità delle antenne superiori, e per la forma della mano de' piedi del secondo paio simile a quella di alcune Lisianasse.

1 (16) EGIDIA PULCHELLA, A. Cost.

Tav. IV, fig. 3. a-g.

E. antennis superioribus inferiorum pedunculum paullo excedentibus, pedunculi articulis tribus subaequalibus, seta pedunculi dimi-

dio brevior; inferioribus thoracis articulum septimum attingentibus, seta pedunculo triplo longior; pedibus tertii paris articulo ultimo spinis coronato; quarti articulo antepenultimo late campaniformi, penultimo margine graduato; pedibus spuris ultimis praecedentes multo excedentibus. — Long. lin. 2 12.

Corpo mediocrementemente compresso, a dorso ritondato e liscio. Capo anteriormente ritondato. Occhi grandi, ritondato-triangolari, poco distanti fra loro sul dorso. Antenne superiori brevi, superanti di poco il peduncolo delle inferiori; peduncolo poco men che i tre quarti della lunghezza totale, di tre articoli cilindracei quasi eguali; filetto primario poco più lungo di uno degli articoli del peduncolo; l'accessorio un terzo circa del primario. Antenne inferiori lunghe quanto il capo e torace insieme; il peduncolo robusto, un quarto della lunghezza totale, coi due primi articoli brevissimi, gli altri due lunghi ed eguali. Primo paio di piedi col carpo inferiormente dilatato ed angoloso; la mano piccola, quasi ovale, lungamente pelacciuta; l'unghietta mediocrementemente archeggiata. Piedi del secondo paio eguali ai primi, col carpo ovato-allungato e lungamente pelacciuto nel margine inferiore; la mano più piccola, oblunga pelacciuta, con l'angolo antero-inferiore prolungato in ottuso dente, contro del quale s'inflette l'unghietta adunca e più lunga di esso. Piedi del terzo paio quasi cilindracei, con l'antepenultimo articolo un poco più lungo de'due ultimi presi insieme, il penultimo assai breve, ed armato di quattro grosse e corte spine sul margine inferiore; l'ultimo compresso, più lungo del precedente, un po' ristretto alla base, dilatato verso l'estremità, questa ritondata ed ornata tutto intorno di spine e peli rigidi, e terminata da uno stiletto diritto ed acuto rappresentate l'unghia. Piedi del quarto paio maggiori di tutti; il penultimo articolo più largo che alto, superiormente ritondato, inferiormente troncato, quasi campaniforme; il penultimo più alto che largo, fatto a gradini inversi sopra i due margini, con de'fascetti di peli entro ciascun angolo troncato rientrante; l'ultimo articolo angusto cilindraceo, diritto, senza alcun vestigio di unghietta. Piedi delle ultime tre paia col primo articolo dilatato, i seguenti filiformi, pelacciuti e spinosi ne' margini; l'ultimo in quelli del quinto paio simile all'omologo de'quarti, negli altri allungato e con unghietta diritta ed acuta. Falsi piedi del sesto

anello addominale superanti di molto i precedenti. Colore nel vivo verdiccio pallido.

Trovata nel golfo di Napoli ne' primi giorni di aprile: sembra rarissima.

Genere MELITA, Leach.

Nel ritenere il genere *Melita* del Carcinologo Britanno, vediamo il bisogno di meglio chiarirne i caratteri, soprattutto relativi ai piedi delle due prime paia, siccome nella prefazione abbiamo esposto ampiamente. Crediamo quindi potersi così formulare i caratteri di tal genere.

Antennae superiores unisetae. Pedes quatuor anteriores prehensiles; primi minuti manu antice profunde biloba, ungue in fundo sinus inserto, contralobum inferum flectendo: secundi in sexibus diffformes, manu in mare lata, apice truncata, subrectangula, ungue in angulo antero-superiori inserto, contra palmam flectendo, in femina minori subovali.

1 (17) MELITA PALMATA.

Tav. II, fig. 4.

M. elongata, abdominis articulis quarto et quinto dorso spinosis; antennis superioribus longis, seta pedunculo paulum longiore; inferioribus multo brevioribus, seta pedunculi articulo ultimo paulum longiore; abdominis pedibus spuriis sextis praecedentes multo superantibus.—Long. lin. 4.

Gammarus palmatus, Mont.—*Melita palmata*, Leach. Desm.

Corpo allungato, svelto, mediocrementemente compresso, a dorso ritondato; il quarto anello addominale nel mezzo del dorso prolungato in acuta spina diretta in dietro, il quinto fornito di due piccole spine che si elevano quasi verticalmente, una da ciascun lato presso il margine posteriore. Antenne superiori lunghe quanto il capo, torace e tre primi anelli addominali;

il filetto poco più lungo del peduncolo. Antenne inferiori lunghe i due terzi delle superiori; il peduncolo poco men lungo che in quelle; il filetto poco più lungo dell'ultimo articolo del peduncolo. Mano de' piedi del primo paio ristretta alla base, dilatata all'estremità, ritondata negli angoli, ornata di peli setolosi riuniti a fascetti sopra i margini: l'ungghietta assai adunca. Mano de' piedi del secondo paio nella femmina ovolare, con unghietta poco arcuata, inflettentesi contro il margine antero-inferiore; nel maschio quasi rettangolare, poco più stretta alla base, troncata per diritto all'estremità, con unghia inserita nell'angolo antero-superiore, molto arcuata, fornita di ottuso dente presso la base del margine inferiore, e disposta in modo che nella flessione si adatta sulla faccia interna della mano, di cui raggiunge il centro con la sua estremità. Falsi piedi del quarto e quinto anello addominale allungati e gracili, i quinti più corti de'quarti: quelli del sesto anello oltrepassanti moltissimo i precedenti, col peduncolo corto e grosso, portante uno stiletto primario lungo, spatoliforme, setoloso ne'margini, ed un altro rudimentale. Colore verdiccio pallido, variegato di grigio.

Frequente nel lago Fusaro, fra l'Acamarchide.

Genere NOTOTROPIS (1), A. Cost.

Caratteri generici. — *Antennae superiores unisetae. Pedes quatuor anteriores prehensiles, filiformes, subaequales. Corpus valde compressum, dorso acute carinatum, saepius segmentis aliquot in spinam productis; epimeris mediae magnitudinis.*

Le specie che noi comprendiamo in questo gruppo generico corrispondono ad una delle sezioni del genere *Amphithoe* di Edwards, che noi crediamo dovere isolare a causa dell'abito speciale che offre il loro corpo assai compresso, acutamente carenato sul dorso in tutta la lunghezza, e d'ordinario con un certo numero di anelli sì toracici, che addominali prolungati posteriormente in acuta spina.

(1) Dalle greche voci νωτος dorso, e τροπικ carena.

1 (18) NOTOTROPIS GUTTATUS.

Tav. I, fig. 7.

N. capite brevissime rostrato, segmentis septimo thoracis omnibusque abdominis dorso postice in spinam productis, lateribus inermibus; antennis subaequalibus, pedunculo inferiorum illo superiorum valde longiore; pedibus spuriis abdominalibus subaeque terminatis; flavo rufescens, utrinque triseriatim lacteo-guttatus. — Long. lin. 5.

Acanthonotus guttatus, A. Cost. in Hop. Cat. p. 46.

Capo prolungato anteriormente in brevissimo rostro compresso, nascosto tra la base delle antenne. Settimo articolo del torace, e tutti gli addominali prolungati posteriormente in acuta spina sul dorso, e nei fianchi lisci, non spinosi, a margine posteriore assai flessuoso, con l'angolo inferiore-posteriore prolungato a guisa di dente ne' tre primi anelli addominali. Carena del sesto anello addominale sul dorso diritta e liscia. Antenne superiori lunghe poco meno del capo e torace insieme; il peduncolo poco più di un terzo della lunghezza totale. Antenne inferiori lunghe quasi quanto le prime; il peduncolo un poco più della metà della lunghezza totale, col quarto articolo assai più lungo del terzo. Falsi piedi addominali terminati quasi ad egual livello. Appendici terminali dell'addome stiliformi, oltrepassanti di poco l'estremità del peduncolo degli ultimi falsi piedi. Colore, nel vivo, bianco-rosco o gialliccio, con tre serie longitudinali di macchie bianco-lattee da ciascun lato, e con varie liucette interrotte di color tabacchino.

Trovato nel golfo di Napoli, tra fuchi, alquanto raro.

2 (19) NOTOTROPIS SPINULICAUDA, A. Cost.

Tav. I, fig. 8.

N. capite brevissime rostrato, segmentis septimo thoracis, abdominisque primis quinque postice dorso in spinam productis; abdominis segmento sexto carinula spinulis coronata; antennis subaequali-

bus, inferiorum pedunculo illo superiorum valde longiore; pedibus spuris abdominalibus sextis quartos, quartis quintos multo excedentibus. — Long. lin. 5.

Affinissima alla precedente. Ultimo articolo dell'addome con cresta inarcata, ed ornata sul taglio di spinuzze eguali ed equidistanti. Falsi piedi del quarto anello addominale superanti notabilmente i quinti; i sesti superanti di altrettanto i quarti. Appendici terminali dell'addome non eccedenti il peduncolo degli ultimi falsi piedi. Colore in individui conservati a secco, verde uniforme.

Trovata dal prof. O. G. Costa nel golfo di Taranto.

Genere AMPHITHONOTUS, A. Cost.

Caratteri generici. — *Corpus modice compressum, dorso capitis thoracisque rotundato, abdominis carinato, segmentis pluribus abdominis, aut etiam ultimis thoracis postice spinosis. Antennae superiores unisetae. Pedes quatuor anteriores prehensiles, filiformes, subaequales.*

Illustrazione. Comprendiamo in quest'altro gruppo generico quelle specie di Amfitoe il cui corpo è mediocrementemente compresso, a dorso ritondato nel capo e torace, carenato nell'addome, i cui articoli sono prolungati posteriormente in spina, come lo è pure sovente l'ultimo anello toracico.

1. (20) AMPHITHONOTUS MARIONIS.

Amphithoe marionis, Edw. — *Amphithonotus acanthophthalmus*, A. Cost. in Hope, Cat. pag. 45.

Bella ed interessante specie, rara nel golfo di Napoli; nella primavera.

2 (21) AMPHITHONOTUS SPINIVENTRIS, A. Cost.

Tav. II, fig. 1.

A. capite minutissime rostrato, thorace dorso rotundato inermi, abdominis segmentis omnibus dorso carinatis et postice in spinam productis, tribus anticis lateribus carinula in spinam terminata instructis, angulisque postero-inferioribus acute productis; antennis subaequalibus, superiorum pedunculi articulo primo apice spina exili armato. — Long. lin. 3 1½.

Corpo mediocrementemente compresso. Capo a dorso ritondato, anteriormente prolungato in brevissimo rostro, e ne'lati innanzi gli occhi prolungato ad angolo acuto a guisa di dente. Occhi reniformi. Torace a dorso ritondato e tutto liscio. Tre primi anelli addominali nel dorso elevati in carena prolungata posteriormente in acuta spina, e ne'lati con un risalto longitudinale terminato del pari posteriormente in altra spina minore, e con gli angoli posteriori-inferiori prolungati in punta acuta. Quarto anello addominale carenato come i precedenti nel dorso, liscio ne'lati, ed a margine posteriore poco flessuoso; il quinto appena osservabile; il sesto con carena sul dorso terminata in dietro in acuta spina, e con un risalto longitudinale da ciascun lato, dal quale si eleva altra delicata spina filiforme. Antenne superiori lunghe poco meno dell' intero corpo, gracili; il peduncolo forma i due quinti della lunghezza totale, col primo articolo ornato di peli setolosi al di sotto, e terminato in avanti da breve ed acuta spina; il secondo più che doppio del precedente in lunghezza; il terzo assai breve. Antenne inferiori gracili, poco più corte delle superiori; il peduncolo lungo quasi quanto in quelle, coi due primi articoli assai brevi, il terzo triplo di questi insieme presi, il quarto eguale ai tre precedenti riuniti. Mano de'piedi delle due prime paia allungata, angusta, diritta, con unghia poco adunca, lunga la metà della mano. Primo articolo delle ultime tre paia di piedi dilatato, e successivamente più largo da' quinti ai settimi. Falsi piedi addominali del quarto e sesto anello terminati quasi ad egual livello, ed a stilette eguali; quelli del quinto un poco più corti, ed a stilette disuguali. Appendici terminali dell' addome lunghe per modo, da raggiungere l' estremità degli ultimi falsi

piedi. Superficie dell'addome finamente rugosa, almeno negl' individui secchi. Colore gialliccio sporco.

Trovato nel golfo di Napoli, rarissimo.

Genere EPIMERIA, A. Cost.

Caratteri generici. — *Antennae superiores unisetac. Pedes quatuor anteriores prehensiles, filiformes, subaequales. Corpus dorso in postica thoracis parte ac in abdomine carinatum et spinosum. Epimera quarti et quinti articuli thoracis maxima, simul clypeum semilunare formantia. Abdomen lamina horizontali terminatum.*

Illustrazione. Singolare rendesi il Crostaceo servito di tipo a questo genere per la straordinaria grandezza degli epimeri del quarto e quinto anello toracico, i quali insieme formano un grande scudo da ciascun lato del corpo a forma di gualdrappa, smarginato al disotto a luna crescente. L'addome si termina da larga lamina orizzontale. Pei rimanenti caratteri simiglia molto agli Amfitonoti.

I (22) EPIMERIA TRICRISTATA.

Tav. II, fig. 2.

E. capite rostrato, thoracis segmento septimo, addominisque tribus anticis dorso carinatis et postice in spinam productis, lateribusque carinula spina postea terminata praeditis; segmentis tribus posticis abdominis dorso carinatis, lateribus inermibus; antennis crassiusculis subaequalibus, corporis dimidii fere longitudine. — Long. lin. 7.

Epimeria triceristata, A. Cost. in Hope, Cat. pag. 46.

Corpo robusto, a dorso ritondato dal capo fino al sesto anello toracico inclusivo, carenato nel resto. Capo prolungato in rostro robusto, un po' compresso, lungo quasi quanto il capo stesso ed inclinato in giù; nei lati terminato inferiormente in punta. Occhi quasi circolari. Primi cinque anelli toracici lisci, a margine posteriore diritto; il sesto col mezzo del margine posteriore prolungato in piccolo dente; il settimo ottusa-

mente carenato sul dorso e prolungato in dente maggiore, e con altro piccolo dente da ciascun lato nel mezzo del margine posteriore. I primi tre anelli addominali grandi, carenati, prolungati in acuta spina, col margine superiore della carena flessuoso, e con un risalto longitudinale da ciascun lato di questa, che posteriormente si termina egualmente in breve spina; margine posteriore flessuoso, con l'angolo posteriore-inferiore prolungato in acuta punta, più lunga ne' due primi anelli, brevissima nel terzo. Quarto anello addominale elevato in carena, interrotta da incavo nel mezzo: quinto brevissimo e liscio; sesto con un piccolo rilievo a guisa di tubercolo. Antenne superiori lunghe circa la metà dell'intero corpo; il peduncolo poco più del quarto della lunghezza totale, grosso, con gli articoli decrescenti. Antenne inferiori lunghe quanto le superiori; il peduncolo men grosso e più lungo che in quelle, col primo articolo brevissimo e prolungato a guisa di squama triangolare, che abbraccia il secondo anche più breve; il terzo più lungo di tutti; il quarto poco più corto del precedente. Piedi delle due prime paia con la mano allungata, angusta, troncata obliquamente all'estremità, un poco più inarcata sul dorso in quelli del primo paio; l'unghietta breve e poco arcuata. Primo articolo de' piedi del quinto paio poco dilatato, quasi rettangolare, con l'angolo posteriore-inferiore prolungato in acuta punta; di quelli del sesto paio un poco più largo; di quelli del settimo paio posteriormente assai dilatato, e largamente smarginato presso l'estremità. Epimeri de' primi tre anelli molto alti ed angusti; quelli del quarto assai grandi, prolungati obliquamente in avanti ed in basso, inarcati a guisa della superior mascella di uccello rapace, con la metà del margine posteriore prolungato in dietro in spina che abbraccia l'angolo antero-inferiore degli epimeri dell'anello che segue: questi anch'essi assai grandi, quasi romboidali, con l'angolo posteriore-inferiore prolungato obliquamente in dietro a mò di gualdrappa, e formanti co' precedenti uno scudo inferiormente incarcato e semilunare. Epimeri del sesto e settimo anello assai piccoli. Falsi piedi del quinto anello addominale, di poco oltrepassanti quelli del quarto, quelli del sesto di poco oltrepassanti quelli del quinto: gli stilette eguali ne' quarti e sesti, disuguali ne' quinti. Adome terminato da lamina quasi rettangolare, ad angoli ritondati.

Specie assai rara nel golfo di Napoli. Uno degl'individui che possediamo fu raccolto, rigettato dalle onde, sul litorale di Baja.

Genere PROBOLIUM (1), A. Cost.

Caratteri generici.—*Antennae superiores unisetae. Pedes quatuor anteriores prehensiles, primi minores, secundi valde majores, manu maxima. Corpus dorso rotundatum inerme, utrinque loricatum, lorica ex epimeris tertii et quarti articuli connatis praecipue constituta.*

Illustrazione. L'abito particolare che ci presenta il Crostaceo che andiamo a descrivere ci obbliga formare per esso un genere distinto. Gli epimeri de' primi quattro anelli toracici, ma soprattutto quelli del terzo e quarto, assai più grandi e quasi tra loro saldati, formano un grande scudo ritondato da ciascun lato del corpo, entro il quale restano completamente nascosti i piedi. De' quattro piedi anteriori i primi son piccoli, i secondi pel contrario assai grandi, con mano immensamente sviluppata, armata di lunga unghia falciforme. Pei rimanenti caratteri converrebbe con le Amfitoe.

1 (23) PROBOLIUM POLYPRION, A. Cost.

Tav. II, fig. 5.

P. antennis subaequalibus, capitis thoraeisque simul longitudine, pedunculo in inferioribus valde longiore; pedibus secundi paris manu magna elongata, antice bidentata, margine inferiore subrecto, serrato (mas), subintegro (fem.), ungue valido falciformi, manus longitudine; pedibus reliquis validis, margine minute serrulatis, sex posticis articulo primo valde elato, tertio postice ad falcis instar infra producto; pedibus spuris abdominalibus gracilibus, elongatis, quintis viz brevioribus.—Long. lin. 3.

Corpo poco compresso, a dorso ritondato, guardato di lato quasi ovale, con la estremità addominale quasi bruscamente assottigliata. Capo piccolo, non rostrato. Occhi quasi circolari, posti assai in dietro. Antenne lunghe quanto il capo e torace insieme, quasi eguali: peduncolo

(1) Dalla greca voce προβολιον, *loricula*, piccola corazza.

delle superiori non oltrepassante l'estremità del penultimo articolo di quello delle inferiori. Piedi del primo paio piccoli, filiformi, con mano quasi ovale. Quelli del secondo pel contrario assai grandi, nel maschio più che nella femmina, con mano, quasi diritta, lunga tre volte la propria altezza, col margine anteriore assai breve e bidentato, l'inferiore minutamente seghettato nel maschio, quasi liscio nella femmina: unghia lunga quanto la mano stessa, falciforme. Piedi delle due paia seguenti robusti, filiformi, finamente seghettati ne' margini. Quelli delle ultime tre paia col primo articolo assai dilatato; il terzo nell'angolo posteriore-inferiore prolungato in giù a guisa di corta e larga falce fino al livello della estremità dell'articolo quarto; terzo, quarto e quinto finamente seghettati nel margine anteriore, come ne' piedi del terzo e quarto paio. Epimeri de' primi quattro anelli toracici formanti insieme la corazza: quelli de' due primi anelli più alti che larghi; quelli de' due seguenti saldati insieme in un solo dilatato e ritondato posteriormente; i rimanenti piccoli e decreescenti. Il lembo libero di tutta la corazza guardato con forte ingrandimento minutissimamente festonato. Falsi piedi addominali allungati, gracili, terminati quasi ad egual livello, i quinti solo essendo un poco più corti. Appendici terminali orizzontali, posteriormente ritondate, raggiunti appena la metà del peduncolo degli ultimi falsi piedi.

Nel golfo di Napoli, tra fuchi, non molto frequente.

Genere AMPHITHOE, Leach.

Riteniamo questo genere per quelle sole specie il cui corpo non è nè carenato, nè spinoso sul dorso o ne' lati, e gli epimeri di grandezza ordinaria. Laonde per armonizzare i suoi caratteri generici con quelli de' generi affini, possono così fornirsi.

Antennae superiores unisetae. Pedes quatuor anteriores prehensiles, secundi saepius primis majores. Corpus dorso rotundatum, inerme, epimeris mediae magnitudinis.

Non ostante gli smembramenti da noi fatti, il genere Amphithoe

è tuttavia nella famiglia quello che racchiude il maggior numero di specie che possonsi agevolmente ripartire in più gruppi.

1. Dorso perfettamente ritondato in tutta la lunghezza.

A) antenne superiori più corte delle inferiori.

a) antenne inferiori non più lunghe della metà del corpo.

1 (24) AMPHITHOE PREVOSTII.

Amphitoe Prevostii, Edw.

Nel golfo di Napoli, piuttosto rara.

2 (25) AMPHITHOE BABIRUSSA, A. Cost.

Tav. II, fig. 5.

A. antennis superioribus parum inferioribus brevioribus, seta pedunculo paulum longiore; pedibus secundi paris primis majoribus, manu magna, inflata, dorso valde arcuata, margine unguiculari obliquo minutissime denticulato et ciliato (mas), minore, compressa, infra elato-angulata (fem.); pedibus reliquis crassiusculis, margine spinulosis.—Long. lin. 3-31½.

Corpo poco compresso. Capo anteriormente ritondato. Antenne superiori appena un poco più corte delle inferiori; il peduncolo poco meno della metà della lunghezza totale, con articoli cilindracei e decrescenti. Antenne inferiori lunghe circa la quarta parte del corpo; il peduncolo un poco più lungo che nelle superiori, coi due ultimi articoli quasi eguali fra loro. Piedi del primo paio piccoli, col carpo inferiormente dilatato dalla base all'estremità. Piedi del secondo paio più grandi dei primi, e diversi ne' due sessi: nel maschio maggiori, col carpo assai breve, e la mano molto rigonfiata, notabilmente inarcata sul dorso, ristretta gradatamente verso la estremità, col margine unguicolare obliquo diritto, finamente dentellato e cigliato, unghia robusta e molto arcuata, precisamente presso la base; nella femmina minori, col carpo simile per

forma a quello de' piedi del primo paio, la mano compressa, col margine anteriore unguicolare assai obbliquo e formante un angolo di circa cinquanta gradi con l'inferiore; unghia meno arcuata. I rimanenti piedi robusti, ed ornati di delicate spine. Epimeri assai bassi. Falsi piedi degli ultimi tre anelli addominali terminati quasi ad egual livello. Appendici terminali piccole e coniche.

Trovasi nel golfo di Napoli, poco frequente.

3 (26) AMPHITHOE GAZELLA, A. Cost.

Tav. II, fig. 6, *a-e*.

A. antennis superioribus inferiorum pedunculum paullo excedentibus; pedibus secundi paris illis primi majoribus, manu valde inflata, margine unguiculari valde obliquo, serrulato et spinuloso (mas), fere similibus (fem.). — Long. lin. 3 1/2.

Specie affinissima alla precedente. Diversa per le antenne superiori lunghe poco più della metà delle inferiori, delle quali oltrepassano appena il peduncolo: il peduncolo loro è poco più del terzo della lunghezza totale: il filetto composto di una decina di articoli tutti pelacciuti alla estremità. Antenne inferiori proporzionalmente un poco più lunghe che nella specie precedente, col peduncolo poco più de' due quinti della lunghezza totale. Piedi del secondo paio nel maschio più grandi, con la mano quasi simile a quella della specie precedente, col margine unguicolare ornato di corte ed ottuse spine mobili; nella femmina men grandi, con la mano simile a quella de' piedi del primo paio.

Vive nel golfo di Napoli, rara.

aa) antenne inferiori molto più lunghe della metà del corpo.

4 (27) AMPHITHOE AQUILINA, A. Cost.

Tav. II, fig. 7.

A. corpore compresso laevi; antennis gracilibus, inferioribus corporis dimidio longioribus; superioribus harum dimidio aequati-

bus vel paullo longioribus; pedibus primi paris minutis, manu brevi, lata, margine unguiculari minime obliquo spinuloso, ungue lato compresso, apice adunco; secundi paris manu valida inflata, margine unguiculari valde obliquo spinuloso; pedibus spuriis abdominalibus quartis quintos, quintis sextos paullo superantibus, sextis stylo unico conico. — Long. lin. 4.

Media è questa Amfitoe fra la *gazella* e la *tenella* che segue. Le antenne inferiori son lunghe circa i due terzi del corpo, o poco meno; il peduncolo ne occupa appena una terza parte, col quarto articolo un poco più lungo del terzo: nel filetto si contano trenta a trentadue articoli. Antenne superiori lunghe la metà delle inferiori, o poco più; il loro peduncolo è un terzo della lunghezza totale, con gli articoli regolarmente deerescenti: nel filetto si contano quindici a sedici articoli. Piedi del primo pajo piccoli; la mano poco men lunga che alta, col margine unguicolare un poco flessuoso, spinoso, formante angolo poco ottuso con l'inferiore: unghia lunga quanto il margine anteriore della mano, compressa, laminare, dilatata dalla base verso l'estremità, la quale restringesi in punta incurvata; per modo che essa rappresenta in profilo la mascella superiore di un uccello rapace. Piedi del secondo pajo robusti; la mano grossa e simile a quella della *A. babirussa*. Piedi delle altre paja semplici. Falsi piedi degli ultimi tre anelli addominali brevi e spinosi; i quarti superanti un poco i quinti, e questi i sestis, i quali ànno un solo stiletto. Estremità addominale terminata da due piccolissime appendici coniche.

La femmina differisce dal maschio pe' quattro piedi anteriori proporzionalmente un poco più piccoli, e la mano de' primi un poco meno alta.

Trovasi abbondante nell'adriatico che bagna la estrema parte della Terra d'Otranto: rimessaci dal sig. Gius. Costa.

Osservazioni. Fra i caratteri che meglio distinguono questa piccola Amfitoe merita certamente il primo posto la forma dell'unghia delle mani del primo pajo, che sembra finora le fosse esclusiva.

5 (28) AMPHITHOE TENELLA, A. Cost.

Tav. II, fig. 8.

A. corpore compresso laevi; oculis parvis rotundatis; antennis gracilibus pilosis, superioribus tertium corporis longitudine aequantibus, inferioribus superiores tertio superantibus; pedibus secundi paris manu compressa, fere aequae longa ac alta, subrotundata, margine unguiculari parum obliquo, spinoso et ciliato (mas); primis fere similibus (fem.). — Long. lin. 2 1/2.

Corpo molto compresso. Occhi piccoli e ritondati. Antenne superiori lunghe circa la terza parte del corpo; il peduncolo più di un quarto della lunghezza totale, con gli articoli decrescenti; il filetto con quindici articoli inversamente conico-troncati. Antenne inferiori di un terzo almeno più lunghe delle superiori; il peduncolo lungo il doppio che in quelle; il filetto con trenta articoli, crescenti successivamente in lunghezza. Piedi del primo paio assai piccoli, col carpo lungo poco men della mano; questa ovato-oblunga. Piedi del secondo paio nel maschio più grandi, con la mano grossa, compressa, inarcata sul dorso, dilatata e ritondata inferiormente, poco men alta che lunga, col margine unguicolare poco obliquo, arcuato, finamente cigliato, e fornito di spine robuste e mobili: nella femmina men grandi e poco diversi dagli anteriori. Piedi delle ultime tre paia col primo articolo dilatato e quasi ritondato, i rimanenti robusti ed ornati di spine. Epimeri de' primi quattro anelli di medioere altezza, gli altri assai piccoli. Falsi piedi degli ultimi tre anelli addominali corti, e terminati quasi ad egual livello. Appendici terminali piccolissime, orizzontali. Colore paglino uniforme, con gli occhi neri.

Vive nel golfo di Napoli, non molto rara.

AA) Antenne superiori più lunghe delle inferiori.

e) piedi del secondo paio notabilmente più grandi de' primi.

6 (29) AMPHITHOE INAEQUIPES.

Tav. II, fig. 10.

A. antennis superioribus corpore brevioribus, seta pedunculo haud longiore, inferioribus valde brevioribus, pedunculo illo superiorum brevioris, seta pedunculi articulo tertio subaequali; pedibus primi paris minutis, illis secundi manus magna, late subovata, marginis unguiculari arcuato truncato minute denticulato, angulo inferiore spinuloso. — Long. lin. 2 $\frac{1}{2}$.

Amphithoe inaequipes, A. Cost. in Hope, lat. p. 45.

Corpo gracile. Antenne superiori men lunghe del corpo; il peduncolo un poco più della metà della lunghezza totale col primo articolo un poco più lungo del capo, fornito all'estremità inferiormente di delicata spina diretta in avanti, il secondo gracile e poco più lungo del primo, il terzo assai breve. Antenne inferiori poco più lunghe del peduncolo delle superiori: il loro peduncolo, più corto che in quelle, à il primo articolo assai breve e terminato inferiormente da spina diretta in avanti: i due ultimi lunghi, il terzo poco più del quarto; il filetto non più lungo del terzo articolo del peduncolo. Piedi del primo paio assai piccoli e gracili; la mano compressa, inferiormente dilatato-ritondata, col margine unguicolare obliquo, un poco arcuato, terminato inferiormente da acuto dente. Piedi del secondo paio maggiori de' primi; la mano assai grande, compressa, quasi ovolare, anteriormente troncato-ritondata, a margine finissimamente denticolato e cigliato; angolo inferiore con corta spina. Unghia in tutti quattro i piedi arcuata, lunga quanto il margine unguicolare, nella flessione toccante la spina angolare con la sua estremità. Falsi piedi addominali del sesto anello oltrepassanti un poco i precedenti. Appendici terminali piccolissime. Colore verdiccio pallido.

Nel golfo di Napoli, tra fuchi, rara.

7 (30) AMPHITHOE PAUSYLIPI.

Amphitoe Pausilipae, Edw. Ann. Sc. nat. — *Amphithoe Pausilippii*, ejusd. Suit. à Buff.

Trovasi nel golfo di Napoli, poco frequente.

8 (31) AMPHITHOE CRASSICORNIS, A. Cost.

Tav. III, fig. 1, a-d.

A. elongata, antennis crassis, subaequalibus, corporis dimidio paululum longioribus, pedunculo in inferioribus multo longiore; pedibus primi paris medioeribus, manu ovato-elliptica; illis secundi majoribus, manu oblonga, margine unguiculari obliquo bisinuoso; pedibus spiriis abdominalibus aequae terminatis. — Long. lin. 6.

Corpo allungato, svelto. Occhi ovato-ritondati. Antenne quasi eguali, robuste, lunghe poco più della metà del corpo: il peduncolo nelle superiori circa i due quinti della lunghezza totale; nelle inferiori molto più lungo, col primo articolo brevissimo, il secondo doppio del primo, i due seguenti assai lunghi, il quarto poco più del terzo; il filetto di queste grosso, e poco più lungo dell'ultimo articolo del peduncolo. Piedi del primo paio di mediocre grandezza, con la mano ovato-ellittica. Piedi del secondo paio un poco più grandi, con la mano oblunga, col margine unguicolare obliquo, molto sinuoso, e formante continuazione con l'inferiore; l'unghia mediocrementemente arcuata, nella flessione adattata con la parte estrema contro la faccia interna della mano. Primo articolo degli ultimi sei piedi allungato e poco dilatato. Epimeri de' primi cinque anelli di mediocre grandezza e tutti simili, i due ultimi assai più piccoli. Falsi piedi degli ultimi tre anelli addominali terminati quasi ad egual livello. Estremità dell'addome terminata da una piccola lamina orizzontale, breve, trasversale, ad angoli ritondati. Colore generale del corpo giallo di succino.

Trovata nel golfo di Napoli, rara.

9 (32) AMPHITHOE PENICILLATA, A. Cost.

Tav. II, fig. 9.

A. antennis superioribus corporis longitudine; inferioribus sensim brevioribus; pedibus quatuor anticis validis, illis secundi paris paulum majoribus, manu oblonga, apice ultra unguis basim rotundato producta, et longe penicillata, margine unguiculari obliquo conca-vo (mas), illi primi paris simili (fem.); epimeris quinti articuli praecedentibus majoribus. — Long. lin. 4.

Corpo svelto, non molto gracile. Occhi quasi circolari. Antenne superiori lunghe quasi quanto l'intero corpo; il peduncolo poco meno del terzo della lunghezza totale, col primo articolo grosso, un poco più lungo del capo, il secondo gracile ed un poco più lungo del primo, il terzo assai breve. Antenne inferiori molto più corte delle superiori; il peduncolo più lungo che in quelle, col quarto articolo un poco più corto del terzo; il filletto poco più lungo di questo terzo articolo del peduncolo. Piedi delle due prime paja nel maschio mediocrement grandi e robusti, i secondi poco più de' primi; la mano in questi ovato-oblunga, ne' secondi più grande, col dorso prolungato un poco al di là della inserzione dell'unghia; il margine unguicolare assai obliquo ed a curva rientrante; il margine dorsale ornato di lunghi peli, che all'estremità formano un folto pennello. Nella femmina: detti piedi sono un poco più piccoli, e la mano de' secondi simile a quella de' primi, e meno lungamente pelacciuta. Primo articolo degli ultimi sei piedi mediocrement dilatato. Epimeri de' cinque primi anelli toracici egualmente alti, e crescenti in larghezza dai primi ai quinti, che son maggiori di tutti e quasi quadrati. Falsi piedi degli ultimi tre anelli addominali terminati quasi allo stesso livello. Estremità dell'addome terminata da piccola lamina orizzontale. Colore, negl' individui secchi, verde chiaro ne' maschi, verde assai oscuro nelle femmine.

Trovata dal Prof. O. G. Costa nel golfo di Taranto, ove non sembra molto rara.

Ne abbiamo una varietà assai più piccola del tipo, di color gialliccio

*

pallido, puntinato di nero, che sembra a primo aspetto una specie diversa, ma che organicamente in nulla differisce dalla descritta.

Trovata nel golfo di Napoli.

b) piedi delle due prime پا piccoli filiformi, quasi simili ed eguali fra loro.

10 (33) AMPHITHOE GRACILIS.

Tav. III, fig. 4.

A. antennis rude pilosis, superioribus corpore brevioribus, inferioribus quarto illis brevioribus, pedunculo illo superiorum parum brevioribus; seta pedunculi articulo quarto sesqui longiore; pedibus quatuor anterioribus filiformibus, pilosis, manu compressa, margine unguiculari cum infero angulum rotundatum formante. — Long. lin. 3.

Amphithoe gracilis, A. Cost. in Hope, Cat. p. 45.

Corpo svelto, gracile con gli ultimi tre anelli addominali ben sviluppati e decrescenti. Occhi quasi circolari. Antenne superiori lunghe i tre quarti dell'intero corpo; il peduncolo poco più del terzo della lunghezza totale, col primo articolo fornito inferiormente all'estremità di corta e delicata spina, il secondo lungo quanto il primo, il terzo assai breve. Antenne inferiori di un quarto più corte delle superiori; il peduncolo più lungo che in quelle, con gli ultimi due articoli eguali; il filetto di un terzo più lungo di uno degli articoli precedenti del peduncolo, con sedici articoli. Le une e le altre ornate di rari ma ispidi peli setolosi. Piedi delle due prime پا poco robusti, quasi eguali e simili fra loro, compressi; la mano oblunga, un poco dilatata al di sotto, col margine unguicolare obbliquo, e formante con l'inferiore un angolo di circa sessantacinque gradi ritondato: unghia un poco più lunga del margine unguicolare. Primo articolo de' sei piedi posteriori assai dilatato posteriormente. Epimeri de' primi cinque anelli di mediocre grandezza, eguali e simili: i due ultimi assai piccoli. Falsi piedi degli ultimi tre anelli addominali allungati e terminati ad egual livello. Colore verdiccio pallido, con gli occhi neri.

Trovasi nel golfo di Napoli, poco frequente.

11 (34) AMPHITHOE ELONGATA, A. Cost.

Tav. III, fig. 5.

A. elongata, gracilis, antennis superioribus corporis longitudine vel parum brevioribus; inferioribus quarto fere his brevioribus, pedunculo illo superiorum subaequali; pedibus quatuor anterioribus parum validis, subaequalibus, manu infra elato-rotundata; pedibus spuriis abdominalibus fere aequae terminatis. — Long. lin. 3.

Corpo svelto, allungato, gracile. Antenne superiori lunghe quanto il corpo intero o poco meno; peduncolo meno di un terzo della lunghezza totale, coi due primi articoli quasi eguali in lunghezza, il terzo brevissimo; filetto con trenta articoli, il primo de' quali maggiore di tutti, i seguenti brevi e quadrati, gli ultimi successivamente più allungati. Antenne inferiori di un quarto più corte; il peduncolo poco meno della metà della lunghezza totale, assai più lungo di quello delle superiori, coi due ultimi articoli lunghi ed eguali; il filetto con venti a ventidue articoli simili a quelli delle superiori. Piedi delle due prime paia piccoli, poco robusti, eguali e simili fra loro, compressi; la mano inferiormente un poco dilatata e ritondata, il margine unguicolare assai obbliquo formando una curva continuata con l'inferiore. Falsi piedi degli ultimi tre anelli addominali terminati quasi ad egual livello. Estremità addominale terminata da piccola lamina orizzontale. Colore giallo-verdiccio pallido.

Trovasi nel golfo di Napoli, poco frequente.

12 (35) AMPHITHOE MICRURA, A. Cost.

Tav. III, fig. 2.

A. parum elongata; antennis superioribus corpore brevioribus, seta pedunculo fere duplo longiore; inferioribus harum dimidio parum longioribus, pedunculo illo superiorum parum brevioribus; pedibus quatuor anterioribus minutis, filiformibus, aequalibus; pedibus spuriis abdominalibus brevissimis, sextis stilo altero minutissimo. — Long. lin. 2.

Corpo poco svelto, piuttosto tozzo, con gli ultimi due anelli addominali piccolissimi, nel dorso fornito di breve e delicata spina presso la base del quinto anello, e di altra sul margine posteriore nel sesto, osservabile con forte ingrandimento. Antenne superiori lunghe quanto i due terzi del corpo; peduncolo poco più del terzo della lunghezza totale, col primo articolo grosso, non più lungo del capo, con finissima spinuzza al disotto presso la estremità, il secondo più delicato ed appena più lungo del primo, il terzo poco men che metà del secondo; filetto con una ventina di articoli. Antenne inferiori lunghe poco più della metà delle superiori; peduncolo poco più corto che in queste, col primo articolo brevissimo terminato da breve ed acuta spina inferiormente; i due ultimi quasi eguali in lunghezza; filetto poco più corto di questi due presi insieme, con undici a dodici articoli. Piedi delle due prime paja assai piccoli, quasi eguali, filiformi; la mano stretta ed allungata, col margine unguicolare obbliquo; unghia breve quanto questo. Primo articolo degli ultimi sei piedi dilatato. Falsi piedi degli ultimi tre anelli addominali brevissimi, terminati quasi ad egual livello; quelli del sesto anello con due stiletti, il primario poco più lungo del peduncolo, di due articoli il secondo de' quali rudimentale, il secondario piccolissimo. Estremità addominale terminata da due minutissime appendici, che non raggiungono l'estremità del peduncolo degli ultimi falsi piedi, spinose all'estremità.

Rara nel golfo di Napoli.

Osservazione. Sembra questa specie assai affine alla *Pherusa fucicola*: se però la figura datane dagli autori è esatta, la nostra ne differisce per li piedi delle due prime paja egualmente piccoli.

II. Dorso della posterior parte del corpo ottusamente carenato.

13 (36) AMPHITHOE SEMICARINATA, A. Cost.

Tav. III, fig. 3.

A. abdominis articulis tribus antieis obsolete, quarto distincte obtuse carinatis, quinto et sexto dorso spinulosis; antennis superioribus corpore paulo brevioribus; inferioribus harum dimidio paulum lon-

gioribus, pedunculo illo superiorum parum brevior; pedibus quatuor anterioribus minutis, filiformibus, aequalibus; septimis articulo primo postice elato-angulato, margine finissime serrulato; sordide flava, albedo-guttulata. — Long. lin. 3.

Corpo compresso. Capo e torace ritondati sul dorso; i tre primi anelli addominali, e più distintamente il quarto ottusamente carenati, non prolungati però posteriormente nè in spina, nè in dente; il quarto incavato trasversalmente a mò di sella presso la metà: quinto e sesto ben distinti, ritondati sul dorso e forniti di corte e delicatissime spine filiformi elevate presso al margine posteriore. Occhi ovato-ritondati. Antenne superiori poco più corte del corpo; il peduncolo formante due quinti della lunghezza totale, col secondo articolo più gracile ed un poco più lungo del primo; il terzo poco più della metà del secondo. Antenne inferiori lunghe poco più della metà delle superiori, assai gracili; il peduncolo un poco più breve che in quelle, col primo articolo brevissimo terminato anteriormente da breve ed acuta spina, che raggiunge l'origine del terzo articolo; questo ed il quarto quasi eguali; filetto lungo quanto questi due articoli presi insieme. Piedi delle due prime paia piccoli, gracili, filiformi, eguali; la mano ne' primi oblunga, anteriormente ritondata, con unghia più corta del margine unguicolare; ne' secondi più allungata, col margine unguicolare più obliquo, e formante angolo ottuso con l'inferiore, con l'unghia lunga quanto il margine stesso. Primo articolo de' piedi del quinto e sesto paio alto e posteriormente dilatato, a margine quasi liscio; di quelli del settimo assai più dilatato, ad angolo quasi retto e ritondato, ed a margine finissimamente seghettato. Epimeri de' primi quattro anelli proporzionalmente assai alti, i due seguenti molto più bassi, l'ultimo piccolissimo. Falsi piedi degli ultimi tre anelli addominali assai corti, terminati quasi ad egual livello; i quinti appena un poco più corti de' sesti; tutti spinosi ne' margini ed all'estremità. Appendici terminali dell'addome assai piccole. Colore gialliccio sporco; i quattro primi anelli addominali ornati da ciascun lato di macchioline ritondate bianche.

Osservazioni. La simiglianza che il Crostaceo presenta in quanto a generale conformazione del corpo, col *Gam. punctimanus* ci lascia nell'animo il dubbio non sia desso la femmina di quest'ultimo. Il qual

dubbio al certo recar non deve maraviglia quando si considera la differenza ne' due generi stare unicamente riposta nella assenza o presenza del filetto accessorio delle antenne superiori, il quale è pur talvolta esilissimo ne' *Gammarus*, come nella specie citata; e che in parecchi i piedi del secondo pajo offrono notabilissima differenza ne' due sessi. Potrebbe quindi darsi che negl'individui da noi esaminati quel filetto accessorio non fosse stato osservabile.

Pescata dal Prof. Costa nel golfo di Taranto, ove non sembra molto frequente.

Genere ELASMOPUS (1), A. Cost.

Caratteri generici — *Antennae superiores bisetae; inferiores articulo primo inermi. Pedes quatuor anteriores prehensiles, secundi primis majores; sex postici clati, laminares, articulo ultimo tantum tereti.*

Illustrazioni. Affinissimo ai *Gammarus* p. d. è il presente genere. Ne differisce nondimeno per li piedi delle ultime tre paja, i quali in luogo d' avere il primo articolo solo dilatato, e gli altri filiformi, hanno anche gli articoli seguenti dilatati e laminari, l'ultimo solo essendo angusto ed allungato.

1 (37) ELASMOPUS RAPAX, A. Cost.

Tav. IV, fig. 5.

E dorso rotundato inermi; antennis superioribus longioribus, seta primaria pedunculo haud longiore; inferiorum pedunculo illo superiorum multo brevior; pedibus secundis manu magna valida, margine unguiculari valde obliquo, late emarginato, ad unguis basim denticulato; sex posterioribus articulis tribus ultimis margine serratis; pedibus spuriis abdominalibus sextis praecedentes paullo excedentibus stilis laminaribus; abdomine appendiceibus duabus compressis terminato. — Long. lin. 5.

(1) Dalle greche voci ελασμος lamina, e πους piede.

Corpo mediocrementemente compresso, a dorso ritondato, liscio. Capo anteriormente ritondato. Occhi ovato-ritondati. Antenne superiori lunghe circa i tre quarti del corpo; il peduncolo una metà della lunghezza totale, coi due primi articoli lunghi e quasi eguali, il terzo un poco più della metà di uno de' precedenti; filetto primario robusto, col primo articolo assai grande; l'accessorio molto delicato, non più lungo del terzo articolo del peduncolo. Antenne inferiori di un quarto più corte delle superiori; il peduncolo distintamente più corto che in quelle, coi due primi articoli brevissimi, i due seguenti lunghi e quasi eguali; filetto poco più corto del peduncolo. Piedi del primo paio piccoli, gracili, compressi; la mano col margine unguicolare obliquo, arenato, e formante una curva continuata con l'inferiore. Piedi del secondo paio assai grandi; carpo più alto che lungo e quasi trapezoidale, mano grande, allungata, a margine inferiore quasi parallelo al dorsale; l'unguicolare assai obbliquo, dentellato sotto l'articolazione dell'unghia, indi a curva rientrante: unghia robusta, mediocrementemente arcuata. Piedi delle due paia seguenti filiformi, con l'ultimo articolo ornato di corti e rigidi peli lungo il margine posteriore. Piedi delle ultime tre paia non molto lunghi successivamente più grandi dai quinti ai settimi; il primo articolo più alto che largo, ristretto inferiormente ne' quinti e sesti; di egual larghezza dalla base alla estremità ne' settimi; a margini integri; il secondo articolo piccolo e quasi quadrato; il terzo ristretto alla base, dilatato quindi bruscamente in dietro, coi margini anteriore e posteriore seghettati e cigliati; il posteriore talvolta con intacchi più numerosi e più fini, altre fiate più pochi e più grossi; il margine inferiore smarginato per ricevere l'articolo quarto; questo largo poco meno del terzo, poco più alto che largo, seghettato e cigliato nel margine anteriore, integro nel posteriore; inferiormente troncato; ultimo articolo angusto, allungato, un poco compresso, coi margini anteriore e posteriore quasi carenati, e finalmente seghettati e cigliati. Epimeri dei primi quattro anelli un poco più alti degli anelli medesimi, il quarto maggiore de' precedenti; i tre ultimi assai bassi. Primi tre anelli addominali grandi e quasi eguali; gli altri tre ben distinti e decrescenti. Falsi piedi del quarto e quinto anello simili, con le appendici stiliformi e spinose, eguali ne' quarti, disuguali ne' quinti: quelli del sesto anello oltrepassanti di poco i precedenti, con le due appendici laminari, l'una

largamente ovale, l'altra semiovale, ambedue seghettate nel margine posteriore. Estremità addominale terminata da due appendici verticali, oblunghe.

Trovato dal Prof. Costa nel golfo di Taranto, raro.

Genere GAMMARUS, Fab.

Onde armonizzare questo genere con gli altri affini da noi istituiti, i suoi caratteri generici possono così formolarsi. — *Antennae superiores bisetae; inferiores articulo primo inermi. Pedes quatuor anteriores prehensiles; sex posteriores articulo primo tantum elato.*

Dopo le *Amphithoe* è questo il genere più ricco di specie nella famiglia de' Gammaridei: le quali possono parimenti ripartire in diversi gruppi.

I. Dorso ritondato; nessuno articolo prolungato posteriormente in spina o dente.

A) Quarto e quinto anelli addominali con de' fascetti di spinuzze sul dorso.

1 (38) GAMMARUS LOCUSTA.

Cancer gammarus locusta, Mont. — *Gammarus locusta*, Fab. — Leach — Edw.

Specie frequentissima in tutto il mediterraneo, e tra noi è la più abbondante della sotto famiglia.

2 (39) GAMMARUS MARINUS.

Gammarus marinus, Leach. — Desm. — Edw.

Trovata nel golfo di Taranto dal Prof. Costa. Specie generalmente più rara della precedente.

3 (40) GAMMARUS FLUVIATILIS.

Astaeus fluviatilis, Roes. — *Squilla pulex*, Deg. — *Gammarus Roeselii*, Gerv. — *Gammarus fluviatilis*, Edw.

Frequente nelle acque dolci correnti.

4 (41) GAMMARUS PLUMICORNIS, A. Cost.

Tav. IV, fig. 1, a-c.

G. antennis subaequalibus, corpore brevioribus; inferioribus plumosis, pedunculo illo superiorum paulo longiore; pedibus quatuor anterioribus validis, subaequalibus, manu ovato-oblonga; abdominis segmentis tribus ultimis dorso fasciculato-spinulosis; pedibus spuris abdominalibus ultimis praecedentes multo excedentibus; quintis quartis paullo brevioribus. — Long. lin. 6.

Corpo abbastanza compresso, a dorso ritondato, con gli ultimi tre anelli addominali ornati di un fascetto di delicatissime spine, che si elevano dal mezzo del loro margine posteriore; il secondo e terzo anello addominale con l'angolo posteriore-inferiore prolungato in punta acuta. Capo anteriormente ritondato. Occhi reniformi. Antenne superiori lunghe circa due terzi del corpo, robuste; il peduncolo poco più del quarto della lunghezza totale. Le inferiori quasi eguali alle prime, o poco più lunghe; il peduncolo robusto, un poco più della metà della lunghezza totale; ornate di lunghi peli sericei riuniti in fascetti più scarsi lungo il peduncolo, assai più folti all'estremità di ciascun articolo del filletto. Piedi delle due prime paja robusti, i secondi appena un poco più grandi de' primi; la mano oblunga con peli rari e rigidi, un poco più larga ne' secondi, per modo che il margine unguilare forma un angolo ottuso e ritondato con l'inferiore; unghia robusta, ed assai adunca. I rimanenti piedi finamente spinosi; i sei ultimi col primo articolo mediocrementemente dilatato. Epimeri de' primi quattro anelli alti quanto gli anelli stessi, i quarti più larghi, ed abbraccianti per una metà i quinti assai bassi come i seguenti. Falsi piedi degli ultimi tre

anelli addominali spinosi ne' margini ed all'estremità: i quarti superanti di poco i quinti; i sestì superanti di poco men che la metà i quarti, con le appendici robuste, depresse, e pelacciate. Estremità addominale terminata due appendici, che sorpassano appena il peduncolo degli ultimi falsi piedi.

Trovato nelle coste della estrema Calabria, in luglio.

5 (41) GAMMARUS OLIVII.

Gammarus Olivii, Edw. Ann. sc. nat. l. c. p. 369, pl. 10, f. 1-8 — Suit. a' Buff. III, p. 47. n. 5.

Specie alquanto rara nel golfo di Napoli. Assai frequente nell'Adriatico che bagna l'estremità di Terra d'Otranto: rimessoci dal sig. G. Costa.

- B) Quarto e quinto anelli addominali senza fascetti di spine.
a) Piedi delle due prime پاا quasi simili ed eguali.

6 (43) GAMMARUS PULEX.

Cancer pulex? Lin. — *Gammarus pulex*, Fab. — *Gammarus fluviatilis*, Edw. An. sc. nat. — *Gammarus pulex*, Zenk., Edw. Suit. à Buff.

Trovasi nelle acque dolci, al pari del *gamm. fluviatilis*.

7 (44) GAMMARUS UNGUISERRATUS, A. Cost.

Tav. IV, fig. 2.

G. dorso rotundato inermi; antennis superioribus gracillimis, corpore multo longioribus, seta primaria pedunculo plus duplo longiore; inferioribus superiorum dimidium paullo excedentibus; pedibus quatuor anterioribus parum validis, subaequalibus, manu oblonga, ungue in margine concavo dentato-serrato; pedibus spuris abdominalibus fere aequae terminatis. — Long. lin. 4.

Corpo svelto, a dorso ritondato, perfettamente liscio. Antenne superiori gracilissime, di un sesto più lunghe dell'intero corpo; il peduncolo meno del terzo della lunghezza totale, col secondo articolo più lungo del primo; filetto primario di trentaquattro a trentasei articoli; l'accessorio lungo il doppio del terzo articolo del peduncolo. Antenne inferiori lunghe poco più della metà delle superiori, meno gracili; il peduncolo più lungo che in quelle, con gli ultimi due articoli lunghi ed eguali, il filetto poco più lungo di uno di questi. Piedi delle due prime paja non molto grandi, mediocrement robusti, quasi eguali; la mano compressa, oblunga, col margine unguicolare formante una curva continuata con l'inferiore ne' primi, un angolo assai ottuso e ritondato ne' secondi: unghia negli uni e negli altri arcuata, con grossi denti acuti sul margine concavo a modo di sega. Primo articolo de' sei piedi posteriori mediocrement dilatato. Epimeri non molto alti. Falsi piedi degli ultimi tre anelli addominali allungati, terminati quasi ad egual livello.

Trovato presso le coste della estrema Calabria, nel mese di luglio. Sembra assai raro.

8 (45) GAMMARUS LONGICAUDATUS.

Tav. IV, fig. 6.

G. valde elongatus, dorso rotundato inermi, antennis crassiusculis, corpore multo brevioribus; superioribus inferiores excedentibus, seta pedunculo paulum longiore; pedibus quatuor anterioribus aequalibus et similibus, manu compressa, brevi, elata, antice truncata; pedibus spuris abdominalibus sextis abdominis longitudine, appendice altera longissima biarticulata, altera rudimentati; quintis quartis brevioribus. — Long. lin. 6.

Gammarus longicaudatus, A. Cost. in Hope, Col. p. 45.

Corpo proporzionalmente stretto ed allungato, a dorso ritondato perfettamente liscio. Antenne robuste; le superiori lunghe appena la terza parte del corpo; peduncolo un poco meno della metà della lunghezza totale, col secondo articolo quasi eguale al primo, il terzo assai

breve; filetto primario crasso, con ventidue a ventiquattro articoli; l'accessorio rudimentale. Antenne inferiori simili alle altre, ma molto più corte; il peduncolo lungo quasi quanto in quelle, co' due ultimi articoli quasi eguali; il filetto di un terzo circa più lungo del quarto articolo del peduncolo. Piedi delle due prime paja robusti, simili e quasi eguali, filiformi fino al corpo inclusivo; la mano breve, inferiormente dilatata, anteriormente troncata, pressochè tanto alta che lunga, e quasi a forma di larga campana, con scarsa peluria sui margini; unghia arcuata, lunga quanto il margine unguicolare, robusta, assottigliata bruscamente all'estremità. Primo articolo de' sei piedi posteriori mediocrementemente dilatato, men largo che lungo. Epimeri assai bassi e poco diversi fra loro. Falsi piedi del quarto anello addominale lunghi quanto i due primi articoli dell'addome, colle due appendici disuguali, l'una eguale al peduncolo, l'altra poco più della metà della prima; quelli del quinto anello più corti, con le due appendici quasi eguali; quelli del sesto lunghi quanto l'intero addome, col peduncolo assai corto, e delle due appendici una rappresentante quasi per intero il falso piede, composta di due articoli, di cui il secondo poco più corto del primo; l'altra del tutto rudimentale. Estremità dell'addome terminata da due piccole appendici orizzontali, poco più corte de' peduncoli degli ultimi falsi piedi.

Gammarus longicaudatus, A. Cost. in Hlope, Cat. p. 45.

Trovato nelle acque potabili fluenti della città.

9 (46) GAMMARUS MONTANUS.

Tav. IV, fig. 7 e 8.

G. valde elongatus, dorso rotundato inermi, antennis crassiusculis, corpore multo brevioribus; superioribus inferiores excedentibus, seta pedunculo paulum longiore; pedibus quatuor anterioribus aequalibus et similibus, manu compressa, brevi, infra elata, antice truncata; pedibus spuriis abdominalibus sextis quartos parum superantibus, appendice primaria longa biarticulata, altera rudimentali; quintis quartis multo brevioribus.—Long. lin. 5 1½.

Variat: pedibus spuris quartis quintos non excedentibus (jun.).

Gammarus montanus, A. Cost. in Hope, l. c. pag. 44.

Specie affinissima alla precedente. Diversa essenzialmente per 'li falsi piedi del sesto anello addominale notabilmente più corti, sorpassando di poco quelli del quarto; per modo che il primo articolo dell'appendice primaria è poco più lungo del peduncolo, ed il secondo è poco più della metà del primo. Quelli del quinto anello sono ancora più corti de' quarti, e questi ad appendici o stilette disuguali. In individui più giovani però i falsi piedi del quarto anello non oltrepassano quelli del quinto; e de' due articoli dell'appendice primaria di quelli del sesto il secondo è lungo appena una terza parte del primo.

Raccolto nel lago del Matese nel mese di luglio: non molto frequente.

aa) Piedi del secondo pajo assai più grandi e diversi de' primi.

10 (47) *GAMMARUS OBTUSUNGUIS*, A. Cost. (n. sp.)

Tav. III, fig. 8.

G. dorso rotundato inermi, abdominis articulis ultimis duobus spinulis duabus filiformibus exilibus erectis; antennis gracilibus, superioribus corpore quarto brevioribus, seta pedunculo sesqui longiore; inferioribus superiorum pedunculum paullo excedentibus; pedibus primi paris minutis gracilibus, secundi majoribus filiformibus, manu magna compressa, margine antico valde obliquo denticulato, ungue basi areolato, dehin subrecto cylindraceo apice rotundato. — Long. lin. 3.

Corpo svelto, poco robusto, a dorso ritondato, ne' soli due ultimi anelli addominali fornito di due delicatissime spine filiformi, non riunite in fascetto, visibili con forte ingrandimento. Antenne superiori lunghe i tre quarti del corpo, gracili; il peduncolo formante i due quinti della lunghezza totale, col primo articolo grossetto, fornito di due delicatissime

spine inferiormente; il secondo gracile, cilindraceo, un poco più lungo del primo, il terzo meno della metà del precedente; filetto primario con trentadue a trentaquattro articoli cilindracei; l'accessorio delicatissimo, lungo quanto il terzo articolo del peduncolo. Antenne inferiori gracili, sorpassanti di poco il peduncolo delle superiori; il primo articolo del peduncolo brevissimo e terminato anteriormente da breve ed acuta spina, il secondo poco più lungo; i due ultimi lunghi ed eguali; filetto di un quarto più lungo dell'ultimo articolo del peduncolo, con diciotto articoli. Piedi del primo pajo assai piccoli, gracili, quasi filiformi; la mano più corta del carpo, col margine unguicolare diritto, formante angolo quasi retto con l'inferiore, finamente cigliato; unghia breve e robusta. Piedi del secondo pajo più lunghi, men gracili, filiformi; la sola mano compressa, inferiormente dilatata, lunga il doppio della propria altezza, col margine unguicolare assai obbliquo, formante angolo ottusissimo con l'inferiore quasi sulla metà della lunghezza della mano, ornato di spine corte robusti un poco arcuate mobili, frammitte ad ispidi peli: l'unghia lunga un poco meno del margine unguicolare, robusta, molto inarcata presso la base, indi quasi diritta, cilindracea, ritondata all'estremità. Primo articolo de' sei piedi posteriori assai dilatato, e ritondato posteriormente. Epimeri poco alti, i tre ultimi assai piccoli. Falsi piedi degli ultimi tre anelli addominali terminati ad egual livello; i sesti con uno degli stiletti rudimentale. Appendici terminali dell'addome minutissime.

Trovato nel golfo di Napoli, assai raro.

Osservazioni. La forma dell'unghia de' piedi del secondo pajo ravvicina questo *Gammarus* all'*obtusatus* di Montagu; però la forma e grandezza de' piedi del primo pajo, la figura della mano de' piedi stessi, non ci permettono insieme associarli, quando anche si volessero considerare sfuggite a quell'osservatore le spinuzze che adornano i due ultimi anelli addominali.

11 (48) GAMMARUS SCISSIMANUS, A. Cost.

Tav. III, fig. 7.

G. dorso rotundato inermi, antennis superioribus corpore quarto brevioribus, seta primaria pedunculo paulum brevior; inferioribus multo brevioribus, seta pedunculi articulo quarto parum longior; pedibus secundi paris manu magna, margine antico sinuoso, obtuse denticulato, medio profunde scisso; pedibus spuriis abdominalibus fere aequae terminatis. — Long. lin. 2 1/2.

Corpo svelto, non molto compresso, a dorso ritondato, liscio. Antenne superiori lunghe i tre quarti del corpo; peduncolo poco più della metà della lunghezza totale, col secondo articolo poco più lungo del primo, il terzo assai breve; filetto primario lungo poco men del peduncolo od eguale a questo; l'accessorio lungo circa un quarto del primario o poco più. Antenne inferiori di un quarto più corte delle superiori; il peduncolo quasi egualmente lungo che in quelle, coi due ultimi articoli eguali; il filetto poco più lungo di uno di questi. Piedi del primo paio assai piccoli, a mano compressa, troncata poco obliquamente in avanti. Piedi del secondo paio con mano grande, compressa, poco men alta che lunga, col margine unguicolare poco obliquo, leggermente arcuato e sinuoso, ottusamente dentato, con dente maggiore depresso bifido nell'angolo antero-inferiore, con una profonda scissura nel mezzo di detto margine, angusta ed orizzontale, per la quale quando l'unghia è adattata contro la mano rimane un piccolo vuoto. Unghia robusta, con ottuso angolo sporgente verso la metà del suo lato concavo. Primo articolo de' sei piedi posteriori medioeremente dilatato. Epimeri bassi. Falsi piedi del sesto anello addominale oltrepassanti appena i quinti, e questi i quarti. Colore generale verdiccio, con gli occhi neri.

Trovato nel golfo di Taranto dal Prof. O. G. Costa.

12 (49) GAMMARUS PUNCTIMANUS, A. Cost.

Tav. III, fig. 6.

G. dorso rotundato inermi; antennis superioribus corpore vix brevioribus, seta peduneuto fere duplo longiore; inferioribus multo brevioribus et gracilioribus; pedunculo illo superiorum paululum brevior; pedibus secundi paris manu magna elongata, margine unguiculari omnino infero externe punctato-striata, interne pro unguis validi ac longi receptione canaliculata, margine ipso longe et erebe barbato. — Long. lin. 3 1/4.

Corpo allungato, mediocrementemente robusto, a dorso ritondato liscio. Occhi pressochè circolari. Antenne superiori lunghe poco meno dell'intero corpo; il peduncolo formante poco più del terzo della lunghezza totale, robusto, col primo articolo grosso, ristretto alla base, e con una spinuzza inferiormente presso l'estremità, il secondo più lungo del primo, cilindraceo, il terzo assai corto; il filetto primario delicato, l'accessorio esilissimo. Antenne inferiori di un quarto più corte delle superiori; più gracili; il peduncolo poco più corto che in quelle, con gli ultimi due articoli eguali fra loro; il filetto poco più lungo del peduncolo. Piedi del secondo pajo assai robusti; la mano grande, forte, lunga circa un terzo dell'intero corpo, larga un terzo della propria lunghezza, diritta, avente presso il margine inferiore una serie di punti impressi sulla faccia esterna, ed una scanalatura lungo la interna, nella quale adattasi l'unghia nella flessione; il margine stesso à una frangia di peli lunghi, eguali e stivati. Unghia robusta, lunga quanto la mano, poco arcuata. Primo articolo de' sei piedi posteriori dilatato successivamente di più dai quarti a' sesti. Epimeri de' primi quattro anelli toracici più alti che larghi, quelli del quinto più bassi e quasi quadrati, quelli degli ultimi due assai piccoli. Falsi piedi degli ultimi tre anelli addominali assai corti, terminati ad egual livello, spinosi all'estremità: quelli del sesto anello con uno de' stiletti grosso e conico, l'altro rudimentale. Appendici terminali piccolissime.

Nel golfo di Napoli, estremamente raro.

Osservazioni. Affine al *Gam. brevicaudatus* dell' Edwards, dal quale principalmente distinguesi per la forma della mano del secondo paio di piedi, e per la proporzione degli articoli delle antenne.

II. Dorso ritondato, con alcuni articoli prolungati posteriormente in spina o dente.

13 (50) *GAMMARUS BISPINOSUS*, A. Cost.

Tav. III, fig. 9.

G. dorso rotundato, abdominis segmentis primis duobus postice in spinam brevem productis; antennis superioribus inferiorum pedunculum paullo superantibus, harum seta pedunculi articulo ultimo parum longiore; pedibus quatuor anterioribus validis, aequalibus, manu oblongo-ovata, margine unguiculari ciliato ac vix conspicue denticulato angulo antero-inferiore sub spinuloso; pedibus spuris abdominalibus sextis praecedentes vix excedentibus. — Lóng. lin. 2 1½.

Corpo alquanto tozzo, poco compresso, a dorso ritondato, coi soli due primi anelli addominali prolungati posteriormente in breve spina. Occhi reniformi. Antenne superiori di un terzo circa più corte delle inferiori; il peduncolo brevissimo, di due soli articoli ben apparenti, de' quali il secondo assai piccolo; il filetto accessorio lungo un poco più del peduncolo, e poco meno che metà del primario. Antenne inferiori lunghe poco più della metà del corpo; il peduncolo assai lungo, con gli ultimi due articoli eguali; il filetto robusto quasi quanto il peduncolo, e poco più lungo del quarto articolo di questo. Piedi delle due prime paia robusti, eguali e simili: il carpo prolungato inferiormente abbracciando per poco meno della metà la mano: questa ovolare; col margine unguicolare formante una curva continuata con l'inferiore, finissimamente denticolato e cigliato: l'unghia arcuata e lunga da raggiungere l'estremità del prolungamento del carpo. Primo articolo de' sei piedi posteriori dilatato, col margine posteriore poco arcuato. Epimeri de' primi quattro anelli proporzionalmente alti: gli altri bassi. Falsi piedi del quarto e quinto anello addominale con appendici stiliformi e

spinose, i quinti poco più corti de' quarti; i sesti superanti i quarti, con le due appendici compresse e lanceolate, spinose ne' margini. Appendici terminali dell'addome lunghe quanto quelle degli ultimi falsi piedi, anguste, orizzontali, troncate e spinose all'estremità.

Nel golfo di Napoli, assai raro.

Genere CERADOCUS (1), A. Cost.

Caratteri generici. *Antennae superiores bisetae; inferiores processu trabeculiformi cuspidato, cum earum pedunculi articulo primo articulado anteaque porrecto praeditae. Pedes quatuor anteriores prehensiles, secundi multo majores; sex postici articulo primo tantum dilatato.*

Illustrazioni. Ben distinto è da' *Gammarus* p. d. il Crostaceo che prendiamo a tipo di questo novello genere, per la singolarità che offrono le antenne inferiori. Presentano queste un pezzo lungo, diritto, acuto e stiliforme, articolato col primo articolo del peduncolo inferiormente all'articolazione del secondo articolo di quello, e menato in avanti. Il quale pezzo soprannumerario non è da confondersi con la spina nella quale talvolta prolungasi quell'articolo. Vedesi in vero un fatto analogo abbozzato in qualche specie di Amfitoe, come l'*A. semicarinata*; ma qui acquista un tale sviluppo, da meritar bene il valore di carattere generico.

I (51) CERADOCUS ORCHESTIPES, A. Cost.

Tav. IV, fig. 4.

C. elongatus, dorso rotundato; abdominis segmentis 2-5 margine postico medio in spinulam acutam productis; tertio lateribus postice bi-angulato-spinoso; antennis superioribus longioribus; inferioribus superiorum pedunculum paullo superantibus; pedibus primi

(1) Dalle greche voci κερξ, corno, antenna, e δοκος trave.

paris minutis, secundi manu magna, margine unguiculari obliquo ciliato, angulo inferiore dentato; pedibus spuris abdominalibus sextis praecedentes multo excedentibus. — Long. lin. 7.

Corpo svelto, assai allungato, a dorso ritondato. Capo grande. Occhi ovolari. Torace perfettamente liscio. Primo anello addominale con una spina rudimentale nel mezzo del margine posteriore, diretta in dietro, e con gli angoli inferiori-posteriori terminati in punta acuta: il secondo intaccato nel mezzo del margine posteriore con una spina maggiore, ne' lati simile al precedente; il terzo come il secondo sul dorso, ma nei fianchi il margine posteriore presenta due angoli prolungati a guisa di spina, fra quali talvolta se ne osserva ancora una terza minore: il quarto e quinto nel dorso prolungati in corta spina, lisci ne' fianchi: il sesto piccolo, inerme, profondamente intaccato in dietro. Antenne superiori lunghe da raggiungere il secondo anello addominale; il peduncolo poco più della metà della lunghezza totale, col primo articolo un poco più lungo del capo, quasi triquetro, con finissime spine filiformi sullo spigolo inferiore, il secondo più lungo del primo, con un delicato solco al disopra, che dalla base va perpendendosi verso la metà della lunghezza, e con finissime spine, come nel precedente, al di sotto: il terzo assai corto; il filetto accessorio lungo il doppio dell'ultimo articolo del peduncolo. Antenne inferiori oltrepassanti di poco il peduncolo delle superiori; il primo articolo del peduncolo assai corto, con lo stiletto lungo quanto il secondo articolo del peduncolo, e questo lungo più della metà del terzo: questo ed il quarto eguali: il filetto di un terzo più lungo di uno di questi articoli. Piedi del primo paio assai piccoli; la mano inferiormente dilatata, col margine unguicolare formante una curva continuata con l'inferiore; il carpo nel dorso un poco più lungo della mano; anteriormente alto quanto quella. Piedi del secondo paio robusti; la mano grande, compressa, ovoidale, col margine unguicolare assai obliquo, leggermente arcuato, finissimamente dentellato e cigliato; l'angolo antero-inferiore prolungato in acuto dente: unghia robusta, arcuata, lunga quanto il margine unguicolare toccante con la sua punta nella flessione la base del dente angolare: carpo assai più corto della mano. Piedi delle due paia seguenti gracili e filiformi. Primo articolo delle ultime tre paia di piedi angusto ne' quinti

e sesti, un poco più largo ne'settimi; i rimanenti finamente spinosi ne' margini. Epimeri assai bassi: quelli de' primi quattro anelli pressochè tanto lunghi che alti; i quinti più lunghi ed inferiormente bilobi, i due ultimi assai piccoli. Falsi piedi del quarto e quinto anello addominale piuttosto corti e terminati allo stesso livello, le loro due appendici stiliformi, eguali, spinose ne' margini ed all'estremità: quelli del sesto anello robusti, oltrepassanti di molto i precedenti; con le due appendici compresse, seghettate ne' margini. Appendici terminali incomplete in tutti gli individui che abbiamo.

Trovato dal Prof. O. G. Costa nel golfo di Taranto, ove non sembra molto raro.

SOTTOFAM. V.^a LEUCOTOINI

Genere LEUCOTHOE, Leach.

1 (52) LEUCOTHOE DENTICULATA, A. Cost.

L. antennis superioribus inferiores quinto excedentibus; pedibus primi paris carpo gracili, manu illius processum longitudine aequante; ungue gracillimo, dimidia manus longitudinis; secundi manu valida, margine unguiculari, antice 5-denticulato, ungue valido arcuato. — Long. lin. 4.

Fn. Nap. Tav. IX, fig. 3. (senza testo).

Abito della *L. furina*. Antenne superiori lunghe meno della metà del corpo; il peduncolo un poco più della metà della lunghezza totale; il primo articolo grosso e lungo, il secondo più gracile ed un poco più lungo del primo; il terzo assai breve: il filetto gracile, di otto a dieci articoli. Antenne inferiori di un quinto più corte delle superiori, assai gracili; il peduncolo poco più lungo che in quelle, col quarto articolo

un poco più corto del terzo; il filetto lungo poco più della metà del quarto articolo del peduncolo. Piedi del primo paio lunghi e gracili; il carpo quasi romboidale, col prolungamento assai lungo, diritto, leggermente incurvato in sopra all'estremità: la mano lunga quanto il prolungamento del carpo, più grossa di questo, diritta: unghia gracile, lunga la metà della mano, poco arcuata, assai acuta. Piedi del secondo paio robusti; il carpo inferiormente prolungato in avanti abbracciando la mano, a guisa di paletta, divisa all'estremità in due lobi, l'uno acuto, l'altro troncato. La mano grossa, allungata, col margine unguicolare formante una curva continuata con l'inferiore, fornito di cinque dentelli ottusi eguali ed equidistanti nel suo terzo anteriore: unghia robusta, poco arcuata, e lunga da raggiungere nella flessione l'estremità del prolungamento del carpo. Falsi piedi del sesto anello addominale sorpassanti un poco i precedenti.

Nel golfo di Napoli, assai rara.

Osservazioni. Diversa dalla *L. furina* per le proporzioni degli articoli delle antenne, e pel margine unguicolare delle mani del secondo paio fornito di dentelli più fini e tutti eguali.

N. B. La *Leucotoc* da noi indicata col nome di *parthenopaea* (nel Cat. di Ilope, p. 24) sopra individuo malconcio, merita ancora ulteriori ricerche per essere confermata.

FAMIGLIA II.^a PODOCERIDEI — SOTTOFAM. VI.^a PODOCERINI.

Genere ERICTHONIUS, Edw.

Lo studio de' due sessi, diversi fra loro nella conformazione dei piedi del secondo paio, ci obbliga modificare i caratteri sì generici, che della specie servita di tipo, alla quale una seconda or se ne aggiunge, che maggiormente conferma la diagnosi generica, che noi così formuliamo.

Antennae superiores et inferiores seta multi-articulata terminatae. Pedes quatuor anteriores prehensiles, primi minores, secundi majores, in sexibus diffformes; (mas) articulo penultimo seu carpo majore, infra in processum digitiformem antea producto, ultimo seu manu minore, contra praecedentis processum se flectente, ac unguem gerente: (fem.) articulis ultimis duobus fere ut in g. Amphithoe.

1 (52) ERICTHONIUS DIFFORMIS.

E. antennis superioribus longioribus, pedibus secundi paris (mas) coro, s. art. penultimo, oblongo, antice bifurcato, processu digitiformi valde elongato, recto acuminato, basi ab articuli apice remoto, manu processum vix excedente, cylindracea, ungue valido, arcuato, in flexione dimidium processus amplexante: (fem.) articulo penultimo infra antea oblique producto; ultimo subovato. — Long. lin. 2 1/2-3.

Erichthonius difformis, Edw. Suit. à Buff. (mas.)

Antenne superiori lunghe i tre quarti del corpo: il filetto eguale al peduncolo in lunghezza, o poco più corto, con dieci articoli. Antenne inferiori di un sesto più corte delle superiori; il peduncolo un poco men lungo che in quelle, col quarto articolo più lungo del terzo; il filetto un poco più corto degli ultimi due articoli del peduncolo presi insieme, con nove articoli. Piedi del primo paio piccoli, col carpo nel dorso lungo quanto la mano; questa inferiormente dilatato-ritondata. Piedi del secondo paio nel maschio assai grandi; il primo articolo lungo delicato e cilindraceo; il penultimo, analogo del carpo, grosso, diritto inarcato nel dorso presso la base, anteriormente biforcuto, col ramo inferiore minore continuato nel processo digitiforme, diritto, acuminato, lungo un poco più della metà dell'articolo d'onde emana; il superiore più grosso, corto e troncato per dare inserzione all'articolo seguente analogo della mano, cilindraceo, oltrepassante di poco l'estremità del prolungamento del carpo, contro del quale s'infilette; unghia, robusta, arcuata, e grande, per modo che nella flessione abbraccia una metà del prolungamento del carpo. Nella femmina i detti piedi sono piccoli,

poco più grandi de' primi, di forma ordinaria; il carpo più corto della mano, compresso, inferiormente prolungato in avanti abbracciando la mano; questa quasi ovale, col margine unguicolare assai obbliquo formante un ottusissimo angolo ritondato con l'inferiore: unghia robusta, inflettentesi contro il margine anteriore della mano, raggiungendo l'estremità del prolungamento del carpo.

Trovato nel lago Fusaro, tra fuchi, non molto raro.

2 (54) ERICTHONIUS BIDENS, A. Cost.

Tav. IV, fig. 9 a-c.

E. antennis subaequalibus, crassis, seta pedunculo distincte brevior; pedibus secundi paris (mas) carpo incrassato, dorso valde gibbo, apice integro, processu digitiformi brevi compresso apice bifido, manu crassa processum digitiformem dimidio superante, infra sexdentata, ungue in flexione processus apicem attingente: (fem.) carpo infra antea oblique producto, manu subovata, infra subangulata. — Long. lin. 3.

Antenne un poco men gracili che nella specie precedente, quasi eguali e nella lunghezza totale, e nelle rispettive del peduncolo e filetto: questo distintamente più corto del peduncolo. Piedi del primo pajo col carpo poco più lungo della mano; questa inferiormente dilatata e quasi angolata. Piedi del secondo pajo nel maschio assai robusti; il carpo grosso, ristretto alla base, molto inarcato sul dorso, anteriormente troncato in sopra per dare inserzione alla mano, inferiormente continuato nel prolungamento digitiforme, corto, robusto, compresso, e biforcuto all'estremità, con la punta superiore più corta; la mano oltrepassante di una metà il prolungamento del carpo, cilindracea, col margine inferiore sinuoso e quasi ottusamente dentato: unghia robusta, poco arcuata, corta, raggiungendo nella flessione l'estremità del prolungamento del carpo. Nella femina i detti piedi sono pressochè simili agli omologhi della specie precedente, ma più robusti e più crassi.

Trovato nel golfo di Napoli, non molto frequente.

Genere PODOCERUS, Leach.

1 (55) PODOCERUS CALCARATUS.

Podocerus calcaratus, Rathke, Beitr. Fn. Norv. in Act. Ac. L. C. C. N. C. XX, p. 91, tab. IV. f. 9.

Trovato nel golfo di Napoli, assai raro.

SOTTOFAM. VI.^a UNCIOLINI

Genere MICRODEUTOPUS (1), A. Cost.

Caratteri Generici.—*Antennae superiores seta multi articulata terminatae; setaeque accessoria rudimentali praeditae; inferiores pediformes. Pedes quatuor anteriores prehensiles; primi paris majores, in sexibus difformes, (mas) carpo maximo, manu parva, unguiculum gerente; (fem.) manu majore fere ut in g. Amphithoe: secundi minuti, filiformes.*

Illustrazione. Ben distinto è questo genere per la forma delle due prime paja di piedi. Gli anteriori sono i maggiori di tutti, e molto diversi ne' due sessi, non meno di quel che sono i piedi del secondo pajo nel genere Erietonio. Nel maschio sono più grossi, col penultimo articolo, o carpo, maggiore di tutti; l'ultimo, o mano, corto, cilindraceo, portante l'unghia: nella femmina àn la forma ordinaria delle *Amphithoe*. Quelli del secondo pajo sono simili ne' due sessi, delicati, filiformi, con mano allungata, terminata da unghia non più lunga del margine anteriore della mano, molto adunca, e che nella flessione adattasi con la porzione estrema contro la faccia interna della mano. Questa struttura de' piedi del secondo pajo differenzia notabilmente i Microdeutopi dalle *Unciola* dell' America, coi quali ànno molta affinità.

(1) Dalle greche voci μικρος piccolo, δευτος secondo, e πους piede.

1 (56) MICRODEUTOPUS GRYLLOTALPA, A. Cost.

Tav. IV, fig. 10.

M. antennis superioribus longioribus, pedibus primi paris carpo valde inflato, antice infra elato, 4-dentato-calcarato (mas) minore, integro (fem.), ungue dentato-serrato; pedibus secundi paris articulo primo lato manu elongata-angustata; pedibus spuriis abdominalibus fere aequae terminatis. — Long. lin. 2.

Corpo svelto, allungato, più nel maschio che nella femmina. Antenne superiori lunghe circa la metà del corpo; il peduncolo poco meno della metà della lunghezza totale, col primo articolo assai grosso, il secondo lungo più del primo, ma più delicato e cilindraceo, il terzo circa la metà del secondo; il filetto primario con quattordici articoli successivamente più lunghi e più gracili, tutti con qualche pelo all'estremità; il filetto accessorio piccolissimo, composto d'un solo articolo, che oltrepassa appena il primo del primario. Antenne inferiori di un quarto circa più corte delle superiori; il peduncolo più lungo che in quelle, col primo articolo non oltrepassante il margine anteriore del capo, il secondo corto e grosso, i due seguenti lunghi e quasi eguali; il filetto cilindraceo, eguale all'articolo ultimo del peduncolo, composto di sette articoli, de' quali i due primi più lunghi, i quattro seguenti lunghi quasi quanto il proprio diametro ed eguali fra loro, l'ultimo assai piccolo ed un poco incurvato in sotto; tutti terminati da piccolo ciuffo di peli. Piedi del primo pajo nel maschio assai grandi e robusti; il penultimo articolo, o carpo grosso, inarcato sul dorso, nella parte anteriore-inferiore compresso, ed armato di quattro denti successivamente più grandi dal posteriore, come quelli della mano del grillotalpa; mano assai più piccola del carpo, cilindracea, rigonfiata sul dorso alla base, inferiormente sinuosa, e con due oscuri denti innanti l'estremità; unghia robusta, leggermente arcuata, dentata a sega nel margine concavo, nella flessione raggiungente l'ultimo dente del carpo. Nella femmina i piedi del primo pajo sono men grandi, poco robusti, col carpo e la mano compressi, il primo poco più corto della seconda, questa ovato-oblunga; unghia simile a quella del maschio, inflettentesi contro il margine antero-inferiore della mano. Piedi del secondo pajo in ambedue i sessi simili

ed eguali, piccoli, delicati, col primo articolo dilatato, i rimanenti filiformi; il carpo lungo quanto la mano, questa poco più larga all'estremità, col margine anteriore troncato, assai corto, formante angolo quasi retto o con l'inferiore: unghietta inserita nell'angolo anteriore-superiore, breve, molto incurvate-ritondato, per modo che nella flessione la metà estrema adattasi sulla faccia interna della mano. Piedi delle ultime tre paja col primo articolo dilatato: i quinti poco più lunghi de' secondi e terzi; i sesti e settimi notabilmente più lunghi. Epimeri bassi, poco tra loro diversi. Falsi piedi degli ultimi tre anelli addominali allungati, terminati quasi ad egual livello. Appendici terminati assai piccole.

Nel lago Fusaro, tra i fuchi, frequente.

SOTTOFAM. VIII.^a COROFIINI

Genere COROPHIUM, Latr.

1 (57) COROPHIUM ACHERUSICUM, A. Cost.

C. antennis superioribus brevioribus et gracilioribus; inferioribus corporis fere longitudine, validissimis, pedunculi articulo tertio infra ad apicem spinis duabus vel tribus decrescentibus armato (mas); brevioribus, minus crassis, inermibus (fem.); pedibus secundi paris ungue infra bidentato. — Long. lin. 2.

Specie assai affine al *C. longicorne*, dal quale nondimeno distinguesi nettamente per le antenne diverse ne' due sessi; nel maschio più lunghe, assai più grosse, soprattutto il terzo articolo il quale inferiormente presso l'estremità à due o tre spine, decrescenti dalla posteriore all'anteriore; nella femmina più corte, meno robuste e senza alcuna spina. I piedi del secondo pajo anno l'unghia armata di due acuti denti lungo il margine concavo.

l'requentissima nel lago Fusaro, tra i fuchi.

SEZIONE II.

AMFIPODI ANOMALI

Genere VIBILIA, Edw.

I (58) VIBILIA SPECIOSA, A. Cost.

V. dorso rotundato inermi, fronte triangulariter parum producta, thoracis articulo primo brevissimo; antennis superioribus capitis thoracisque articuli primi longitudine, articulis primis duobus brevissimis transversis, tertio lanceolato, lateribus involuto; inermi, inferioribus gracillimis, filiformibus, superioribus parum brevioribus. — Long. lin. 3 1/2.

Fu. Nap. tav. IX, fig. 1 (senza testo).

Corpo allungato, a dorso cilindraceo, con epimeri angustissimi. Capo poco men lungo che largo, con la fronte prolungata in punta triangolare orizzontale tra la base delle antenne superiori. Occhi di mediocre grandezza, laterali, verticali, prossimi al margine anteriore del capo. Primo articolo del torace brevissimo, soprattutto nel mezzo, ne' lati allargandosi insensibilmente; i rimanenti poco diversi tra loro in grandezza. Antenne superiori lunghe quanto il capo e primo anello toracico presi insieme, di tre articoli, i due primi grossi, assai corti, trasversali; il terzo lungo il doppio de' due primi presi insieme, quasi lanceolato, accartucciato, e proprio simile al trago de' pipistrelli, senza alcuna spina, nè pelaccinte. Antenne inferiori gracili, filiformi, un poco più corte delle superiori. Piedi del secondo paio alquanto men gracili degli altri, terminati da piccola chela un po' rigonfiata, costituita dalla mano che da un prolungamento a guisa del dito immobile de' decapodi, contro il quale si articola un piccolo dito mobile. Falsi piedi degli ultimi tre anelli addominali terminati quasi ad egual livello.

Trovata nel golfo di Napoli, assai rara.

Genere HYPERIA, Latr.

1 (59) HYPERIA PUPA, A. Cost.

Tav. IV, fig. 11 *a-b*.

H. pedibus quarti paris illos tertii paulo superantibus, quinti paris coeteris distincte longioribus; sexti et septimi decresecentibus: pedibus spuriiis abdominalibus quintis quartis brevioribus, sextis pedunculo brevissimo, appendicibus valde inaequalibus, interna majori laminam apicalem paulo superante, externa angusta quarto brevior.— Long. lin. 3 1/2.

Assai più piccola della *Hyp. Latreillii*, dalla quale principalmente differisce per li piedi delle cinque ultime paga diversi in grandezza, e per la forma e proporzioni de' falsi piedi addominali.

Corpo largo, oblungo; addome distintamente più stretto del torace, coi tre primi articoli grandi, eguali, poco men lunghi che larghi; il quarto e quinto brevissimi, il sesto un poco più largo che lungo; la lamina terminale lunga quasi quanto l'articolo precedente, più stretta di quello, quasi triangolare, ritondata all'estremità. Piedi delle due prime paga robusti; il penultimo articolo o carpo dilatato, quasi quadrato, poco più alto che lungo, con l'angolo antero-inferiore prolungato in largo dente triangolare: l'ultimo rappresentante la mano conico-cilindraceo, lungo quasi quanto il carpo, leggermente arcuato, inflettentesi contro il margine superiore del dente angolare del carpo, e terminato da unghietta piccola, acuta e poco arcuata. Piedi delle due paga seguenti un poco più lunghi, meno robusti, col primo articolo cilindraceo: gli ultimi sei piedi anno il primo articolo leggermente dilatato, oblungo, e decresecenti in lunghezza dai quinti che sono più lunghi di tutti, a' settimi. Falsi piedi del quarto anello addominale raggiungenti l'estremità della lamina terminale, col peduncolo grosso, ed allungato; le due appendici eguali, lanceolate, acuminate, lunghe la metà del peduncolo. Quelli del quinto anello distintamente più corti de' quarti, con le appendici simili, disuguali, lunghe un poco più del peduncolo. Quelli del sesto oltrepassanti un poco i quarti e

la lamina terminale , col peduncolo brevissimo , quasi triangolare , e le due appendici disuguali come quelle de' quinti , l'esterna più angusta e molto più corta, terminata al livello della interna de' quinti.

Vive nel golfo di Napoli, rara.

Genere PHROSINA, Riss.

I (60) PHROSINA SEMILUNATA.

Phrosina semilunata, Riss., Desm., Cost. Fn. Nap. tav. IV, fig. 1-5.

Nel golfo di Napoli non molto frequente.

Genere PHRONIMA, Latr.

I (61) PHRONIMA SEDENTARIA.

Cancer sedentarius, Forsk. — *Cancer gammarellus sedentarius*, Herbs. — *Phronima sedentaria*, Latr., O. G. Cost., Edw.

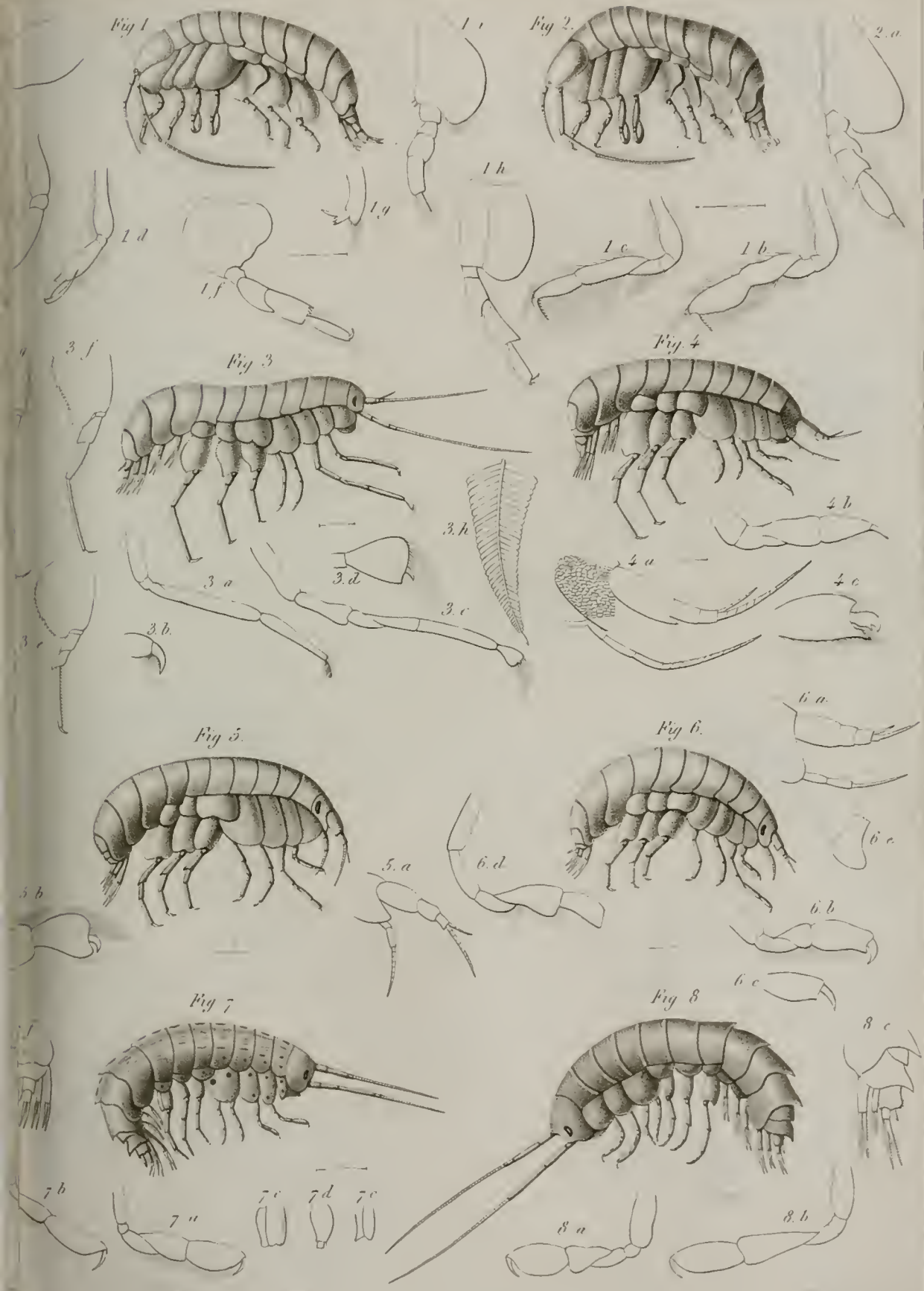
Non rara del golfo di Napoli, inquilina costante d'una specie di barilotti gelatinosi spettanti a Beroidi.

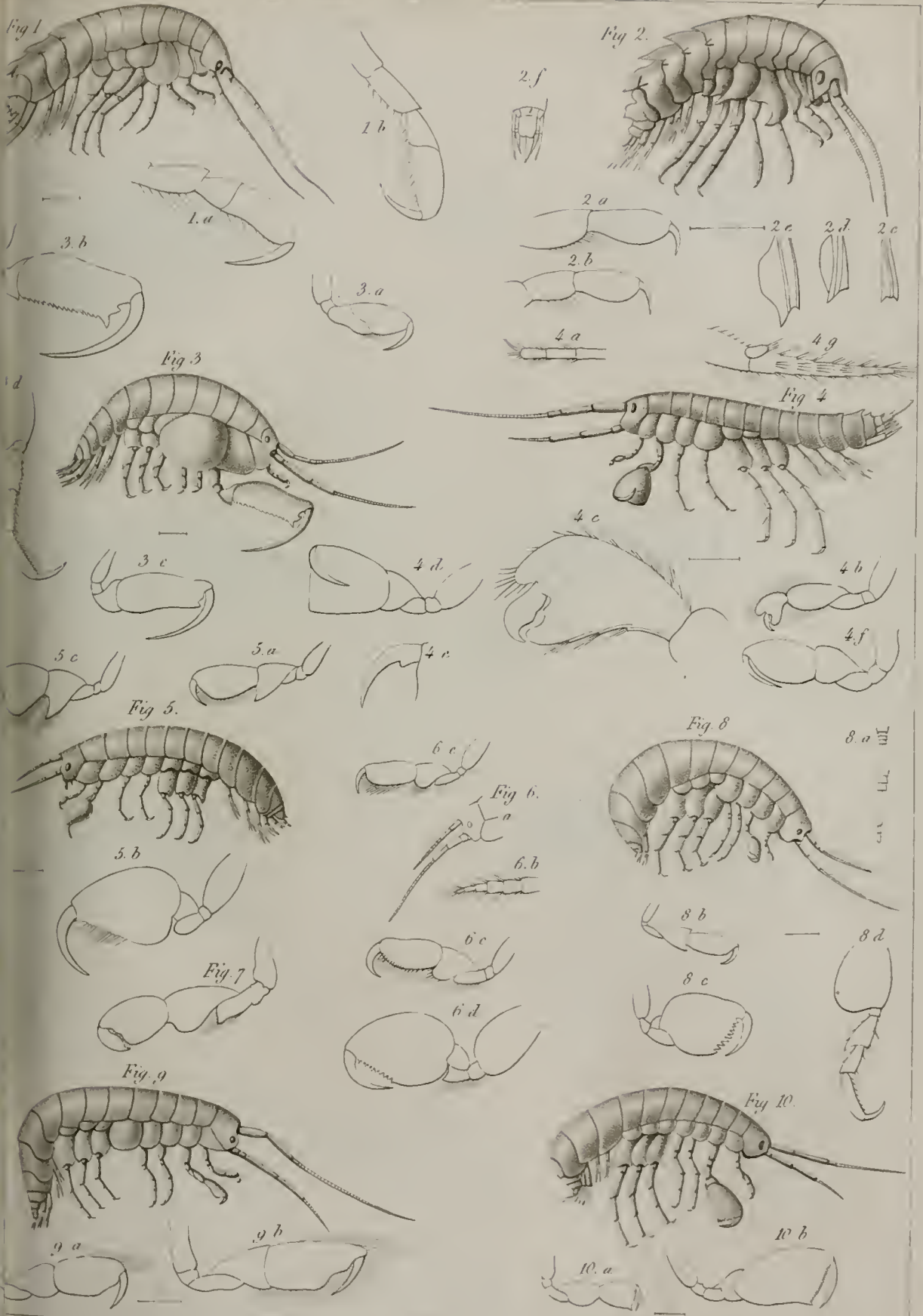
Genere TYPHIS, Riss.

I (62) TYPHIS OVOIDES.

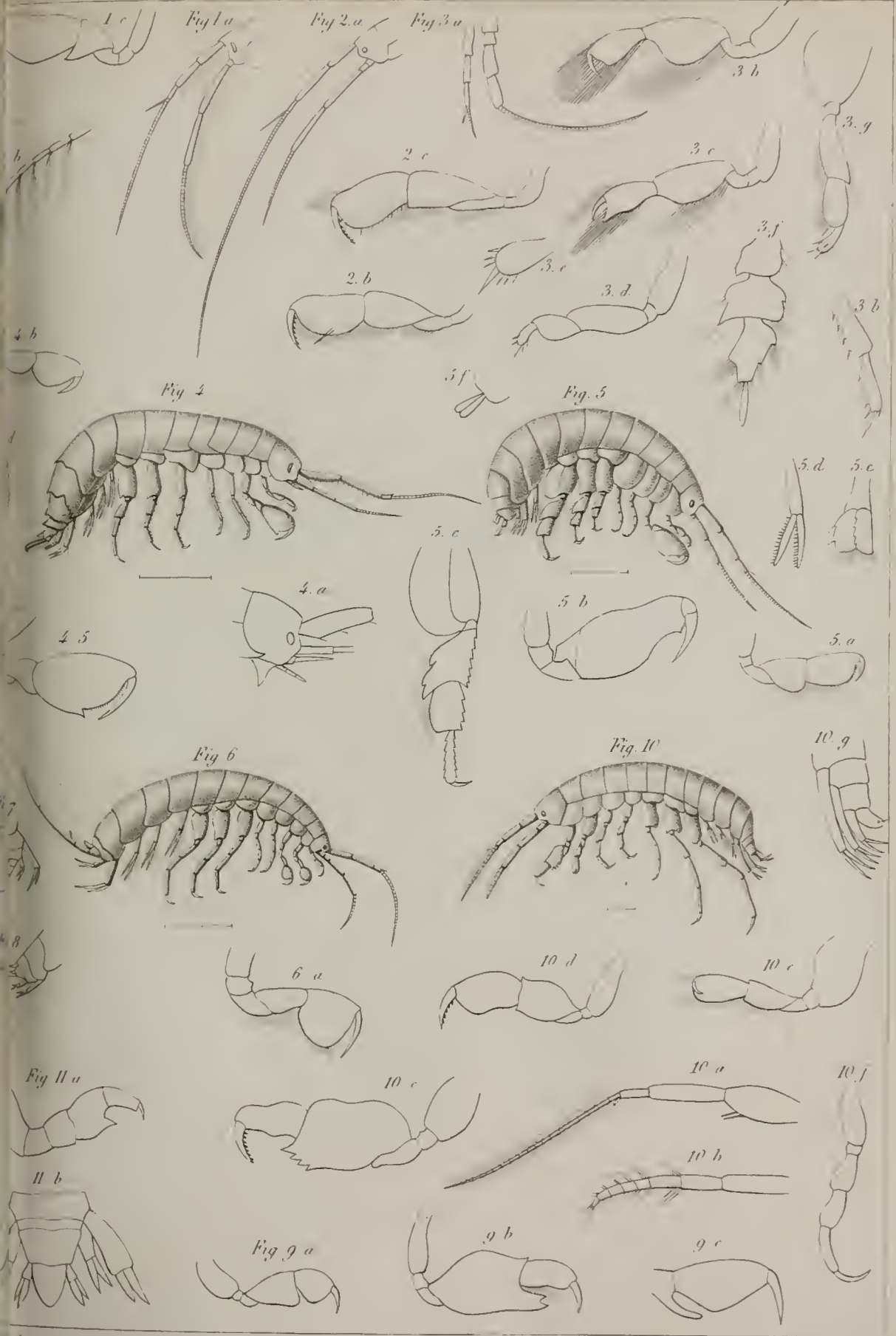
Typhis ovoides, Riss., Desm., Edw.

Assai raro nelle acque che bagnano il regno di Napoli.









MEMORIE MATEMATICHE

PRESENTATE

DA' SOCI ALL' ACCADEMIA NELL' ANNO 1854

E DA ESSA APPROVATE.

MEMORIE
RELATIVE ALLE PROPRIETÀ DELLE CURVE DEL 2° ORDINE
CIRCOSCRITTIBILI AD UN QUADRIGONO

ED ALLA RICERCA DELLA MINIMA TRA ESSE IN SUPERFICIE.

DEL SOCIO ORDINARIO N. TRUDI.

I N T R O D U Z I O N E.

Due quistioni di pratica utilità, risguardanti l'iscrizione e circoscrizione ad un dato quadrilatero di una conica di area massima o minima, hanno acquistato tra i geometri una certa importanza, sia per la difficoltà che han dimostrato, sia per aver fissato l'attenzione di grandi geometri dei tempi nostri, tra quali *Eulero*, *Gauss*, *Steiner*, all'ultimo de' quali è dovuta la più bella ed elegante soluzione del primo de' due problemi, quello cioè della iscrizione; mentre l'altro della circoscrizione sembra rimasto finora insoluto. Il sig. *Steiner* rendea nota la sua singolare soluzione in un opuscolo pubblicato in Roma nel 1844 (1), di cui faccia dono al nostro *Flauti*, quando nell'anno istesso venne con l'illustre *Jacobia* dimorar tra noi, avente per titolo: *Teoremi su le coniche iscritte e circoscritte*; ma ivi, seguendo l'ordinario suo costume ei non fa che annunciare i soli risultamenti; e, tacendo ogni analisi e dimostrazione, provoca naturalmente i lettori a rintracciarle. Così, spinto a questo lavoro, di diciassette notabilissimi teoremi ivi enunciati, potei ben presto compintamente dichiararne i primi sedici; e poichè da mia parte avea potuto eziandio qualche cosa di

(1) Vedi *Giornale Arcadico* vol. XCIX.

nuovo aggiungere alle ricerche del geometra tedesco, non esitai di annunciare il lavoro a questa R. Accademia, alla quale allora avea l'onore di appartenere come socio corrispondente, riserbandomi di rassegnarlo al suo giudizio appena avessi potuto renderlo compiuto non solo con la dichiarazione dell'ultimo de' diciassette teoremi, che in sulle prime sembròmi agevole assunto; ma anche con la risoluzione della seconda delle due quistioni di massimo e minimo, poichè parvemi di esser vicino a conseguirla. Dirò per tanto ingenuamente che nell'una e nell'altra ricerca le mie speranze in quel rincontro rimasero deluse; e mi fu forza finalmente di deporre il pensiero di questo lavoro, il quale d'allora restò abbandonato; e lo sarebbe tuttavia, se uno stimolo assai pungente non fosse sopraggiunto per determinarmi a riprendere la quistione del massimo o minimo, essendo stato a ciò provocato da formale proposta fattami di questo problema da un giovane che ascoltava le lezioni di calcolo da me dettate nella Regia Università degli studi, enunciandolo in questi termini: « In un fondo piano si vuol costruire una peschiera ellittica; il di lei contorno dee passare per quattro punti obbligati, ma bisogna occupare la più piccola superficie possibile di terreno. Si domanda il sito del centro di questa peschiera ». Era questa precisamente la quistione della circoscrizione della conica di area minima ad un dato quadrilatero; e però mi vidi obbligatoriamente richiamato all'antico lavoro; ma questa volta con miglior successo, perocchè mi fu dato di risolvere compiutamente la quistione.

Ma, risoluto il problema, sorgeva un'altra difficoltà dipendente dalla teoria de' massimi e minimi. La quistione di cui trattasi va ridotta alla ricerca de' massimi, o minimi valori di una funzione di una variabile, e la equazione che determina i corrispondenti valori di questa variabile, quella cioè che si forma eguagliando a zero la prima derivata della funzione, è di grado superiore al secondo. Restava quindi a discutere le sue radici, ed esaminare il segno che la derivata del secondo ordine prendeva per ciascuna di esse, affin di discernere i massimi da' minimi; ma gravi ostacoli presentava siffatto esame. È vero, come si vedrà a suo luogo, che alcune considerazioni geometriche attinte dalla stessa natura della quistione, han permesso nel caso presente di soddisfare a quest'oggetto; ma mi era a cuore di conseguirlo per vie dirette. Se non che ogni studio riusciva infruttuoso, finchè ci avvisavamo di tenere le vie ordinarie; e si comprende in fatti che niun prò si trarrebbe dal sostituire nella seconda derivata espressioni com-

plicate da radicali, che si presentano in generale sotto forma immaginaria, ove trattisi di equazioni di 3° e 4° grado; e poi il metodo riesce interamente ozioso per equazioni di gradi superiori. Però dopo attente riflessioni mi fu permesso di sormontare queste difficoltà ricorrendo ad un mezzo semplicissimo, che non esige alcuna sostituzione; e che non solo si presta alla quistione presente, ma può utilmente adottarsi nella maggior parte de' casi; e per lo meno porgerà sempre a tali ricerche significanti agevolazioni.

Intanto siccome la risoluzione del problema in discorso esige che si abbiano presenti alcune proprietà delle coniche descrivibili per quattro punti, così abbiamo creduto più utile di ripartire il lavoro in due distinte memorie, destinando la prima a riassumere le proprietà più cospicue ed interessanti del detto sistema; e rimettendo all'altra la quistione del massimo, o minimo.

Non tutto certamente è nuovo nella prima memoria; ma a quello che può appartenerci abbiamo dovuto aggiungere delle proprietà conosciute, sia perchè essenziali al nostro scopo, e sia perchè non ancora generalmente note.

Le ricerche delle quali ci occupiamo menano a considerare un quadrilatero, di cui son dati i quattro vertici. Or siccome è essenziale di distinguere questa figura da quella che nasce dal considerare quattro rette comunque situate su di un piano, noi, ritenuta per quest'ultima la denominazione ordinaria di *quadrilatero*, adotteremo per la prima il nome di *quadrigono*, già attribuitole, e molto acconciamente da competenti geometri. E come al quadrilatero si aggiunge l'epiteto di *completo*, quando si considerano tutti gl'incontri delle quattro rette a due a due, che sono al numero di sei vertici, così pure il quadrigono dicesi *completo* quando vi si considera il sistema di tutte le sei congiungenti de' quattro punti a due a due, risultandone una figura di quattro vertici opposti, che ne sono tre diagonali; e nel quadrigono son punti assai rimarchevoli le tre intersezioni delle tre coppie di lati opposti.

Sono ormai generalmente conosciute le numerose ed importanti proprietà di cui è dotato il quadrilatero completo; e non meno numerose ed importanti son quelle che si rinvencono nel quadrigono completo, ed aggiungiamo che attualmente le proprietà di queste due figure servon quasi di fondamento alla maggior parte delle ricerche istituite per le vie della

pura Geometria. Quando poi si rifletta che tali figure sono polari reciproche l'una dall'altra, si vedrà non solo la convenienza, ma direm pure la necessità di doverle distinguere con nomi diversi; senza di che si rischia di cadere in confusioni ed equivoci; e per lo meno si sarebbe obbligati di ricorrere a circonlocuzioni di parole sempre a danno della brevità e della chiarezza.

In quanto al quadrigono completo è degno di particolare attenzione il caso in cui ciascuno dei suoi lati è perpendicolare al corrispondente lato opposto; in somma quando le tre coppie di lati opposti comprendono angoli retti. È in questa condizione il quadrigono determinato da' tre vertici di un triangolo qualunque e dal punto d'incontro delle sue tre altezze. Le speciose proprietà di questa figura, che abbiamo creduto di distinguere col nome di *quadrigono ortogonale*, acquistano particolare interesse nella Geometria delle più semplici tra le curve del secondo ordine, vale a dire del cerchio, e della iperbole equilatera; ed è però che ci riserbiamo di occuparcene in altro apposito lavoro.

MEMORIA I.^aSU LE PROPRIETÀ² DELLE CONICHE CIRCOSCRITTIBILI AD UN QUADRIGONO.*Osservazioni preliminari.*

1. Siano A, B, C, D (fig. 1 e 2) quattro punti comunque situati in un piano; congiungendoli a due a due in tutt'i modi risulta la figura di quattro vertici e sei lati cui si dà attualmente il nome di *quadrigono completo*, e dove O, P, Q sono le intersezioni delle tre coppie di lati opposti AD e BC; AB e DC; AC e BD. Siccome in prosieguo occorrerà spesso di far menzione del triangolo OPQ, lo additeremo col nome di *triangolo delle tre intersezioni*.

2. Nel quadrigono per ciò che riguarda la sua forma generica, possono aver luogo due casi ben distinti; o ciascuno dei suoi vertici cade fuori del triangolo determinato da' tre rimanenti; o un solo di essi cade dentro il triangolo determinato dagli altri. Per chiarezza distingueremo questi due casi con le denominazioni rispettive di quadrigono di *prima* e di *seconda specie*; così si ha un quadrigono di prima specie nella fig. 1^a, ed un quadrigono di seconda specie nella fig. 2^a.

3. Per tanto è chiaro che nel quadrigono di prima specie v'ha sempre coppie di lati opposti, i quali formano un quadrilatero ordinario convesso ABCD, avente per diagonali i rimanenti due lati opposti AC, BD, i quali debbono intersecarsi nell'intervallo delle loro lunghezze in un punto Q situato al di dentro del detto quadrilatero, mentre le intersezioni O, P delle altre due coppie avvengono necessariamente al di fuori, e su i prolungamenti di entrambo i lati da cui risulta ciascuna intersezione.

4. Nel quadrigono poi di seconda specie ciascuna delle tre intersezioni R, P, Q si trova sopra un lato del triangolo ABC che chiude la figura, ed accade nell'intervallo di questo lato e sul prolungamento di quello che gli è opposto.

5. In questa seconda specie di quadrigono può avverarsi un caso meritevole di particolare attenzione, ed è quando sono retti gli angoli di due coppie di lati opposti; allora anche retto è l'angolo della terza coppia, dal perchè le tre altezze di un triangolo si segano in un medesimo punto.

Così, per esempio, supponendo tra loro perpendicolari i lati opposti AC, BD , e gli altri DC, AB , anche perpendicolari riuscireanno gli altri due AD, BC . Noi distingueremo questo speciale quadrigono col nome di *quadrigono ortogonale*, nel quale avviene che ciascuno de' quattro vertici è il punto in cui si segano le altezze del triangolo determinato dagli altri tre vertici.

6. Porremo fine a queste osservazioni facendo riflettere che le tre coppie di lati opposti di un quadrigono, prese a due a due, determinano tre quadrilateri completi, e quindi ogni proprietà di questa figura può fornire proprietà del quadrigono. Eccone, come esempio, una, che in prosieguo avremo bisogno di tener presente.

Si sa che nel quadrilatero completo i punti medii delle tre diagonali sono in linea retta; quindi considerando per esempio il quadrilatero completo $QCPBAD$ determinato da' quattro lati del quadrigono AC, DB, AB, DC , saranno AD, BC, PQ le sue tre diagonali; e però se α, β, δ siano i loro punti medii, questi tre punti staranno in linea retta; ma in rapporto al quadrigono le due prime AD, BC sono due lati opposti, e la terza PQ è la congiungente delle intersezioni delle altre due coppie; dunque può dirsi, che:

Nel quadrigono completo i punti medii di due lati opposti sono per dritto col mezzo della congiungente delle due intersezioni delle altre due coppie di lati opposti.

7. In conseguenza di questo teorema, se γ e δ siano i punti medii di AB e DC , e p il punto medio di RQ , anche per dritto staranno i punti γ, δ, p ; e così pure se ϵ, ϕ siano i mezzi di AC e DB , e q quello di RP , i punti ϵ, ϕ, q si troveranno eziandio in linea retta. Intanto è una verità notissima negli elementi che le tre rette $\alpha\beta, \gamma\delta, \epsilon\phi$ si tagliano in un medesimo punto M , ove ciascuna è divisa per metà; quindi, siccome i punti r, p, q sono i medii de' lati del triangolo RPQ , si ha ancora il seguente teorema:

Nel quadrigono completo le tre congiungenti de' punti medii delle tre coppie di lati opposti si tagliano in un medesimo punto, ove restano divise per metà, e passano pe' mezzi de' lati del triangolo delle tre intersezioni.

È opportuno di osservare che il punto medio di qualunque delle tre rette $\alpha\beta, \gamma\delta, \epsilon\phi$ è centro di gravità de' quattro punti A, B, C, D ; e ciò solo basterebbe a provare che queste rette debbono tagliarsi in un medesimo punto M , centro di gravità de' quattro vertici del quadrigono.

8. Aggiungeremo a queste osservazioni che i punti r, p, q , medii dei

lati del triangolo delle tre intersezioni R, P, Q, deggiono tutti cadere fuori del quadrigono quando è di prima specie. Questa circostanza è evidente rispetto al punto q medio dal lato RP, il quale è interamente esteriore alla figura; per dimostrarla poi rispetto agli altri, basterà considerare il quadrilatero completo QCPBAD, e supporre che E ed F siano i punti in cui la diagonale PQ incontra le altre due AB, CD. Per le conosciute proprietà di questa figura la diagonale PQ sarà divisa armonicamente nei punti E, F, e dei tre segmenti PF, FQ, QE il minimo sarà l'intermedio FQ. Or segue da ciò che il punto r medio di PQ cade necessariamente tra i punti P, F, e quindi fuori del quadrigono; ed altrettanto si conchiuderebbe rispetto al punto p considerando l'altro quadrilatero QCRDAB.

EQUAZIONE GENERALE DELLE CONICHE CIRCOSCRITTIBILI AD UN DATO QUADRIGONO.

9. Proponendoci a descrivere una conica pe' quattro punti A, B, C, D, supporremo che la sua equazione sia

$$(1) \quad Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + 1 = 0,$$

e la quistione riducesi a determinare le cinque costanti A, B, C, D, E, a condizione che la curva debba passare pe' quattro punti. Ma avendosi per ciò soltanto quattro equazioni di condizione, sarà lecito di esprimere quattro delle cinque costanti in funzione delle coordinate de' punti dati e della quinta costante, la quale, in generale resterà indeterminata. Or segue da ciò (com'è ben noto) che:

Innumerevoli coniche si possono circoscrivere ad un quadrigono.

10. Intanto, presi per assi due lati opposti, per esempio AD, BC, e quindi per origine la loro intersezione R, porremo $RA = a$, $RD = a'$, $RB = b$, $RC = b'$. Dopo ciò se in (1) si faccia una volta $y = 0$ ed una volta $x = 0$, si avranno le due equazioni di 2° grado in x ed y

$$Cx^2 + 2Ex + 1 = 0, \quad Ay^2 + 2Dy + 1 = 0,$$

aventi per radici l'una i segmenti a , a' , l'altra i segmenti b , b' , e quindi si avranno le quattro relazioni

$$\frac{1}{C} = aa' \quad , \quad \frac{1}{A} = bb'$$

$$\frac{E}{C} = -\frac{a+a'}{2} \quad , \quad \frac{D}{A} = -\frac{b+b'}{2} \quad ,$$

dalle quali possono trarsi i valori delle costanti A, C, D, E; ma prima si osservi che, essendo α e β i punti medii di AD e BC, se pongasi $R\alpha = \alpha$,

$R\beta = \beta$, risulterà $\frac{1}{2}(a+a') = \alpha$, $\frac{1}{2}(b+b') = \beta$; ed allora per le costanti

suddette si avranno i seguenti valori

$$A = \frac{1}{bb'} \quad , \quad C = \frac{1}{aa'} \quad , \quad D = -\frac{\beta}{bb'} \quad , \quad E = -\frac{\alpha}{aa'}$$

Quindi l'equazione (1), facendone sparire i fratti, si trasforma in

$$(A) \quad aa'y^2 + 2Bxy + bb'x^2 - 2aa'\beta y - 2bb'\alpha x + aa'bb' = 0; \quad (*)$$

e quest'equazione contenendo l'arbitraria B varrà ad esprimere qualunque conica iscritta al quadrigono.

TEOREMI DIPENDENTI DALL'EQUAZIONE (A).

11. Il luogo geometrico di quest'equazione sarà *iperbole, ellisse, o parabola* secondo che sia

$$B^2 - aa'bb' > 0 \quad , \quad B^2 - aa'bb' < 0 \quad , \quad B^2 - aa'bb' = 0 \quad .$$

Ora se il quadrigono è di seconda specie, i segni de' due prodotti aa' e bb' sono evidentemente contrarii, e perciò negativa la quantità

(*) Il coefficiente del termine in xy sarebbe, come risulta dal calcolo, $2Baa'bb'$; ma siccome il fattore $aa'bb'$ è costante così può sopprimersi senza errore, e supporlo fuso nell'arbitraria B.

$aa' bb'$. Dunque in questo caso può solo esser verificata la prima condizione; e ne segue che solo iperboli si possono circoscrivere ad un quadrigono di seconda specie. Se poi il quadrigono è di prima specie, i due prodotti $aa' bb'$ essendo di segni simili, la quantità $aa' bb'$ sarà positiva; e quindi in tal caso ciascuna delle tre condizioni potrà esser soddisfatta con valori convenienti di B; però le due prime di una infinità di maniere, e l'ultima in due modi soltanto, cioè co' due valori

$$B = \pm \sqrt{aa' bb'}.$$

Da tutto ciò per tanto risulta il seguente teorema:

Ad un quadrigono di prima specie si possono circoscrivere innumerevoli iperboli, innumerevoli ellissi, e due sole parabole; ma solo iperboli, anche in numero infinito, si possono circoscrivere ad un quadrigono di seconda specie.

12. Quando si attribuisce a B uno de' due valori scritti in ultimo luogo, l'equazione (A) si può mettere sotto la forma

$$(y\sqrt{aa'} \pm x\sqrt{bb'})^2 - 2aa'y - 2bb'x + aa'bb' = 0,$$

e vedesi che i diametri delle due parabole circoscrivibili sono paralleli alle due rette

$$y\sqrt{aa'} \pm x\sqrt{bb'} = 0$$

Per determinare le loro direzioni si possono prendere sugli assi i segmenti RH, RK eguali rispettivamente a $\sqrt{aa'}$ e $\sqrt{bb'}$, vale a dire alle medie proporzionali tra RA, RD, e tra RB, RC; e poi congiungere il punto R col punto X medio di HK; così le direzioni di cui si tratta saranno quelle delle rette HK, RX. Di fatti risulta dalla costruzione che la retta HK ha per equazione

$$y\sqrt{aa'} + x\sqrt{bb'} = \sqrt{aa'bb'},$$

e perciò sarà parallela alla retta

$$y\sqrt{aa'} + x\sqrt{bb'} = 0$$

figurata dalla R menata pel punto R parallelamente ad HK.

Inoltre siccome le coordinate del punto X, medio HK, sono $\frac{1}{2}\sqrt{aa'}$ ed $\frac{1}{2}\sqrt{bb'}$, l'equazione di RX sarà

$$y = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{bb'}}{\frac{1}{2}\sqrt{aa'}}x,$$

ossia

$$y\sqrt{aa'} - x\sqrt{bb'} = 0;$$

e quindi è manifesto che i diametri delle due parabole circoscrittibili al quadrigono riescono paralleli alle due rette HK, RX, ossia alle rette RY, RX.

13. Quando si ha $aa' = bb'$, le equazioni delle due rette RX, RY riduconsi ad

$$y \pm x = 0,$$

ed è manifesto che in tal caso esse sono le bisettrici de' due angoli H'RK, H'RK, vale a dire de' due angoli conseguenti compresi da' lati opposti AD, BC, e sono tra loro perpendicolari. Riflettendo adunque che uniformi conclusioni debbono ottenersi per ciascuna delle altre due coppie di lati opposti; e riflettendo inoltre che la condizione $aa' = bb'$ è verificata se il quadrigono sia iscrivibile nel cerchio, saremo condotti al seguente teorema:

Gli assi delle due parabole descrittibili per quattro punti situati sulla circonferenza di un cerchio sono tra loro perpendicolari; e le loro direzioni sono quelle delle bisettrici de' due angoli conseguenti compresi da due lati opposti qualunque del quadrigono determinato da' quattro punti.

14. Da questo teorema risulta una rimarchevole proprietà del quadrigono iscrivibile nel cerchio; cioè, che:

Le sei bisettrici degli angoli compresi dalle tre coppie di lati opposti di un quadrigono iscrivibile nel cerchio riescono tra loro parallele in due diverse direzioni.

15. Ove fosse $aa' = -bb'$, ipotesi che può solo avverarsi nel quadrigono di seconda specie, l'equazione (A) si riduce ad (*)

$$y^2 + 2Bxy - x^2 - 2^2y + 2\alpha x - aa' = 0.$$

Or se di più i lati opposti AD, BC presi per assi si suppongano ortogonali, questa equazione non potrà costruire altre curve che iperboli equilateri. Intanto siccome la relazione $aa' = -bb'$ annuncia l'eguaglianza de' rettangoli RA RD ed RB RC, e siccome RB è supposta perpendicolare con la intersezione delle tre altezze del triangolo ABD; e perciò nel caso che consideriamo il quadrigono è ortogonale. Quindi risulta, che:

Le innumerevoli sezioni coniche inserittibili ad un quadrigono ortogonale sono tutte iperboli equilateri.

16. Segue da questo teorema che se descrivasi a piacere un'iperbole equilatera per tre vertici di un quadrigono ortogonale, la medesima passerà ancora pel quarto vertice; ma questa proposizione merita di essere direttamente comprovata. Ed a tal'effetto supponiamo descritta un'iperbole equilatera pe' tre vertici A, B, D; allora il lato BC, preso per asse delle y , avendo già con questa curva una intersezione nel punto B, avrà con essa anche un'altra intersezione; e supposto che questo incontro avvenga in C', porremo $RC' = b''$. Ora l'equazione della iperbole dovendo aver la forma

$$y^2 + 2Bxy - x^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0,$$

se si faccia ora $y = 0$, ed ora $x = 0$, si avranno le due equazioni di 2° grado

$$x^2 - 2Ex - F = 0, \quad y^2 + 2Dy + F = 0,$$

aventi a radici l'una i segmenti RA, RD, cioè a, a' ; l'altra i segmenti RB, RC', ossia b, b'' ; e quindi emergono le due relazioni $aa' = -F$, $bb'' = F$, donde l'altra $aa' = -bb''$; ma essendo il quadrigono ortogonale si ha $aa' = -bb'$; adunque risulterà $b' = b''$; vale a dire $OC = OC'$; e ciò prova che il punto C' si confonde col punto C. In conseguenza:

Le innumerevoli iperboli equilateri descrivibili per tre vertici di

(*) V. la nota precedente.

un quadrigono ortogonale passano tutte pel quarto vertice. O, in altri termini:

Le innumerevoli iperboli equilatera descrittibili per tre vertici di un triangolo si tagliano tutte in quarto punto, intersezione delle tre altezze del triangolo.

17. Ma quindi si ha pure la seguente speciosa proprietà della iperbole equilatera:

Inserito a piacere un triangolo in una iperbole equilatera, l'incontro delle sue altezze avverrà su la stessa curva.

18. Tornando all'equazione generale (A) consideriamo due diametri conjugati qualunque della conica da essa costruita, e dinotiamo con n ed n' i loro coefficienti angolari, vale a dire i determinati delle loro direzioni; tra questi coefficienti e quelli de' primi tre termini di (A) sussisterà la relazione (*).

$$aa'nn' + B(n + n') + bb' = 0,$$

la quale può essere verificata indipendentemente dall'arbitraria B , ponendo $n + n' = 0$. Per tanto i valori di n ed n' capaci in tal caso di soddisfare la detta relazione saranno le due radici dell'equazione

$$aa'n^2 - bb' = 0,$$

talchè potremo supporre

$$n = \sqrt{\frac{bb'}{aa'}} \quad , \quad n' = -\sqrt{\frac{bb'}{aa'}}.$$

Or segue da ciò che ciascuna conica circoscritta al quadrigono ammette un sistema di diametri conjugati paralleli a due direzioni fisse determinate da questi valori di n ed n' . Ma pure è mestieri che i due prodotti aa' e bb' siano di segni simili, senza di che quei valori sarebbero immaginari. Ammessa per tanto questa ipotesi, la quale esige che il quadrigono sia di prima specie, le direzioni de' detti diametri saranno quelle stesse delle due parabole circoscrittibili (n°. 12); e quindi risulta, che:

(*) V. i nostri elem. di *Geom. anal.* n. 445 e 476.

Le sezioni coniche circoscrivibili ad un quadrigono di prima specie ammettono un sistema di diametri conjugati paralleli; e le loro direzioni son quelle pe' diametri delle due parabole circoscrivibili al quadrigono medesimo.

19. Segue da questo teorema che se per tre vertici di un quadrigono si descriva una conica, la quale abbia due diametri conjugati paralleli alle due direzioni di cui è parola, la medesima passerà eziandio pel quarto vertice. Difatti supponiamo, per esempio, descritta una conica pe' tre vertici A, B, D; e poichè la medesima già incontra l'asse delle y in un punto B, dovrà tagliarlo ancora in un altro punto C'; allora messo $RC' = b''$, l'equazione della conica avrà la forma

$$aa'y^2 + 2Bxy + bb''x^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0;$$

e tra n , n' determinanti delle direzioni de' due diametri conjugati sussisterà la relazione

$$aa'nn' + B(n + n') + bb'' = 0.$$

Ma, essendo per ipotesi

$$n = \sqrt{\frac{aa'}{bb'}}, \quad n' = -\sqrt{\frac{bb'}{aa'}},$$

si ha $nn' = -\frac{bb'}{aa'}$, ed $n + n' = 0$, così la detta relazione riducesi a $-bb' + bb'' = 0$, e ne conseguita $b' = b''$; vale a dire $RC = RC'$; e ciò dimostra che il punto C' si confonde con C. Quindi possiamo enunciare la seguente proposizione.

Se per tre vertici di un quadrigono si faccia passare una conica che abbia un sistema di diametri conjugati paralleli agli assi delle due parabole circoscrivibili alla figura, quella conica passerà eziandio pel quarto vertice.

20. Siccome gli assi delle due parabole circoscrivibili ad un quadrigono riescono tra loro perpendicolari, quando il quadrigono è iscrivibile

nel cerchio (n°. 13), così è manifesta quest'altra proposizione (conosciuta per la sola prima parte), che:

Gli assi delle curve di 2° ordine descrittibili per quattro punti situati su la circonferenza di un cerchio, son tutti tra loro paralleli in due diverse direzioni; le quali son figurate dalle bisettrici de' due angoli conseguenti compresi da due lati opposti qualunque del quadrigono determinato da' quattro punti.

21. Consideriamo ora un punto qualunque (p, q) nel piano del quadrigono; l'equazione della sua polare rispetto alla conica (A) sarà

$$(Bp + aa'q - aa'\beta)y + (Bq + bb'p - bb'\alpha)x = aa'\beta q + bb'\alpha p - aa'bb';$$

e cade sott'occhio che la medesima è verificata indipendentemente dall'arbitraria B, ponendo tra x ed y la relazione

$$py + qx = 0,$$

la quale dà luogo all'altra

$$aa'(q - \beta)y + bb'(p - \alpha)x = aa'\beta q + bb'\alpha p - aa'bb'.$$

L'incontro delle due rette costruite da queste due equazioni è dunque un punto della polare; ed essendo indipendente da B, risulta il bel teorema, dovuto a Lamé, che:

Le polari di un dato punto relative alle innumerevoli coniche circoscrivibili ad un quadrigono s'intersecano tutte in un altro punto.

22. Ponendo nell'equazione generale della polare $p=0$ e $q=0$, risulta l'equazione

$$aa'\beta y + bb'\alpha x = aa'bb',$$

appartenente alla polare dell'origine R. Per costruirla cercheremo i punti in cui essa incontra gli assi coordinati; e però supposto che questi punti sieno E ed F, facendo nell'equazione una volta $y=0$, ed altra volta $x=0$, avremo

$$x = 0 \text{ E} = \frac{aa'}{\alpha} = 2 \frac{aa'}{a + a'} = 2 \frac{RA}{RA + RD},$$

$$y = 0 \text{ F} = \frac{bb'}{\beta} = 2 \frac{bb'}{b + b'} = 2 \frac{RB}{RB + RC}.$$

Queste espressioni dimostrano che i segmenti RE, RF (fig. 1 e 2) sono rispettivamente medii armonici tra RA, RD, e tra RB, RC. Ma d'altra parte, ponendo mente al quadrilatero completo QCPBAD si scorge che questi medii armonici sono i segmenti delle sue diagonali AD, BC intercettati tra il punto R e la terza diagonale PQ; dunque i punti E, F saranno situati su la retta PQ, la quale sarà in conseguenza la polare del punto R. Da ciò risulta per tanto questa conosciuta proposizione, che:

In ogni quadrigono il triangolo delle tre intersezioni è tale che ciascuno de' suoi vertici è polo del corrispondente lato opposto in riguardo a qualunque conica circoscritta al quadrigono.

23. Eguagliando a zero le due derivate dell'equazione di una conica, prese rispetto ad y ed x , si formano, com'è noto, le equazioni di due diametri di questa curva; e da ciò segue che il centro della conica (A) è definito da' valori di x ed y comuni alle due equazioni

$$Bx + aa'y - aa'\beta = 0,$$

$$By + bb'x - bb'\alpha = 0,$$

formate appunto con la derivazione di (A). Varia questo centro col variar di B; laonde eliminando questa quantità tra le due equazioni, l'equazione risultante in x, y sarà quella del luogo geometrico de' centri di tutte le coniche circoscrivibili al quadrigono. Eseguendo per tanto l'eliminazione di B si ha l'equazione di 2° grado

$$(B) \quad aa'y^2 - bb'x^2 = aa'\beta y - bb'\alpha x;$$

e quindi risulta che:

Il luogo de' centri delle innumerevoli coniche circoscrivibili ad un quadrigono è ancor esso una sezione conica.

Ma questa rimarchevole locale, merita per le applicazioni importanti di cui è suscettibile, di essere studiata e discussa; ed è ciò che or faremo nel modo il più breve, mettendo in veduta le sue affezioni, ed alcune delle sue principali proprietà.

DISCUSSIONE DELL'EQUAZIONE (B), E TEOREMI CHE NE DIPENDONO.

23. Mancando l'equazione (B) del termine in xy , la sua locale avrà un sistema di diametri conjugati paralleli agli assi; che sono due lati opposti del quadrigono; e poichè questa conchiusione è applicabile a ciascuna delle tre coppie di lati opposti, dobbiamo conchiudere, per simmetria; che:

La locale de' centri delle coniche circoscrivibili ad un quadrigono ha tre sistemi di diametri conjugati paralleli alle tre coppie di lati opposti.

25. La mancanza poi del termine indipendente da x ed y dimostra che la curva passa per l'origine R intersezione de' lati opposti presi per assi; e quindi, per simmetria dovrà passare ancora per le altre due intersezioni P, Q. Segue da ciò, che:

La locale de' centri è circoscritta al triangolo delle tre intersezioni.

26. Siccome l'equazione è verificata da sistemi di valori $x=\alpha$, $y=0$ ed $x=0$, $y=\beta$, i quali definiscono i punti α e β medii de' lati opposti AD, BC, ne risulta che la locale passa per questi due punti; e quindi passerà eziandio pe' punti γ , δ , ϵ , e medii degli altri quattro lati. Vale a dire, che:

La locale de' centri passa pe' punti medii di tutt'i sei lati del quadrigono.

Segue da ciò che ognuno de' sei lati ha con la locale due intersezioni reali, cioè nel suo mezzo, e nel punto ov'è incontrato dal corrispondente lato opposto.

27. I prodotti aa' , bb' avendo segni simili o contrarii secondo che il quadrigono è di prima, o di seconda specie, è palese, che:

La locale de' centri è iperbole se il quadrigono è di prima specie; ed è ellisse se il quadrigono è di seconda specie.

28. Questa locale sarà iperbole equilatera ove sia $aa'=bb'$; e sarà cerchio quando si abbia $aa'=-bb'$, e gli assi coordinati siano tra loro perpendicolari. In conseguenza, tenendo presente ciò che si è detto ne' numeri 13 e 15, avremo, che:

La locale de' centri è iperbole equilatera, se il quadrigono sia iscrivibile nel cerchio; ed invece sarà una circonferenza di cerchio, se il quadrigono sia ortogonale.

29. Supposto che l'equazione (B) costituisca un iperbole, i suoi assin-

toti saranno paralleli alle due rette definite dalle equazioni che si formano eguagliando a zero i due fattori del binomio $aa'y^2 - bb'x^2$; vale a dire alle due rette

$$y\sqrt{aa'} \pm x\sqrt{bb'} = 0.$$

Quindi risulta dal n°. 12, che:

Gli assintoti della locale de' centri son paralleli agli assi delle due parabole circoscrivibili al quadrigono; o, ch'è lo stesso, ai diametri conjugati paralleli di tutte le coniche circoscrivibili.

30. Le coordinate del centro della conica (B) essendo espresse da

$$x = \frac{\alpha}{2}, y = \frac{\beta}{2},$$

si ravvisa che questo centro è nel mezzo della retta $\alpha\beta$;

e siccome dee pur trovarsi nel mezzo di ciascuna delle altre due rette $\gamma\delta$, $\varepsilon\zeta$, ne conseguita, com'era già noto (n°. 7) che le tre rette $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $\varepsilon\zeta$ si tagliano in un medesimo punto M, centro di gravità de' quattro punti A, B, C, D. Dunque:

Il centro della locale è il centro di gravità de' quattro vertici del quadrigono.

31. Risulta dal numero precedente che le tre rette $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $\varepsilon\zeta$ sono tre diametri *trasversi* della locale, i quali inoltre passano pe' punti medii dei lati del triangolo OPQ, (n°. 6). Perciò essendo questi lati corde della locale (n°. 25) ne segue, che ciascuno de' detti diametri è conjugato alla direzione di quel lato ch'esso divide in parti eguali. Così

I punti medii di due lati opposti di un quadrigono sono vertici di un diametro trasverso della locale de' centri conjugato alla congiungente delle altre due coppie di lati opposti.

32. Questa proprietà somministra una costruzione semplicissima per le tangenti alla locale ne' punti medii de' lati del quadrigono. Di fatti, essendo il diametro $\alpha\beta$ conjugato alla retta PQ, ne segue che le tangenti nei suoi vertici sono parallele a questa retta. E per le stesse ragioni le tangenti nei punti γ , δ saranno parallele ad RQ; e quelle ne' punti ε , ζ parallele ad RP. In somma:

Le tangenti della locale de' centri ne' punti medii di due lati opposti del quadrigono sono parallele alla congiungente delle intersezioni delle altre due coppie di lati opposti.

33. In un modo egualmente semplice possono costituirsi le tangenti alla locale ne' punti R, P, Q. Di fatti si trova agevolmente, che la tangente nel punto R, origine delle coordinate, ha per equazione

$$aa'\beta y - bb'\alpha x = 0.$$

Per costruirla cercheremo il punto in cui è incontrata dalla retta di equazione

$$aa'\beta y + bb'\alpha x = aa'bb',$$

cioè da PQ; e siccome le coordinate di questo incontro sono espresse da

$$x = \frac{aa'}{2\alpha} = \frac{aa'}{a+a'} = \frac{1}{2}RE, \text{ (n.º 22),}$$

$$y = \frac{bb'}{2\beta} = \frac{bb'}{b+b'} = \frac{1}{2}RF,$$

si fa palese ch'esso ha luogo nel mezzo di EF, segmento di PQ intercettato tra i lati opposti AD, BC. Quindi, divisa la EF per metà in ω , sarà R ω tangente della locale in R; ed in un modo uniforme potranno costruirsi le tangenti in P, Q. Ma questa costruzione può così riepilogarsi.

La tangente della locale nel punto d'incontro di due lati opposti è la retta menata da quel punto al mezzo del segmento intercettato dai medesimi lati su la congiungente delle altre due intersezioni.

34. Quando il quadrigono è di prima specie ha luogo una circostanza degna di osservazione, ed è che: *il triangolo delle tre intersezioni ha i suoi tre vertici sopra una sola delle due iperboli opposte in cui scindesi in questo caso la locale de' centri.* In fatti i lati di questo triangolo essendo tre corde della locale conjugate a tre diametri trasversi; sono ne-

cessariamente *interne* (*), e da ciò segue che quel triangolo è iscritto ad una sola delle due iperboli opposte costituenti la locale: quindi avviene che ne' quadrigoni delle due specie questa locale è sempre e genericamente disposta in riguardo alle loro diverse parti come vedesi nelle figure 3^a e 4^a.

Essendo necessario in prosiegua di far distinzione tra le due iperboli opposte che formano la locale de' centri, quando il quadrigono è di prima specie, così per evitare circollocuzioni converremo di chiamare *locale anteriore* quella che abbraccia il triangolo delle tre intersezioni; e daremo all'altra il nome di *locale posteriore*.

35. Siccome ogni conica circoscritta al quadrigono ha il suo centro su la locale di cui ci occupiamo, viceversa un punto qualunque di questa locale sarà centro di una conica circoscrittibile. Se il quadrigono è di seconda specie la conica di cui trattasi è sempre iperbole (n°. 11); ma per quelli di prima specie resta a vedersi se al punto dato su la locale come centro corrisponda una iperbole, o una ellisse. Ora ecco il criterio semplicissimo che risolve questo dubbio.

Se il punto dato per centro appartiene alla locale ANTERIORE la conica circoscrittibile sarà iperbole; ed invece sarà ellisse se quel punto appartiene alla locale POSTERIORE.

Per dimostrarlo conviene richiamarsi all'equazione (A), e messo per brevità

$$M = B^2 - aa' bb'$$

possiamo affermare che la conica circoscrittibile definita dall'equazione (A) sarà iperbole, o ellisse secondochè è positiva, o negativa la quantità M. Ora chiamando x, y le coordinate del centro della conica (A), si ha

(*) Nella iperbole si distinguono due specie di corde: le *esterne*, e le *interne*. Dicesi corda esterna quella che unisce due punti appartenenti alle due iperboli opposte; e dicesi interna se i due punti appartengano entrambo ad una di esse. Si sa che qualunque retta parallela ad una corda esterna ha con la curva due intersezioni sempre reali.

$$x = aa' \frac{B\beta - bb'\alpha}{B^2 - aa'bb'} \quad , \quad y = bb' \frac{B\alpha - aa'\beta}{B^2 - aa'bb'} ;$$

dividendo queste espressioni l'una per l'altra se ne ricava

$$B = aa'bb' \frac{\alpha y - \beta x}{aa'\beta y - bb'\alpha x} ;$$

ed in virtù di questo valore di B risulta

$$M = aa'bb' \frac{(bb'\alpha^2 - aa'\beta^2)(aa'y^2 - bb'x^2)}{(aa'\beta y - bb'\alpha x)^2} ;$$

e siccome per l'equazione (B) si ha

$$aa'y^2 - bb'x^2 = aa'\beta y - bb'\alpha x ,$$

così sarà invece

$$M = aa'bb' \frac{bb'\alpha^2 - aa'\beta^2}{aa'\beta y - bb'\alpha x} .$$

Intanto, poichè il quadrigono è per ipotesi di prima specie, il fattore $aa'bb'$ sarà quantità positiva; e da ciò segue che la conica circoscritibile avente per centro il punto (x, y) è iperbole o ellisse a misura ch'è positiva o negativa la frazione

$$\frac{bb'\alpha^2 - aa'\beta^2}{aa'\beta y - bb'\alpha x} .$$

Per decidere di questo segno è uopo rammentare, che l'equazione

$$aa'\beta y - bb'\alpha x = 0$$

è quella della retta $R\omega$, tangente della locale nel punto R (n°. 33). Ora se in questa equazione si pongano in luogo di x, y le coordinate di qualunque altro punto non appartenente alla retta $R\omega$, allora il primo membro non più sarà *zero*; ma ne risulta una quantità la quale è positiva se il punto in quistione è situato al di sopra della retta, ed è per l'opposto negativa se quel punto cada al di sotto. Or siccome tutt' i punti della locale *anteriore* $P\beta\delta R$ sono superiori alla retta $R\omega$, che la tocca in R , e quelli della locale *posteriore* $\gamma\epsilon x$ le sono inferiori, ne segue che la quantità

$$aa'\beta y - bb'\alpha x$$

riesce positiva per qualunque punto della locale *anteriore*; ed è negativa per ogni punto della locale *posteriore*.

Ciò premesso essendo $\frac{\alpha}{2}$ e $\frac{\beta}{2}$ le coordinate del centro della locale, il suo diametro corrisponde all'equazione $y = \frac{\beta}{\alpha} x$; e quindi vedesi che il punto (α, β) è l'altro vertice dello stesso diametro opposto all'origine R . Perciò questo punto appartiene alla locale *posteriore*, e ne segue che la quantità $aa'\beta y - bb'\alpha x$ riesce negativa quando in luogo di x ed y vi si pongano α e β ; ma per tali sostituzioni essa diviene $aa'\beta^2 - bb'\alpha^2$; dunque questa quantità è negativa; e quindi sarà positiva la quantità

$$bb'\alpha^2 - aa'\beta^2.$$

Dopo ciò è palese che la frazione

$$\frac{bb'\alpha^2 - aa'\beta^2}{aa'\beta y - bb'\alpha x}$$

è positiva o negativa, secondo che il punto (x, y) è situato su la locale *anteriore*, o su la locale *posteriore*; e ne risulta, come volevamo dimostrare, che nel primo caso la conica circoscrittibile è iperbole; ed è ellisse nel secondo caso.

36. Data l'equazione di 2° grado

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0,$$

il genere della conica corrispondente è definito dal segno della quantità $B^2 - AC$; ma questo carattere non basta per decidere se si tratti in realtà di una curva, o di un sistema di rette; essendo ancora mestieri di assicurarsi, che i fattori del primo membro sono funzioni irrazionali di x , senza di che l'equazione esprimerebbe, in generale, il sistema di due rette. Ora il carattere da cui dipende l'irrazionalità de' due fattori è, com'è noto (*), che la quantità

$$AE^2 + CD^2 + FB^2 - ACF - 2BDE$$

sia diversa da *zero*; che, se dessa sia *nulla*, i due fattori saranno invece funzioni razionali di x . Dinotata per tanto questa quantità con N , e dette x, y le coordinate del centro, la medesima si trasforma agevolmente in (**)

$$N = (B^2 - AC)(Dy + Ex + F),$$

(*) V. i nostri elem. di geom. anal. n°. 456.

(**) Difatti basta porre la quantità N sotto la forma

$$D(CD - BE) + E(AE - BD) + F(B^2 - AC),$$

e quindi sotto l'altra

$$(B^2 - AC) \left\{ D \frac{CD - BE}{B^2 - AC} + E \frac{AE - BD}{B^2 - AC} + F \right\},$$

ed osservare che si ha

$$x = \frac{AE - BD}{B^2 - AC}, \quad y = \frac{CD - BE}{B^2 - AC}.$$

e quindi possiamo affermare che l'equazione proposta avrà per luogo geometrico un sistema di due rette, quando (supposte $B^2 - AC$ quantità positiva), le coordinate del centro x ed y verifichino la relazione

$$Dy + Ex + F = 0.$$

Applicando queste conclusioni all'equazione (A) risulta, che il suo luogo geometrico si risolve in due rette ove sia

$$-aa'\beta y - bb'\alpha x + aa'bb' = 0, \quad \text{ovvero} \quad aa'\beta y + bb'\alpha x - aa'bb' = 0,$$

vale a dire, se il suo centro (x, y) si trovi su la retta PQ; e siccome questa retta incontra la locale di tutt'i centri ne' punti P, Q, ne segue che se prendasi per centro di una conica circoscrittibile l'uno o l'altro di questi punti, la conica si ridurrà a due rette le quali non sono altra cosa che i due lati opposti del quadrigono da cui risulta, sia l'uno, sia l'altro de' detti punti. Estendendo per tanto questo risultamento anche al punto, che si trova nelle medesime condizioni de' punti P, Q, possiamo conchiudere, che:

La conica circoscrittibile ad un quadrigono si risolve in due rette, e propriamente in due lati opposti, se prendasi per centro l'incontro de' lati medesimi.

37. Supponendo che la conica costruita dall'equazione (A) sia iperbole, si dinotino con n ed n' i determinanti delle direzioni de' suoi assintoti; i valori di questi determinanti saranno le due radici dell'equazione (*)

$$aa'n^2 + 2Bn + bb' = 0,$$

e quindi sussisteranno le due relazioni

$$n + n' = -\frac{2B}{aa'}, \quad nn' = \frac{bb'}{aa'},$$

(*) V. i nostri Elem. di Geom. anal. n.° 481, e 482.

l'ultima delle quali dimostra che n ed n' son pure i determinanti delle direzioni di due diametri conjugati della conica (B), cioè della locale de' centri (*). Segue da ciò, che:

Gli assintoti di ciascuna iperbole circoscritta al quadrigono son paralleli ad un sistema di diametri conjugati della locale de' centri.

38. Daremo termine a queste ricerche ponendo in veduta un'altra rimarchevole proprietà delle coniche circoscrivibili e della locale de' centri. Immaginiamo nel piano del quadrigono una retta qualunque, e sia n il determinante della sua direzione; il diametro della conica (A) conjugato a tal direzione avrà per equazione (**)

$$(Bx + aa'y - aa'\beta)n + (By + bb'x - bb'\alpha) = 0,$$

e si vede ch'esso passa pel punto in cui s'incontrano le due rette

$$y + nx = 0, \quad aa'n(y - \beta) + bb'(x - \alpha) = 0:$$

punto il quale è indipendente dall'arbitraria B. Segue da ciò che per un dato valore di n questo punto è sempre lo stesso per ogni conica circoscritta al quadrigono. Un tal punto cangia di sito al cangiar di n , vale a dire a misura che varia la direzione della retta; e perciò eliminando n , tra le due equazioni che lo costruiscono, l'equazione risultante in x, y sarà quella del luogo geometrico dei punti corrispondenti a tutte le possibili direzioni. L'eliminazione di n conduce per tanto all'equazione

$$aa'y^2 - bb'x^2 = aa'\beta y - bb'\alpha x,$$

vale a dire alla stessa equazione (B); e ne risulta che il luogo di cui attualmente è parola non è altra cosa che la stessa locale de' centri. Riassumendo le conclusioni che precedono possiamo enunciare il seguente teorema.

(*) Vedi l'opera citata n°. 445.

(**) Idem n° 476.

I diametri delle innumerevoli coniche circoscrivibili ad un quadrigono conjugati ad una data direzione, s'intersecano tutti in un medesimo punto.

Questo punto cangia di sito al cangiare della data direzione, ma è sempre situato su la locale de' centri delle coniche circoscrivibili al quadrigono.

38. Potendo esser utile di aver riunite sotto l'occhio le diverse proprietà della locale dei centri, che abbiamo messe in veduta, riassumeremo in breve i risultamenti della precedente discussione.

I.° Il luogo de' centri di tutte le coniche circoscrivibili ad un quadrigono è un'altra conica (C).

II.° Ed i diametri di quelle coniche conjugati ad una medesima direzione si tagliano in un sol punto situato su di (C).

III.° La locale (C) incontra in nove punti i sei lati del quadrigono, cioè nel mezzo di ciascun lato, e nelle intersezioni delle tre coppie di lati opposti.

IV.° Essa inoltre è iperbole se il quadrigono è di prima specie; ed i suoi assintoti son paralleli agli assi delle due parabole circoscrivibili, ovvero ai diametri conjugati paralleli di tutte le coniche che si possono descrivere pe' quattro vertici. — In questo caso il triangolo delle tre intersezioni è iscritto ad una sola delle due iperboli opposte in cui scindesi la locale; ed è dessa esclusivamente che contiene i centri delle coniche iperboliche circoscrivibili al quadrigono; mentre l'iperbole opposta contiene esclusivamente i centri delle coniche ellittiche.

V.° Quando il quadrigono è di seconda specie la locale (C) è ellisse; ed allora le coniche circoscrivibili son tutte iperboli.

VI.° Se il quadrigono è iscrivibile nel cerchio la locale (C) è iperbole equilatera; ed è invece un cerchio se il quadrigono è ortogonale.

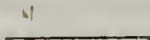
VII.° Il centro della locale (C) è il centro di gravità de' quattro vertici del quadrigono.

VIII.° I diametri di tutte le coniche circoscrivibili, conjugati ad una medesima direzione, si tagliano in un sol punto, il quale cangia

di sito a misura che varia la data direzione; ma il suo luogo geometrico è la stessa conica (C).

IX.° La tangente di (C) nello incontro di due lati opposti è la retta menata al mezzo del segmento intercettato da que' lati su la congiungente delle altre due intersezioni.

X.° E finalmente le tangenti ne' punti medii di due lati opposti sono le parallele guidate da que' punti alla congiungente delle intersezioni delle rimanenti due coppie di lati opposti.



MEMORIA II.^a

RISGUARDANTE LA CONICA DI AREA MINIMA DESCRITTIBILE PER QUATTRO PUNTI.

PRIMA SOLUZIONE.

1°. La quistione alla quale accenna il titolo della presente memoria dovendo essere soddisfatta da una curva chiusa riducesi a determinare la ellisse di area massima o minima tra quelle che passano per quattro punti. Quindi è mestieri che la situazione de' quattro punti sia tale che ciascuno cada fuori del triangolo determinato da' tre rimanenti; o, in breve, il quadrigono che ha per vertici que' punti dev' essere di prima specie; (I^a n°. 11) ed intanto il centro o i centri delle ellissi capaci di risolvere il problema potranno soltanto appartenere alla locale posteriore (I^a n° 35).

2°. Data l'equazione.

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0,$$

se pongasi per brevità

$$N = AE^2 + CD^2 + FB^2 - ACF - 2BDE,$$

il prodotto de' quadrati de' semiassi della conica costruita da quell'equazione sarà, com'è noto, espresso da

$$\frac{-\operatorname{sen}^2 \theta \cdot N^2}{(B^2 - AC)^3},$$

dinotando θ l'angolo degli assi; e perciò se s'indichi con S la superficie della conica, si avrà

$$S^2 = \frac{-\pi^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cdot N^2}{(B^2 - AC)^3}.$$

Ma dette x, y le coordinate del centro della conica, siccome si ha (I^a n° 36).

$$N = (B^2 - AC)(Dy + Ex + F),$$

così sarà invece

$$S^2 = -\pi^2 \sin^2 \theta \frac{(Dy + Ex + F)^2}{B^2 - AC}.$$

3°. Ciò premesso siano A, B, C, D i quattro punti dati, da' quali supporremo formato il quadrigono, e siano R, P, Q le intersezioni delle tre coppie di lati opposti qualunque, per esempio i due AD, BC concorrenti in R, e dinotate con α e β i segmenti $R\alpha, R\beta$, distanze dall'origine ai punti medii dei lati medesimi; con a ed a' le RA, RD; e con b, b' le RB, RC, la equazione generale delle coniche circoscrivibili al quadrigono sarà (I^a numero 10)

$$(A) \quad aa'y^2 + 2Bxy + bb'x^2 - 2aa'\beta y - 2bb'\alpha x + aa'bb' = 0,$$

dove B dinota una costante arbitraria. Supposto ora che x ed y siano le coordinate del centro della conica (A) potremo calcolarne l'area mercè l'ultima formola del numero precedente; e siccome si ha

$$Dy + Ex + F = -(aa'\beta y + bb'\alpha x - aa'bb'),$$

ed è inoltre (I^a. n°. 35)

$$B^2 - AC = aa'bb' \frac{bb'\alpha^2 - aa'\beta^2}{aa'\beta y - bb'\alpha x}$$

così risulterà

$$S^2 = \frac{\pi^2 \sin^2 \theta}{aa'bb'(bb'\alpha^2 - aa'\beta^2)} (aa'\beta y + bb'\alpha x - aa'bb')^2 (bb'\alpha x - aa'\beta y).$$

Ma, messo per brevità

$$u = (aa'\beta y + bb'\alpha x - aa'bb')^2 (bb'\alpha x - aa'\beta y),$$

sarà più semplicemente

$$S^2 = \frac{\pi^2 \sin^2 \theta}{aa'bb'(bb'\alpha^2 - aa'\beta^2)} u;$$

e poichè il coefficiente frazionario del 2° membro è quantità costante, si scorge che la quistione riducesi a determinare i valori di x ed y capaci di render massima, e minima la funzione u ; ben vero le due variabili x, y non sono già tra loro indipendenti; ma l'una è funzione dell'altra in virtù dell'equazione

$$(B) \quad aa'y^2 - bb'x^2 = aa'\beta y - bb'\alpha x,$$

che esprime la locale de' centri di tutte le coniche circoscrivibili al quadrigono (1ª n.º 23).

4°. Procedendo ora alla ricerca del massimo o minimo porremo per brevità

$$\varphi = aa'\beta y + bb'\alpha x - aa'bb',$$

$$\psi = bb'\alpha x - aa'\beta y,$$

ed avremo

$$u = \varphi^2 \cdot \psi.$$

Derivando rispetto ad x ed y , con riguardare la y funzione di x , che terremo indipendente, sarà

$$\frac{du}{dx} = \varphi \left\{ 2\psi \left(\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{dy}{dx} \right) + \psi \left(\frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi}{dy} \frac{dy}{dx} \right) \right\};$$

e per la condizione del massimo o minimo sussisterà l'equazione

$$\frac{du}{dx} = 0,$$

la quale può essere soddisfatta in due modi :

1°. ponendo $\varphi = 0$; vale a dire

$$(C) \quad aa'\beta y + bb'\alpha x - aa'bb' = 0 .$$

2°. ponendo

$$(D) \quad 2\psi \left(\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{dy}{dx} \right) + \varphi \left(\frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi}{dy} \frac{dy}{dx} \right) = 0 .$$

Esaminando la prima ipotesi cade sotto l'occhio che per essa è nulla la espressione generale della superficie S della conica, e quindi non può che corrispondere a casi particolari del problema. Ma di fatti i valori di x ed y che la medesima fornisce alla quistione, essendo quelli comuni alle equazioni (B), (C), esprimeranno le coordinate de' punti in cui s'incontrano i loro luoghi geometrici, che sono la locale de' centri, e la retta PQ (1° n°. 22); e da ciò segue che l'ipotesi $\varphi = 0$ dà per centri di coniche di area massima o minima circoscrivibili al quadrigono i punti P , Q ; ma già sappiamo che le coniche corrispondenti a questi centri si risolvono ciascuna in due rette (1°. n°. 36).

Importa ancora di osservare che i punti P , Q non potrebbero risolvere il problema, perchè ciascuno di essi si trova nelle medesime condizioni del punto R , che si è preso per origine delle coordinate, e dalla penultima espressione di S^2 scritta nel n°. 3 si rileva subito, che è nulla l'area della conica circoscrivibile che avesse per centro il punto R ; e quindi anche nulla sarà l'area della conica che avesse per centro o il punto P , o il punto Q .

Passeremo quindi ad esaminare la seconda ipotesi; e siccome si ha

$$\frac{d\varphi}{dx} = bb'\alpha \quad , \quad \frac{d\varphi}{dy} = aa'\beta \quad , \quad \frac{d\psi}{dx} = bb'\alpha \quad , \quad \frac{d\psi}{dy} = -aa'\beta \quad ,$$

così mediante questi valori l'equazione (D) dopo facili trasformazioni, e dopo le riduzioni nascenti da (B) diverrà

$$(E) \quad xy + \frac{1 - (\beta^2 - bb')aa'\alpha}{3bb'\alpha^2 - aa'\beta^2} y - \frac{1}{3} \frac{(\alpha^2 - aa')bb'\beta}{bb'\alpha^2 - aa'\beta^2} x = 0 .$$

Perciò i valori di x ed y forniti al problema dalla seconda ipotesi saranno quelli che possono verificare ad un tempo le due equazioni (B) ed (E); e ne risulta che il centro, o i centri delle coniche di area massima o minima circoscrivibili al quadrigono sono i punti in cui la locale de' centri può essere incontrata dal luogo geometrico dell'equazione (E), il quale è una iperbole che, al pari di (B), passa per l'origine R, e i di cui assintoti son paralleli agli assi coordinati RDA x , RCB y . Faremo intanto osservare che i coefficienti de' termini in x ed y a primo grado dell'equazione (E), a prescindere dal moltiplicatore $\frac{1}{3}$, sono i valori di x ed y comuni alle equazioni

$$aa'\beta y + bb'\alpha x = aa'bb',$$

$$\alpha y + \beta x = \alpha\beta,$$

esprimenti le rette P Q ed $\alpha\beta$; mentre, dinotati questi valori con m ed n , si ha

$$m = -\frac{(\beta^2 - bb')aa'\alpha}{bb'\alpha^2 - aa'\beta^2}, \quad n = \frac{(\alpha^2 - aa')bb'\beta}{bb'\alpha^2 - aa'\beta^2}.$$

Quindi si scorge, che m ed n sono le coordinate del punto in cui s'incontrano le due rette P Q ed $\alpha\beta$, e perciò dal punto P medio di P Q (I^a. n^o. 6); ed intanto l'equazione (E) riducesi ad

$$(E) \quad xy = \frac{1}{3}my + \frac{1}{3}nx,$$

ed è manifesto, che il centro della iperbole, ch'è il suo luogo geometrico, ha per coordinate $\frac{1}{3}m$ ed $\frac{1}{3}n$; in guisa che presa nella Rr, a contare da R, la RV terza parte della stessa Rr sarà questo centro il punto V. Se la Vr si divida per metà nel punto G, sarà G il centro di gravità del triangolo delle tre intersezioni RPQ, e 'l punto V cadrà nel mezzo di RG. Segue da ciò che l'iperbole (E) passa ancora pel punto G, e la retta RG ne sarà un diametro trasverso. Dopo queste osservazioni è palese che il problema proposto si può risolvere nel seguente modo.

COMPOSIZIONE DEL PROBLEMA.

Pel punto V medio di RG , (*fig. 3*) distanza del concorso de' lati opposti AD , BC dal centro di gravità del triangolo delle tre intersezioni, si menino ai medesimi lati le parallele $A'VD'$, $B'VC'$. Indi si descrivano le iperboli opposte aRe , bGd , le quali, passando pe' punti R , G , abbiano per assintoti le dette parallele.

Queste iperboli, che già incontrano la locale de' centri nel punto R , avranno con essa altre tre intersezioni, come T , T' , T'' , ciascuna delle quali potrà esser centro di una conica di area massima o minima circoscrivibile al quadrigono.

5°. Se invece de' lati opposti AD , BC si prendessero per assi altri due lati opposti, per esempio AB , DC , allora si troverebbe uniformemente che l'iperbole, la quale risolve il problema, ha gli assintoti paralleli a questi lati, il centro nel mezzo di PG , e che questa retta si è un diametro trasverso. E se per assi si prendessero gli altri lati opposti AC , DB , l'iperbole avrebbe egualmente gli assintoti paralleli a questi lati, ed il centro nel mezzo della retta QG , che ne sarebbe un diametro trasverso.

Ciascuna delle tre iperboli che possono servire alla composizione del problema segnerà per tanto la locale de' centri ne' medesimi tre punti T , T' , T'' ; e da ciò risulta la seguente proposizione.

Dato un quadrigono completo, si descrivano tre iperboli ognuna delle quali abbia per diametro trasverso la congiungente del centro di gravità del triangolo delle tre intersezioni con uno de' suoi vertici, e gli assintoti paralleli ai due lati opposti del quadrigono concorrenti nel vertice medesimo. — Queste tre iperboli si taglieranno negli stessi quattro punti, cioè nel centro di gravità del detto triangolo, ed in tre altri punti, ognun de' quali sarà centro di una conica di area massima o minima circoscrivibile al quadrigono.

DISCUSSIONE DE' MASSIMI E DE' MINIMI.

6°. È duopo osservare innanzi tutto che le tre intersezioni T , T' , T'' della locale de' centri con la iperbole (E) sono sempre reali. Per convincersene si rifletta in primo luogo che il punto r medio di PQ cade fuori del quadrigono; e perciò fuori di questa figura cadrà pure la retta Rr , e con essa i punti V , G , e conseguentemente anche la retta $B'VC'$ ch'è parallela a BC . Or siccome i punti R , G cadono dentro gli angoli $A'VC'$, $B'VD'$, e la retta RG è, per costruzione, un diametro trasverso della iperbole (E), ne risulta, che le due iperboli opposte aRc , bGd , cadranno rispettivamente dentro de' detti due angoli $A'VC'$, $B'VD'$. Intanto, se consideriamo l'arco finito della locale anteriore $Q\beta P$, sotteso dalla corda QP , vedremo ch'esso dev'essere necessariamente attraversato dalle rette VG , VB' in due punti r' , b' , situati fuori del quadrigono e dentro il triangolo PBC ; e perciò l'iperbole bGd avendo un ramo che scorre nell'angolo $r'Vb'$, parallelamente a Vb' , dovrà anch'essa attraversare l'arco $Q\beta P$ in un certo punto T' , situato tra i punti σ' , b' . Così tra l'iperbole (E) e la locale de' centri ha luogo una intersezione reale in un punto T' , situato fuori del quadrigono sull'arco della locale anteriore $Q\beta P$.

Se invece delle iperboli (E) si supponga descritta quella che ha per diametro trasverso la retta PG , e gli assintoti paralleli ai lati opposti AB , DC , si scovirebbe nella stessa guisa tra essa e la locale de' centri un'altra intersezione T situata tra i limiti dell'arco della locale anteriore $Q\beta R$; ma fuori del quadrigono, e propriamente dentro il triangolo RDC .

Finalmente, siccome il lato AD del quadrigono ha con la locale dei centri due intersezioni reali R , α (I^a, 26) appartenenti una alla locale *anteriore*, l'altra alla *posteriore*, anche l'iperbole aRc , che scorre tra le parallele AD ed $A'D'$, avrà con la stessa locale dei centri almeno due intersezioni reali, appartenenti una alla locale *anteriore* (e questa già sussiste per costruzione nel punto R), e l'altra alla locale *posteriore*, come T'' .

Risulta da queste osservazioni che i tre punti T , T' , T'' capaci di risolvere il problema, sono sempre reali, e son situati i primi due sulla locale *anteriore* nei limiti dei due archi $Q\beta R$, $Q\beta P$, ma fuori del quadrigono, e dentro i triangoli RDC , PBC ; mentre l'ultimo solo appartiene alla locale

posteriore. Possiamo inoltre aggiungere che questo punto T'' dee cadere dentro del quadrigono, vale a dire tra i limiti dell'arco $\alpha\epsilon\gamma$. Ségue in fatti dalla costruzione della iperbole aRc ; che la sua intersezione T'' con la locale *posteriore* non potrebbe accadere sull'arco esteriore $\alpha\alpha'$, computato dal punto α ; e qualora per risolvere il problema si descrivesse l'iperbole che avendo per diametro trasverso la retta PG, avesse gli assintoti paralleli ai lati opposti del quadrigono, AB e DC, si vedrebbe con egual chiarezza che il punto T'' non può neppure trovarsi su l'arco indefinito $\gamma\gamma'$, contato dal punto γ ; e quindi risulta ch'esso dee necessariamente cadere tra i limiti dell'arco interiore $\alpha\epsilon\gamma$.

Ma quantunque i tre punti T, T', T'' capaci di risolvere il problema sieno sempre reali, pure l'ultimo T'', che si trova su la locale *posteriore*, è il solo che soddisfa alla quistione; e da ciò segue che una sola ellisse di area massima o minima si può circoscrivere al dato quadrigono. Resta intanto a vedere se si tratti di *massimo*, o di *minimo*. Si osservi a tal'uopo che la locale *posteriore* alla quale appartiene il punto T'', ha due punti all'infinito, i quali sono da riguardarsi come i centri delle due parabole circoscrivibili al quadrigono; vale a dire come i centri di due ellissi, i di cui assi sono infiniti, e le di cui arce in conseguenza sono esse stesse di grandezza infinita. Allora, se supponiamo che questa locale sia descritta da un punto il quale parta dall'infinito, e ciascuna delle sue posizioni sia presa come centro di una conica circoscrivibile, siccome nelle posizioni estreme si hanno due ellissi di area infinita, è chiaro che l'area di questa conica, in generale, andrà diminuendo a misura che il punto descrivente si allontana dalla posizione iniziale; ma questa diminuzione avrà un limite, e dovrà cangiarsi in aumento, perchè quell'area dee un'altra volta diventare infinita. Trattandosi adunque di una grandezza che varia per due versi in modo continuo, e i di cui valori estremi essendo infiniti, gl'intermedi sono costantemente di grandezza finita, bisogna conchiudere che tra questi vi sia per lo meno un minimo. E siccome nel caso attuale esiste un punto solo capace di corrispondere ad un massimo o minimo del problema, cioè il punto T'', così risulta che l'ellisse, la quale, avendo questo punto per centro, è circoscritta al quadrigono, è necessariamente di superficie minima.

7°. Gli altri due punti T, T' che la costruzione somministra su la lo-

cale anteriore, essendo centri di iperboli, non soddisfano certamente alla quistione nel senso che le abbiamo finora attribuito; ma tuttavia quei punti risolvono ancor essi il problema guardato sotto altro aspetto. Si comprende in fatti che il problema da noi risoluto equivale all'altro di determinare tra le coniche circoscrivibili quella per la quale il prodotto dei quadrati degli assi di figura, o, ch'è lo stesso, il semplice prodotto di questi assi, sia un massimo, o un minimo; ed allora è chiaro che la quistione può esser soddisfatta non solo da ellissi, ma anche da iperboli, le quali adunque sono al numero di due, e son quelle precisamente che hanno per centri i punti T e T' . Egli è poi manifesto che questi punti debbono dar luogo a massimi assoluti; perchè, essendo nulla l'area della conica che ha per centro o il punto P , o il punto Q , ragiouando come in sul finire del numero precedente si riconoscerà subito che tra P e Q , deve esistere un punto che dà luogo ad un massimo; ed un altro in conseguenza dovrà esserne tra Q ed R .

SECONDA SOLUZIONE (*fig. 1.*)

8°. Si è veduto che le coniche circoscrivibili ad un quadrigono di prima specie ammettono un sistema di diametri conjugati paralleli, e si è mostrato come debba assegnarsi la loro direzione. Se dunque si prendano per assi le rette RX, RY parallele a queste direzioni, l'equazione generale delle coniche circoscrivibili mancherà del termine in xy ed avrà la forma

$$(A) \quad Ay^2 + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + 1 = 0,$$

con quattro costanti A, C, D, E da determinarsi a condizione che la curva da essa costruita debba passare pe' quattro vertici del quadrigono; ma siccome una conica qualunque descritta per tre de' suoi vertici, con un sistema di diametri conjugati paralleli agli assi adottati, passa ancora pel quarto vertice (*memoria* 1^a, n°. 19) ne conchiuderemo che una delle quattro costanti deve necessariamente restare indeterminata.

Ricordando la costruzione da noi data per assegnare le direzioni dei diametri conjugati paralleli (*memoria* 1^a, n°. 12) si comprenderà che le equazioni delle due rette RB, RA hanno la forma

$$y = kx, \quad y = -kx;$$

e però, eliminando y tra ciascuna di queste equazioni e la (1), le due coppie di radici delle risultanti equazioni

$$(Ak^2 + C)x^2 + 2(Dk + E)x + 1 = 0$$

$$(Ak^2 + C)x^2 + 2(-Dk + E)x + 1 = 0$$

esprimeranno ordinatamente le ascisse dei punti B, C, e quelle de' punti A, D. In conseguenza se le rispettive coordinate di questi punti si dinotino con

p, q per B ; p', q' per C ,

p'', q'' per A ; p''', q''' per D ,

avremo le tre relazioni

$$\frac{p+p'}{2} = -\frac{Dk+D}{Ak^2+C} \quad , \quad \frac{p''+p'''}{2} = -\frac{-Dk+E}{Ak^2+C}$$

$$pp' = p''p''' = \frac{1}{Ak^2+C} .$$

Ma chiamando α, b le coordinate del punto β medio di BC , ed α', b' quelle del punto α medio di AD , allora, siccome si ha

$$\frac{p+p'}{2} = \alpha \quad , \quad \frac{p''+p'''}{2} = \alpha' ,$$

le due prime relazioni diverranno

$$\alpha = -\frac{Dk+E}{Ak^2+C} \quad , \quad \alpha' = -\frac{-Dk+E}{Ak^2+C} ;$$

e dividendo ciascuna di queste per la terza, risulteranno le altre due

$$\alpha = -pp'(Dk+E) \quad , \quad \alpha' = -pp'(-Dk+E) ,$$

donde per addizione e sottrazione ricavasi

$$\frac{\alpha+\alpha'}{2} = -Epp' \quad , \quad \frac{\alpha-\alpha'}{2} = -Dkpp' .$$

Intanto dinotiamo ancora con α e β le coordinate del punto M medio della retta $\alpha\beta$; sarà.

$$\alpha = \frac{a + a'}{2} \quad , \quad \beta = \frac{b + b'}{2} ;$$

ma trovandosi i punti (a, b) ed (a', b') su le rette $y = kx$, ed $y = -kx$ rispettivamente, si ha $b = ka$, e $b' = -ka'$, ed è quindi

$$\frac{b + b'}{2} = \frac{a - a'}{2} k = \beta ;$$

adunque risulterà

$$\alpha = -E p p' \quad , \quad \beta = -D k^2 p p' .$$

Di più, siccome i punti (p, q) e (p', q') si trovano su la retta $y = kx$, sarà $q = kp$, $q' = kp'$; quindi $q q' = k^2 p p'$; e perciò si avrà in fine

$$\alpha = -E p p' \quad , \quad \beta = -D q q' .$$

Così per le due costanti E, D si hanno le due semplicissime espressioni

$$E = -\frac{\alpha}{p p'} \quad , \quad D = -\frac{\beta}{q q'} .$$

in virtù delle quali l'equazione generale delle coniche circoscrittibili al quadrigono diviene

$$(B) \quad A y^2 + C x^2 - \frac{2\beta}{q q'} y - \frac{2\alpha}{p p'} x + 1 = 0 ,$$

dovendo però tra A e C sussistere la relazione

$$p p' = \frac{1}{A k^2 + C} ,$$

la quale libera da' fratti, e rimpiazzandovi $k^2 p p'$ per $q q'$, si cangia in

$$A q q' + C p p' = 1 .$$

Or siano x, y le coordinate del centro della conica costruita dall'equazione (B); sarà

$$x = \frac{\alpha}{C p p'}, \quad y = \frac{\beta}{A q q'},$$

quindi

$$C = \frac{\alpha}{p p' x}, \quad A = \frac{\beta}{q q' y};$$

e così l'ultima relazione si trasforma in

$$(C) \quad xy = \alpha y + \beta x.$$

Per tanto è chiaro che questa equazione è quella del luogo dei centri di tutte le coniche circoscrivibili al quadrigono: luogo già da noi studiato nella prima memoria, e nel quale si ravvisa, com'esser doveva, un'iperbole, perchè il quadrigono è di prima specie, avente per centro il punto α, β , cioè il punto M, centro di gravità del quadrigono, e gli assintoti paralleli agli assi coordinati, vale a dire ai diametri conjugati paralleli di tutte le coniche circoscrivibili.

9°. Ciò premesso, calcolando l'area S della conica (B) mediante la formola del n° 1, e tenendo conto dei valori poc'anzi notati di A e di C, il quadrato di S in funzione delle coordinate del centro x ed y si troverà espresso da

$$S^2 = \frac{\pi^2 \sin^2 \theta}{p p' q q' \alpha \beta} xy (p p' \beta y + q q' \alpha x - p p' q q')^2;$$

E per tal modo, ponendo

$$t = xy (p p' \beta y + q q' \alpha x - p p' q q')^2,$$

il problema di cui ci occupiamo riducesi alla ricerca de' valori di x ed y

capaci di rendere un massimo o minimo la funzione t , ritenuta però tra x ed y la relazione (C), in virtù di cui la funzione può ancora trasformarsi in

$$t = (\alpha y + \beta x)(pp'\beta y + qq'\alpha x - pp'qq')^2.$$

Procedendo per tanto a questa ricerca coi metodi ordinari si trova agevolmente che i valori di x ed y capaci di render massima o minima la funzione t sono quelli comuni all'equazione (C), ed all'altra che segue

$$(D) \ 3\alpha\beta(pp'y^2 - qq'x^2) - (pp'\beta^2 - qq'\alpha^2 + pp'qq')\alpha y - (pp'\beta^2 - qq'\alpha^2 + pp'qq')\beta x = 0;$$

e quindi i centri delle coniche capaci di risolvere il problema saranno i punti in cui l'iperbole, luogo de' centri di tutte le coniche circoscrivibili è incontrata dal luogo geometrico dell'equazione (D). È chiaro che quest'ultimo luogo geometrico è un'altra iperbole, che al pari della locale de' centri passa pel punto R, origine delle coordinate; ma è poi facile ad assicurarsi, che questa non è diversa da quella adoperata nella prima risoluzione del problema. Di fatti, cercando l'equazione della retta PQ riguardata come polare del punto Q rispetto alla conica (B), si trova che questa equazione è

$$pp'\beta y + qq'\alpha x = pp'qq';$$

inoltre si rifletta che la stessa retta PQ è una corda della locale de' centri conjugata alla direzione del diametro $\alpha\beta$, che passa pel suo punto medio r ; quindi l'equazione di questo diametro sarà

$$pp'\beta y - qq'\alpha x = pp'\beta^2 - qq'\alpha^2;$$

e perciò le coordinate del punto r saranno i valori di x ed y comuni a queste due equazioni. In conseguenza, chiamando m ed n queste coordinate, si avrà

$$m = -\frac{pp'\beta^2 - qq'\alpha^2 - pp'qq'}{2qq'\alpha},$$

$$n = \frac{pp'\beta^2 - qq'\alpha^2 + pp'qq'}{2pp'\beta};$$

e ne risulta

$$pp'\beta^2 - qq'\alpha^2 - pp'qq' = -2qq'\alpha m,$$

$$pp'\beta^2 - qq'\alpha^2 + pp'qq' = 2pp'\beta n.$$

In virtù di queste relazioni l'equazione (D) diverrà

$$3pp'y^2 - 3qq'x^2 - 2pp'ny + 2qq'mx = 0.$$

Ciò premesso (*fig. 3*) pel centro di questa conica si ha $x = \frac{1}{3}m$, $y = \frac{1}{3}n$, e così vedesi ch'esso è nel terzo della retta Rr a contare dal punto R. È poi manifesto che i suoi assintoti son paralleli alle rette

$$y\sqrt{pp'} \pm x\sqrt{qq'} = 0;$$

nelle quali si ravvisano i lati del quadrigono BC ed AD. Quindi l'iperbole (D) avendo lo stesso centro ed i medesimi assintoti della iperbole adoperata nella prima risoluzione del problema, e passando come quella per R, non è punto da essa diversa. Supposto per tanto che T, T', T'' sieno le altre tre intersezioni della iperbole (D) con la locale dei centri, saranno questi tre punti, e sol essi, capaci di esser centri di coniche di area massima, o minima circoscrivibili al quadrigono; ma ora resta a discernere i massimi da' minimi.

Però, innanzi di venire a questo esame faremo osservare che l'espressione dell'area della conica, nella quale abbiamo ritenuto le due variabili x, y , può ridursi a funzione della sola variabile x , sostituendovi per y il valore che ne porge l'equazione (C); e siccome si ha

$$y = \frac{\beta x}{x - \alpha},$$

*

eseguita la sostituzione si otterrà

$$S^2 = \frac{\pi^2 \sin^2 \theta}{pp'qq'\alpha} x^2 \frac{\left[qq'\alpha x^2 + (pp'\beta^2 - qq'\alpha^2 - pp'qq')x + pp'qq'\alpha \right]^2}{(x - \alpha)^3};$$

anzi siccome si ha

$$pp'\beta^2 - qq'\alpha^2 - pp'qq' = -2qq'\alpha m',$$

sarà più semplicemente

$$S^2 = \frac{\pi^2 \sin^2 \theta qq'\alpha}{pp'} \times \frac{x^2 (x^2 - 2mx + pp')^2}{(x - \alpha)^3};$$

e qui fa duopo di rimarcare che il primo dei due fattori frazionari, mentre è una quantità costante, è pure essenzialmente positiva; dappoichè cadendo i punti B, C dentro l'angolo delle coordinate positive YOX, le loro rispettive coordinate p , q , e p' , q' saranno tutte positive, e tale eziandio sarà la quantità α , ch'è l'ascissa del punto M centro dell'iperbole locale dei centri di tutte le coniche circoscrittibili al quadrigono. Per tanto, dopo la trasformazione eseguita, se pongasi

$$v = \frac{x^2 (x^2 - 2mx + pp')^2}{(x - \alpha)^3},$$

il problema sarebbe ridotto alla ricerca dei valori di x capaci di render massima, o minima la funzione v . E siccome, derivando si ha

$$\frac{dv}{dx} = x(x^2 - 2mx + pp') \frac{\left[3x^3 - 2(3\alpha + m)x^2 + (8\alpha m - pp')x - 2pp'\alpha \right]}{(x - \alpha)^4},$$

così, lasciando da banda i casi particolari, si vede che i valori di x capaci di risolvere il problema, saranno le radici dell'equazione di 3° grado

$$3x^3 - 2(3\alpha + m)x^2 + (8\alpha m - pp')x - 2pp'\alpha = 0;$$

ed è poi manifesto che nella figura queste radici corrisponderanno alle ascisse dei tre punti T, T', T'', vale a dire ad Ot, Ot', Ot'', che ora indicheremo per ordine con τ, τ', τ'' , e che sono evidentemente tutte positive.

Passeremo ora ad esaminare il segno che per ciascuno di questi tre valori di x prende la seconda derivata della funzione v . Intanto se facciamo per brevità

$$\begin{aligned}\phi &= x^2 - 2mx + pp' \\ \psi &= 3x^3 - 2(3\alpha + m)x^2 + (8\alpha m - pp')x - 2pp'\alpha,\end{aligned}$$

si ha

$$v = \frac{x^3 \phi^2}{(x - \alpha)^2}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{x\phi\psi}{(x - \alpha)^4}$$

e quindi per la seconda derivata avremo

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{(\phi\psi + x\phi'\psi + x\phi\psi')(x - \alpha) - 4x\phi\psi}{(x - \alpha)^5}$$

ma siccome i valori di x da sostituirsi in questa seconda derivata sono quelli pe' quali si ha $\psi = 0$; così la medesima può semplicemente ridursi a

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{x\phi\psi'}{(x - \alpha)^4};$$

ed osservando che il fattore

$$\frac{x}{(x - \alpha)^4}$$

è una quantità essenzialmente positiva, perchè tali sono i tre valori di x cioè τ , τ' , τ'' , si vede in fine che il segno che per ciascuno di essi prende la seconda derivata sarà quello stesso del prodotto

$$\Phi \cdot \Psi'.$$

Se si elimina y tra le due equazioni

$$xy = \alpha y + \beta x$$

$$pp' \beta y + q q' \alpha x = pp' q q',$$

risulta l'equazione di 2° grado

$$x^2 - 2mx + pp' \equiv 0$$

le di cui radici in conseguenza saranno le ascisse dei punti in cui s'incontrano i loro luoghi geometrici, che sono la locale dei centri, e la retta PQ; queste radici adunque saranno le ascisse dei punti P, Q. Ora ricordando che i punti T e T' sono rispettivamente situati nei limiti degli archi QR, QP appartenenti alla locale anteriore de' centri; e che il punto T'' è situato sulla locale posteriore, si riconoscerà che le ascisse dei punti P, Q comprendono tra esse l'ascissa Rt' del punto T'; ma sono alla lor volta comprese entrambe tra le ascisse Rt ed Rt'' de' punti T e T''. Da ciò risulta che dei tre valori di x , cioè τ , τ' , τ'' , il solo intermedio τ' cade tra i limiti delle radici dell'equazione

$$x^2 - 2mx + pp' = 0$$

mentre gli altri τ e τ'' sono l'uno più piccolo, e l'altro più grande di quelle due radici; quindi segue che il primo membro di questa equazione cioè la quantità Φ , diviene negativo quando per x vi si sostituisce τ' , e diverrà positivo sostituendovi sia τ , sia τ'' . In somma,

per $x = \tau$ si ha ϕ positivo

per $x = \tau'$ ϕ negativo

per $x = \tau''$ ϕ positivo

Resta ora ad esaminare il segno di ψ' . Osserviamo a tal'uopo, che essendo reali le tre radici τ, τ', τ'' dell'equazione di 3° grado $\psi = 0$, la sua derivata $\psi' = 0$, ch'è di 2° grado, avrà pure reali le sue due radici; le quali per un conosciuto teorema son comprese l'una tra τ e τ' ; l'altra tra τ' e τ'' ; dunque le due radici τ e τ'' dell'equazione primitiva $\psi = 0$, sono l'una più grande delle due radici della derivata $\psi' = 0$, e l'intermedia τ' è poi compresa tra queste radici. Quindi

per $x = \tau$ sarà ψ' positivo

$x = \tau'$ ψ' negativo

$x = \tau''$ ψ' positivo

Dunque riavvicinando i due risultamenti possiamo conchiudere che,

per $x = \tau$ il prodotto $\phi \psi'$ è positivo

$x = \tau'$ $\phi \psi'$ è positivo

$x = \tau''$ $\phi \psi'$ è positivo

vale a dire la seconda derivata della funzione v diviene positiva per ciascuno dei tre valori della variabile τ, τ', τ'' ; e quindi per ciascuno di essi la funzione v sarà sempre un minimo.

Ma pure bisogna osservare che essendo

$$v = \frac{x^3(x^2 - 2mx + pp')^2}{(x - \alpha)^3}$$

questa funzione è positiva per tutt'i valori di x maggiori di α , vale a dire maggiore di OM , e tra essi è $\tau''=0t''$. In questo caso il centro della conica circoscrittibile al quadrigono viene a trovarsi su la locale posteriore dei centri, e dà perciò luogo ad un' ellisse; ma per l'opposto la funzione v riesce negativa essenzialmente per tutt'i valori di x minori di α , ossia di OM , e sono tra essi $\tau=0t'$ e $\tau=0t$. I due archi delle coniche corrispondenti a queste ascisse cadranno per tanto su la locale anteriore de' centri, e dan luogo ad iperboli. In questa ipotesi trattasi per tanto di minimi tra valori negativi della funzione, ma in realtà equivalgono a massimi in valore assoluto.

SULLA DETERMINAZIONE
DELL'ORBITA DI UN PIANETA
MEMORIE

DEL CAV. A. DE GASPARIS

» *Problema hocce, longe difficillimum, multimode aggressus* ».

NEWTON.

Nel secondo semestre del 1854, e nel corso del 1855, ho presentato all'Accademia sette memorie separate, nelle quali tutte mi propongo di risolvere, con metodi differenti, il famoso problema della determinazione dell'orbita di un pianeta, o di una cometa, con osservazioni geocentriche. Nelle prime sei fo uso delle derivate, nella settima impiego tre osservazioni complete soltanto, quante il problema rigorosamente ne richiede.

I titoli di tali memorie sono :

1. *Determinazione del piano dell'orbita con tre osservazioni, comunque tra loro lontane, e tre derivate di primo ordine.*

2. *Determinazione del piano dell'orbita con due osservazioni, comunque lontane tra loro, due derivate di primo ordine, ed una di secondo, per ciascuna osservazione.*

3. *Determinazione degli elementi dell'orbita da tre osservazioni comunque lontane, e tre derivate di primo ordine.*

4. *Determinazione degli elementi dell'orbita con due osservazioni comunque lontane, due derivate di primo, ed una derivata di secondo ordine, per ciascuna osservazione.*

5. *Determinazione del raggio vettore con una osservazione, e derivate di primo, secondo e terzo ordine.*

6. *Determinazione dell'orbita di un pianeta che si muova nel piano dell'eclittica, da una osservazione, e derivate di primo, secondo, e terzo ordine della longitudine.*

7. *Determinazione dell'orbita di un pianeta con tre osservazioni complete.* In questa memoria, nello sviluppo delle coordinate eliocentriche in funzione del tempo, ritengo fino al termine moltiplicato per la quarta potenza del tempo inclusivamente.

Siano al tempo t , α, β la longitudine e la latitudine geocentrica di un pianeta o di una cometa.

x, y, z le sue coordinate eliocentriche, supposto essere l'eclittica il piano delle x, y , l'origine delle coordinate al centro del sole, e l'asse delle x quella retta che passa per l'equinozio di primavera.

ρ, r la distanza accorciata, ed il raggio vettore.

i, ϕ, p , l'inclinazione, la longitudine del nodo, ed il semiparametro dell'orbita.

Siano ancora l, R la longitudine ed il raggio vettore della Terra.

Per le osservazioni fatte ai tempi $t' t''$ ec., le quantità precedenti assumeranno uno, due apici, ec.

Nel tratto successivo presentandosi nuovi simboli, se ne indicherà il corrispondente significato.

Ciò che vi è da rimarcare nelle prime cinque memorie si è che alle derivate della longitudine e della latitudine, mi è riuscito di sostituire le derivate delle funzioni

$$\cot \beta \sin(l - \alpha) \quad , \quad \cot \beta \cos(l - \alpha)$$

prese rispetto ad α e β solamente, quindi esse dipendono dalle derivate $\cot \beta \sin \alpha$, e $\cot \beta \cos \alpha$. E qui, onde non sorga equivoco, dichiaro che dovendosi prendere la derivata di $\cot \beta \sin \alpha$ non intendo che debbasi calcolare la funzione

$$\cot \beta \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt} - \frac{\sin \alpha}{\sin^2 \beta} \frac{d\beta}{dt}$$

che ne è il differenziale, ma bensì che avendosi dalle osservazioni un sistema di valori di α come $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$ ed un sistema di valori β come $\beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots$ pe' tempi $t_1 t_2 t_3 \dots$ si debbano formare i valori $\cotg \beta_1 \operatorname{sen} \alpha_1$, $\cotg \beta_2 \operatorname{sen} \alpha_2$; e quindi co' noti metodi d'interpolazione, calcolare il valore

di $\frac{d \cotg \beta \operatorname{sen} \alpha}{dt}$. Lo stesso si dica per le derivate degli ordini superiori.

Spesso il numero delle derivate da prendere è divenuto la metà, e le derivate della latitudine si sono evitate. Son questi due vantaggi di grandissimo momento, sia per la difficoltà inerente al calcolo delle derivate, sia per quelle che s'incontrano nelle orbite poco inclinate. Il lettore intelligente riconoscerà che tutte le formole finali delle presenti memorie sono interamente nuove, ed in quanto a semplicità, ho adoperato ogni mio sforzo onde raggiungerla.

PRIMA MEMORIA

Determinazione del piano dell'orbita con tre osservazioni eomunque tra loro lontane, e tre derivate di primo ordine.

In questa memoria suppongo che le osservazioni siano fatte ai tempi $t, t+dt, t', t'+dt, t'', t''+dt$. Intanto a mostrare la deduzione delle formole che risolvono il problema, si rifletta che avendosi delle osservazioni fatte ai tempi $t, t', t'', t''', t^v, t^v$, si avranno le equazioni

$$\frac{xy' - yx'}{x''y''' - y''x'''} = \frac{t' - t}{t''' - t''} \quad (1) \quad \frac{x''y''' - y''x'''}{x^vy^v - y^vx^v} = \frac{t''' - t''}{t^v - t^v} \quad (2)$$

le quali tanto più si avvicinano ad essere rigorose, quanto minore è l'intervallo fra t' e t , t''' e t'' , t^v e t^v ; similmente per la Terra hanno luogo le due

$$\frac{R R' \sin(l' - l)}{R'' R''' \sin(l''' - l'')} = \frac{t' - t}{t''' - t''} \quad (3)$$

$$\frac{R'' R''' \sin(l''' - l'')}{R^v R^v \sin(l^v - l^v)} = \frac{t''' - t''}{t^v - t^v} \quad (4)$$

Hanno altresì luogo le equazioni ben note

$$x = R \frac{\operatorname{tg} \beta \cos l + \operatorname{tg} i \cos \phi \sin(l - \alpha)}{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} i \sin(\phi - \alpha)} \quad (5)$$

$$y = R \frac{\operatorname{tg} \beta \sin l + \operatorname{tg} i \sin \phi \sin(l - \alpha)}{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} i \sin(\phi - \alpha)} \quad (6)$$

altre somiglianti hanno luogo apponendo gli apici.

Ciò posto dalla equazione (1) possiamo eliminare x, y ec. mediante le (5) (6) ed eliminare i tempi mediante la (3).

Avremo dunque

$$= \frac{L + Mu + Nv}{L' + M'u + N'v} \cdot \frac{\text{sen}(l'' - l'')}{\text{sen}(l' - l')} \\ = \frac{\text{sen}\beta + \cos\beta \cos\alpha u - \cos\beta \text{sen}\alpha v}{\text{sen}\beta'' + \cos\beta'' \cos\alpha'' u - \cos\beta'' \text{sen}\alpha'' v} \cdot \frac{\text{sen}\beta' + \cos\beta' \cos\alpha' u - \cos\beta' \text{sen}\alpha' v}{\text{sen}\beta''' + \cos\beta''' \cos\alpha''' u - \cos\beta''' \text{sen}\alpha''' v} \quad (7)$$

nelle quali per brevità si è posto

$$\text{tg } i \text{ sen } \phi = u \quad \text{tg } i \cos \phi = v$$

$$L = \text{sen}\beta \text{sen}\beta' \text{sen}(l' - l)$$

$$M = \text{sen}\beta \cos\beta' \cos l \text{sen}(l' - \alpha') - \text{sen}\beta' \cos\beta \cos l' \text{sen}(l - \alpha)$$

$$N = \text{sen}\beta' \cos\beta \text{sen} l' \text{sen}(l - \alpha) - \text{sen}\beta \cos\beta' \text{sen} l \text{sen}(l' - \alpha')$$

I valori di $L' M' N'$ si formano da $L M N$ aggiungendo un apice ai simboli che entrano nella composizione di queste quantità.

• Impiegando l'equazione (2) unitamente a quelle della forma delle (5) (6) ed eliminando i tempi colla equazione (4) potremmo formare un'altra equazione simile alla (7) e contenente le incognite u , e v cioè ϕ ed i ; contrassegno con (8) tale equazione.

A rendere ora rigorose le equazioni (7) (8) si dovrà fare $t' = t + dt$, $t'' = t'' + dt$, $t''' = t''' + dt$, e sostituire ad l' , $l + dl$, ad l''' , $l'' + dl''$, ad l'' , $l' + dl'$, si dica lo stesso per α e β — Avremo così due equazioni a due incognite ϕ ed i , in funzione dei dati di tre osservazioni e loro derivate.

Non intendo di qui riportare la forma de' coefficienti delle due equazioni in parola, anche perchè esse si trovano riportate a pag. 249 del *Compte Rendu* 1854 2° semestre. Esporrò in vece il risultato della eliminazione di $\text{tg } i$, e la equazione di sesto grado in $\text{tg } \phi$ che ne risulta, e farò notare che tale equazione si è invano finora desiderata. Ma onde non nasca confusione pel significato de' simboli, supporrò che le tre osservazioni siano fatte ai tempi t , t' , t'' , come ho detto al cominciare di questa memoria. Siano ancora l_0 , l'_0 , l''_0 le prime derivate delle longitudini della Terra per le epoche t , t' , t'' ; e siano G_0 , G'_0 , G''_0 le derivate di primo ordine delle quantità

$$\cos \text{tg } \beta \text{sen}(l - \alpha), \cos \text{tg } \beta' \text{sen}(l' - \alpha'), \cos \text{tg } \beta'' \text{sen}(l'' - \alpha'')$$

anche pe' tempi t, t', t'' , derivate però che sian prese rispetto ad α e β soltanto nel primo tempo, rispetto ad α' e β' nel secondo, e rispetto ad α'' e β'' nel terzo; in breve le longitudini della Terra si rimangono invariate, ne' rispettivi tempi. Si ponga

$$\operatorname{co} \lg \beta \operatorname{sen}(\varphi - \alpha) = p \quad \operatorname{co} \lg \beta' \operatorname{sen}(\varphi - \alpha') = p' \quad \operatorname{co} \lg \beta'' \operatorname{sen}(\varphi - \alpha'') = p''$$

$$\frac{G_0 \operatorname{sen}(\varphi - l)}{l_0} = q \quad \frac{G'_0 \operatorname{sen}(\varphi - l')}{l'_0} = q' \quad \frac{G''_0 \operatorname{sen}(\varphi - l'')}{l''_0} = q''$$

Avremo per l'equazione di sesto grado in $\lg \varphi$ l'equazione

$$1 = \frac{(p' - p)^2}{(p'' - p')^2 (p'' - p)^2} + \frac{(p'' - p)^2 q'^2}{(p' - p)^2 (p'' - p')^2} + \frac{(p'' - p')^2 q''^2}{(p' - p)^2 (p'' - p)^2} - \frac{2 q q''}{(p'' - p)^2} - \frac{2 q' q''}{(p'' - p')^2} - \frac{2 q q'}{(p' - p)^2}. \quad (9)$$

e ciò è chiaro perchè tutti i termini essendo fattori o di $\operatorname{sen} \varphi$ o di $\operatorname{cos} \varphi$, dividendo tutti per $\operatorname{cos}^6 \varphi$, si presenta un'equazione in $\operatorname{tg}^6 \varphi$.

Per darle altra forma si rifletta che ove si ponesse

$$\frac{(p' - p)^2}{q q'} = a^2, \quad \frac{(p'' - p')^2}{q'' q'} = a'^2, \quad \frac{(p'' - p)^2}{q'' q} = a''^2$$

verrebbe l'equazione notevole

$$a^2 a'^2 a''^2 = a^4 + a'^4 + a''^4 - 2 a^2 a'^2 - 2 a^2 a''^2 - 2 a'^2 a''^2$$

E qui è da riflettere che se le quantità a, a', a'' rappresentassero delle rette, il secondo membro della precedente equazione, il quale è quantità positiva perchè eguaglia il quadrato $a^2 a'^2 a''^2$, indicherebbe l'aja del triangolo quadrata presa sedici volte, e formata co' lati a, a', a'' , affetta col segno negativo. Segue da ciò che le rette a, a', a'' non possono mai costituire un triangolo. L'equazione (9) deve essere risolta istituendo delle ipotesi sul valore di φ , e tenendo presente che i prodotti $q q', q' q'', q q''$ debbono sempre risultare quantità positive. Che le quantità a, a', a'' siano reali, si vedrà nella terza memoria.

Resta ora a trovare l'inclinazione. Ora posta l'equazione

$$o = f + g \operatorname{tg} i + h \operatorname{tg}^2 i \quad (10)$$

dallo sviluppo delle formole precedenti si ha

$$\begin{aligned} f &= G_o l'_o \operatorname{sen}(\varphi - l) - G'_o l_o \operatorname{sen}(\varphi - l') \\ &+ l'_o l_o \left\{ \operatorname{co} \operatorname{tg} \beta' \operatorname{sen}(\varphi - \alpha') - \operatorname{co} \operatorname{tg} \beta \operatorname{sen}(\varphi - \alpha) \right\} \\ g &= 2 \operatorname{co} \operatorname{tg} \beta' G_o l'_o \operatorname{sen}(\varphi - l) \operatorname{sen}(\varphi - \alpha') \\ &- 2 \operatorname{co} \operatorname{tg} \beta G'_o l_o \operatorname{sen}(\varphi - l') \operatorname{sen}(\varphi - \alpha) \\ &+ l_o l'_o \left\{ \operatorname{co} \operatorname{tg}^2 \beta' \operatorname{sen}^2(\varphi - \alpha') - \operatorname{co} \operatorname{tg}^2 \beta \operatorname{sen}^2(\varphi - \alpha) \right\} \\ h &= \operatorname{co} \operatorname{tg} \beta' G_o l'_o \operatorname{sen}(\varphi - l) \operatorname{sen}^2(\varphi - \alpha') \\ &- \operatorname{co} \operatorname{tg} \beta G'_o l_o \operatorname{sen}(\varphi - l') \operatorname{sen}^2(\varphi - \alpha) \\ &+ l_o l'_o \operatorname{co} \operatorname{tg} \beta \operatorname{co} \operatorname{tg} \beta' \operatorname{sen}(\varphi - \alpha) \operatorname{sen}(\varphi - \alpha') \left\{ \operatorname{co} \operatorname{tg} \beta' \operatorname{sen}(\varphi - \alpha') - \operatorname{co} \operatorname{tg} \beta \operatorname{sen}(\varphi - \alpha) \right\} \end{aligned}$$

Determinati gli angoli φ ed i le altre incognite si determineranno colle formole conosciute. Le equazioni (5) (6) unite a

$$z = R \frac{\operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} i \operatorname{sen}(l - \varphi)}{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} i \operatorname{sen}(\varphi - \alpha)}$$

e loro analoghe cogli apici, già danno le coordinate eliocentriche pe' tempi t, t', t'' .

Altre equazioni simili alla (10) potrebbero formarsi colla combinazione di G_o e G''_o , o di G'_o e G''_o , e determinare i da una equazione di primo grado.

SECONDA MEMORIA

Determinazione del piano dell'orbita con due osservazioni comunque lontane, due derivate di primo ordine, ed una di secondo, per ciascuna osservazione.

Siano t, t' i tempi delle due osservazioni. Ove si supponga che altre osservazioni sian fatte ai tempi $t + dt, t + 2dt, t' + dt, t' + 2dt$, è chiaro che le α, β diventeranno $\alpha + d\alpha, \alpha + 2d\alpha + d^2\alpha, \beta + d\beta, \beta + 2d\beta + d^2\beta$ e così per α', β' . Intanto per mostrare come si formino le equazioni che forniscono la soluzione del problema, si chiamino $x, y; x', y'; x'', y''; x''', y'''; x^{iv}, y^{iv}; x^v, y^v$; le coordinate corrispondenti ai tempi $t, t', t'', t''', t^{iv}, t^v$. Avremo prossimamente

$$\frac{xy' - yx'}{x'y'' - y'x''} = \frac{t' - t}{t'' - t'} \quad , \quad \frac{x'''y^{iv} - x^{iv}y'''}{x^{iv}y^v - x^vy^{iv}} = \frac{t^{iv} - t'''}{t^v - t^{iv}} \quad (1)$$

e per la Terra si verificheranno egualmente le due

$$\frac{R R' \text{sen}(l' - l)}{R'' R'' \text{sen}(l'' - l')} = \frac{t' - t}{t'' - t'} \quad , \quad \frac{R''' R^{iv} \text{sen}(l^{iv} - l''')}{R^{iv} R^v \text{sen}(l^v - l^{iv})} = \frac{t^{iv} - t'''}{t^v - t^{iv}} \quad (2)$$

Queste quattro equazioni diventeranno rigorose se vi si fa $t' = t + dt, t'' = t + 2dt, t^{iv} = t''' + dt, t^v = t''' + 2dt$. Ora, se nella prima delle (1) invece delle coordinate eliocentriche si sostituiscono i noti valori in funzione del nodo ed inclinazione dell'orbita, eliminando i tempi colla prima delle (2) avremo

$$\frac{L + Mu + Nv}{L' + M'u + N'v} = \frac{\text{sen}(l' - l)}{\text{sen}(l'' - l')} \frac{\text{tg } \beta + \cos \alpha u - \text{sen } \alpha v}{\text{tg } \beta' + \cos \alpha' u - \text{sen } \alpha' v} \quad (3)$$

nella quale si è posto

$$u = \text{tg } i \text{sen } \phi \quad , \quad v = \text{tg } i \cos \phi \quad , \quad L = \text{tg } \beta \text{tg } \beta' \text{sen}(l' - l)$$

$$M = \text{tg } \beta \cos l \text{sen}(l' - \alpha) - \text{tg } \beta' \cos l' \text{sen}(l - \alpha)$$

$$N = \text{tg } \beta' \text{sen } l' \text{sen}(l - \alpha) - \text{tg } \beta \text{sen } l \text{sen}(l' - \alpha')$$

per avere $L'M'N'$ si apporrà un altro apice ai valori precedenti. Similmente operando sulla seconda delle (1), unite alla seconda delle (2) avremo un'equazione simile alla (3) e che contrassegno con (4). Le equazioni adunque (3) e (4) conterranno le due incognite u e v , cioè φ ed i , non che i dati di due osservazioni, unitamente alle derivate di primo e secondo ordine di quelli, allorchè dopo aver ravvicinato, come si è detto, i tempi, si saran sostituite ad l, l', l'' , le espressioni $l, l + dl, l + 2dl + d^2l$ e così per $\alpha, \beta; \alpha', \beta'$; ec.

La forma esplicita de' coefficienti di tali due equazioni è riportata nel *Compte Rendu* pag. 251 secondo semestre del 1854, e perciò qui la tralaschio. Ricordo solamente che data a tali due equazioni la forma

$$eu^2 + av^2 + buv + eu + dv = 0$$

$$e'u^2 + a'v^2 + b'uv + e'u + d'v = 0$$

è facilissimo ricavare da queste le altre

$$-\operatorname{tg} i = \frac{e \operatorname{tg} \varphi + d}{e \operatorname{tg}^2 \varphi + b \operatorname{tg} \varphi + a} = \frac{e' \operatorname{tg} \varphi + d'}{e' \operatorname{tg}^2 \varphi + b' \operatorname{tg} \varphi + a'} \quad (5)$$

la quale è di terzo grado rispetto a $\operatorname{tg} \varphi$, ed i valori di d, e , ec. sotto forma più concisa, son dati da

$$d = -l_{00} G_0 \sin l + 2l^2_0 G_0 \cos l + l_0 G_{00} \sin l$$

$$e = +l_{00} G_0 \cos l + 2l^2_0 G_0 \sin l - l_0 G_{00} \cos l$$

$$a = +\frac{1}{2} l_{00} G_0 \sin l \sin \alpha - 2l^2_0 G_0 \cos l \sin \alpha - l_0 G_{00} \sin l \sin \alpha \left\{ \cot \operatorname{tg} \beta + 2l_0 G_0 K_0 \sin l \right.$$

$$e = +\left\{ l_{00} G_0 \cos l \cos \alpha + 2l^2_0 G_0 \sin l \cos \alpha - l_0 G_{00} \cos l \cos \alpha \right\} \cot \operatorname{tg} \beta + 2l_0 G_0 H_0 \cos l$$

$$b = -\left\{ l_{00} G_0 \sin(l + \alpha) - 2l^2_0 G_0 \cos(l + \alpha) - l_0 G_{00} \sin(l + \alpha) \right\} \cot \operatorname{tg} \beta - 2l_0 G_0 (H_0 \sin l + K_0 \cos l)$$

In queste formole, l_{00} indica la derivata di secondo ordine della

longitudine della Terra; G_{00} la derivata di secondo ordine della funzione $\cotg \beta \sin(l-\alpha)$ presa rispetto ad α e β ; H_0 e K_0 le derivate di $\cotg \beta \cos \alpha$, $\cotg \beta \sin \alpha$, tutte per l'epoca t . Onde le derivate distinte da calcolare sono H_0 , K_0 , e G_{00} . Per G_0 è chiaro da quel che si è detto, che

$$G_0 dt = d \cdot \cotg \beta \sin(l-\alpha) = (\sin H_0 - \cos K_0) dt$$

Si determineranno le quantità e' , d' cc. allo stesso modo come si è fatto per e , d cc. Si dovranno cioè calcolare le derivate H'_0 , K'_0 , G'_{00} , per l'epoca t' .

Si può dare un'altra forma rimarchevole alla (5). Infatti dai valori soprascritti di e , d cc. si rileva

$$\begin{aligned} &= \frac{(G_0 I_{00} - I_0 G_{00}) \sin(\varphi - l) \lg \beta + 2 I_0^2 G_0 \cos(\varphi - l) \lg \beta}{(G_0 I_{00} - I_0 G_{00}) \sin(\varphi - l) \sin(\varphi - \alpha) + 2 I_0^2 G_0 \sin(\varphi - \alpha) \cos(\varphi - l) + 2 G_0 I_0 \sin(\varphi - l) \lg \beta (H_0 \sin \varphi - K_0 \cos \varphi)} \\ &= \frac{(G'_0 I'_{00} - I'_0 G'_{00}) \sin(\varphi - l') \lg \beta' + 2 I'^2_0 G'_0 \cos(\varphi - l') \lg \beta'}{(G'_0 I'_{00} - I'_0 G'_{00}) \sin(\varphi - l') \sin(\varphi - \alpha') + 2 I'^2_0 G'_0 \sin(\varphi - \alpha') \cos(\varphi - l') + 2 G'_0 I'_0 \sin(\varphi - l') \lg \beta' (H'_0 \sin \varphi - K'_0 \cos \varphi)} \end{aligned}$$

nella quale non entrano quantità estranee, e da calcolarsi separatamente, ma si ravvisano i dati de' quali si voleva disporre per la soluzione del problema. Il modo come vi sono combinati, è abbastanza semplice, vista la difficoltà di tali ricerche. È notevole altresì che non vi entrino le derivate delle latitudini, nè di primo, nè di secondo ordine. Trovo inutile di aggiungere altre formole per la determinazione delle rimanenti incognite, perchè dovrei esporre cose già note.

Si sa infatti che il nodo e l'inclinazione bastano pel calcolo diretto delle coordinate eliocentriche, e quindi de' raggi vettori, ed angoli che fan tra loro, onde non resta che tener sott'occhio le formole corrispondenti.

TERZA MEMORIA

*Determinazione degli elementi dell'orbita con tre osservazioni,
e tre derivate di primo ordine.*

È facil cosa verificare che fra le coordinate eliocentriche di un pianeta, la sua longitudine e latitudine geocentrica, la longitudine e raggio vettore della Terra, han luogo le equazioni

$$\frac{x \operatorname{sen} l - y \cos l}{z} = \cotg \beta \operatorname{sen} (l - \alpha) \quad (1)$$

$$\frac{x \cos l + y \operatorname{sen} l - R}{z} = \cotg \beta \cos (l - \alpha) \quad (2)$$

Si ponga $l_0 = \frac{dl}{dt}$, $x_0 = \frac{dx}{dt}$, $y_0 = \frac{dy}{dt}$, $z_0 = \frac{dz}{dt}$ e si rappresenti al solito con G_0 la derivata di $\cotg \beta \operatorname{sen} (l - \alpha)$ rispetto ad α e β .

Differenziando l'equazione (1) viene

$$\left(\frac{dG}{dl}\right) l_0 + G_0 = \frac{(zx_0 - xz_0) \operatorname{sen} l - (zy_0 - yz_0) \cos l}{z^2} + \frac{x \cos l + y \operatorname{sen} l}{z} l_0 \quad (3)$$

Ora messo $F = \cotg \beta \cos (l - \alpha)$, si ha $\left(\frac{dG}{dl}\right) l_0 = F l_0$; sostituendo dunque in (3)

il valore di $F l_0$ presso dalla (2) si deduce

$$G_0 = \frac{(zx_0 - xz_0) \operatorname{sen} l - (zy_0 - yz_0) \cos l + R l_0 z}{z^2}$$

ed indicato con p il semiparametro, quest'ultima si cangia in

$$G_0 = \frac{k \sqrt{p} \operatorname{sen} i \operatorname{sen} (\varphi - l) + R l_0 z}{z^2} \quad (4)$$

k è la nota costante di Gauss.

*

ed alle epoche t' , t'' si verificheranno le due altre

$$G'_0 = \frac{k \sqrt{p} \operatorname{sen} i \operatorname{sen} (\varphi - l') + R' l'_0 z'}{z'^2} \quad (5)$$

$$G''_0 = \frac{k \sqrt{p} \operatorname{sen} i \operatorname{sen} (\varphi - l'') + R'' l''_0 z''}{z''^2} \quad (6)$$

Dalle equazioni (4) (5) si ricava

$$\frac{G_0 z^2 - R l_0 z}{G'_0 z'^2 - R' l'_0 z'} = \frac{\operatorname{sen} (\varphi - l)}{\operatorname{sen} (\varphi - l')}$$

o ciò che vale lo stesso

$$\begin{aligned} 0 &= G_0 z^2 \operatorname{sen} (\varphi - l') - G'_0 z'^2 \operatorname{sen} (\varphi - l) \\ &\quad - R l_0 z \operatorname{sen} (\varphi - l') + R' l'_0 z' \operatorname{sen} (\varphi - l) \end{aligned} \quad (7)$$

Intanto è facile assicurarsi che ha luogo identicamente l'equazione

$$\begin{aligned} 0 &= -R l_0 z \operatorname{sen} (\varphi - l') + R' l'_0 z' \operatorname{sen} (\varphi - l) \\ &\quad - \sqrt{l_0 l'_0} \left\{ \cot \beta' \operatorname{sen} (\varphi - \alpha') - \cot \beta \operatorname{sen} (\varphi - \alpha) \right\} z z' \end{aligned}$$

e ciò col sostituire in vece di z, z' i loro valori

$$z = -\frac{R \operatorname{tg} i \operatorname{sen} (\varphi - l)}{1 + \cot \beta \operatorname{tg} i \operatorname{sen} (\varphi - \alpha)}, \quad z' = -\frac{R' \operatorname{tg} i \operatorname{sen} (\varphi - l')}{1 + \cot \beta' \operatorname{tg} i \operatorname{sen} (\varphi - \alpha')} \quad (8)$$

e col tener presente che

$$R^2 l_0 = R'^2 l'_0 = R R' \sqrt{l_0 l'_0}$$

L'equazione (7) adunque diventerà

$$\begin{aligned} 0 &= G_0 z^2 \operatorname{sen} (\varphi - l') - G'_0 z'^2 \operatorname{sen} (\varphi - l) \\ &\quad + \sqrt{l_0 l'_0} \left\{ \cot \beta' \operatorname{sen} (\varphi - \alpha') - \cot \beta \operatorname{sen} (\varphi - \alpha) \right\} z z' \end{aligned} \quad (9)$$

Dalle equazioni (5) e (6) ricaveremo

$$\begin{aligned} 0 &= G' z'^2 \operatorname{sen} (\varphi - l'') - G''_0 z''^2 \operatorname{sen} (\varphi - l') \\ &\quad - R' l'_0 z' \operatorname{sen} (\varphi - l'') + R'' l''_0 z'' \operatorname{sen} (\varphi - l') \end{aligned}$$

ed operando come precedentemente, tenendo presente l'altro valore di z'' espresso da

$$z'' = -\frac{R'' \operatorname{tg} i \operatorname{sen}(\phi - l'')}{1 + \operatorname{co} \operatorname{tg} \beta'' \operatorname{tg} i \operatorname{sen}(\phi - \alpha'')} \quad (10), \text{ e che } R'^2 l_0 = R'^2 l'' = R' R'' \sqrt{l_0 l''}$$

dedurremo egualmente

$$\begin{aligned} 0 &= G'_0 z'^2 \operatorname{sen}(\phi - l'') - G''_0 z''^2 \operatorname{sen}(\phi - l') \\ &+ \sqrt{l_0 l''} \left\{ \operatorname{co} \operatorname{tg} \beta'' \operatorname{sen}(\phi - \alpha'') - \operatorname{co} \operatorname{tg} \beta' \operatorname{sen}(\phi - \alpha') \right\} z z'' \end{aligned} \quad (11)$$

per le epoche t t'' si verificherà pure

$$\begin{aligned} 0 &= G_0 z^2 \operatorname{sen}(\phi - l'') - G''_0 z''^2 \operatorname{sen}(\phi - l) \\ &+ \sqrt{l_0 l''} \left\{ \operatorname{co} \operatorname{tg} \beta'' \operatorname{sen}(\phi - \alpha'') - \operatorname{co} \operatorname{tg} \beta \operatorname{sen}(\phi - \alpha) \right\} z z'' \end{aligned} \quad (12)$$

Or qui è essenziale mostrare che nessuna delle equazioni (9) (11) (12) è conseguenza delle altre due. In primo luogo si rifletta che le equazioni (7) (8) (9) (10), dalle quali si sono dedotte, sono indipendenti fra loro. Vediamo adesso qual'è il risultato dell'eliminazione di $\frac{z}{z'}$, $\frac{z'}{z''}$ e di $\frac{z}{z''} = \frac{z}{z'} \frac{z'}{z''}$ fra le tre (9) (11) (12), dalle quali, in sostanza, si dovranno eliminare le due $\frac{z}{z'}$, $\frac{z'}{z''}$. Tale risultato, ove fra le tre sudette vi fosse dipendenza, dovrebbe annullarsi identicamente. Or si vedrà che ciò non ha luogo, anzi ci fornirà una equazione ad una incognita, ch'è delle principali del problema.

Si ponga adunque $\frac{z}{z'} = m$, $\frac{z'}{z''} = n$, le equazioni (9) (11) (12) diventeranno

$$\begin{aligned} G_0 \operatorname{sen}(\phi - l') m^2 - G'_0 \operatorname{sen}(\phi - l) = \\ \sqrt{l_0 l'} \left\{ \operatorname{co} \operatorname{tg} \beta' \operatorname{sen}(\phi - \alpha') - \operatorname{co} \operatorname{tg} \beta \operatorname{sen}(\phi - \alpha) \right\} m \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} G' \operatorname{sen}(\phi - l'') n^2 - G''_0 \operatorname{sen}(\phi - l') = \\ \sqrt{l'_0 l''_0} \left\{ \operatorname{co} \operatorname{tg} \beta'' \operatorname{sen}(\phi - \alpha'') - \operatorname{co} \operatorname{tg} \beta' \operatorname{sen}(\phi - \alpha') \right\} n \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} G_0 \operatorname{sen}(\phi - l'') m^2 n^2 - G''_0 \operatorname{sen}(\phi - l) = \\ \sqrt{l_0 l''_0} \left\{ \operatorname{co} \operatorname{tg} \beta'' \operatorname{sen}(\phi - \alpha'') - \operatorname{co} \operatorname{tg} \beta \operatorname{sen}(\phi - \alpha) \right\} m n \end{aligned} \quad (15)$$

In queste m, n sono alcetto quantità reali, e fattovi $m = cm', n = c'n'$, $mn = c'c'm'n'$, si determinino c, c' in guisa che i termini indipendenti da m', n' divengano eguali all'unità. Sarà

$$c = \sqrt{\frac{G'_0 \sin(\phi - l)}{G_0 \sin(\phi - l')}}, \quad c' = \sqrt{\frac{G''_0 \sin(\phi - l')}{G'_0 \sin(\phi - l'')}}, \quad cc' = \sqrt{\frac{G''_0 \sin(\phi - l)}{G_0 \sin(\phi - l'')}}.$$

e le equazioni (13) (14) (15) prendono la forma

$$m'^2 + \frac{\cotg \beta' \sin(\phi - \alpha') - \cotg \beta \sin(\phi - \alpha)}{\sqrt{G_0 G'_0 \sin(\phi - l) \sin(\phi - l')}} \sqrt{l_0 l'_0} m' - 1 = 0 \quad (16)$$

$$n'^2 + \frac{\cotg \beta'' \sin(\phi - \alpha'') - \cotg \beta' \sin(\phi - \alpha')}{\sqrt{G'_0 G''_0 \sin(\phi - l') \sin(\phi - l'')}} \sqrt{l'_0 l''_0} n' - 1 = 0 \quad (17)$$

$$m'^2 n'^2 + \frac{\cotg \beta'' \sin(\phi - \alpha'') - \cotg \beta \sin(\phi - \alpha)}{\sqrt{G_0 G''_0 \sin(\phi - l) \sin(\phi - l'')}} \sqrt{l_0 l''_0} m' n' - 1 = 0 \quad (18)$$

Apparisce da queste equazioni che m', n' sono reali, e per conseguenza anche c, c' , sapendosi che m, n sono anche reali. Si vedono qui comparire i valori contrassegnati con a, a', a'' nella prima memoria, e de' quali si componeva l'equazione di sesto grado in $\tg \phi$. Eliminando m', n' dalle tre ultime equazioni si presenta l'altra

$$0 = a^2 a'^2 a''^2 - a^4 - a'^4 - a''^4 + 2a^2 a'^2 + 2a^2 a''^2 + 2a'^2 a''^2 \quad (19)$$

in queste si ha

$$a = \frac{\cotg \beta' \sin(\phi - \alpha') - \cotg \beta \sin(\phi - \alpha)}{\sqrt{G_0 G'_0 \sin(\phi - l) \sin(\phi - l')}} \sqrt{l_0 l'_0}$$

$$a' = \frac{\cotg \beta'' \sin(\phi - \alpha'') - \cotg \beta' \sin(\phi - \alpha')}{\sqrt{G'_0 G''_0 \sin(\phi - l') \sin(\phi - l'')}} \sqrt{l'_0 l''_0}$$

$$a'' = \frac{\cotg \beta'' \sin(\phi - \alpha'') - \cotg \beta \sin(\phi - \alpha)}{\sqrt{G_0 G''_0 \sin(\phi - l) \sin(\phi - l'')}} \sqrt{l_0 l''_0}$$

Per far vedere che l'equazione (19) non si annulla identicamente, ma è un'equazione atta a dare $\lg \phi$, si ponga

$$\cotg \beta \sin(\phi - \alpha) = e, \quad \cotg \beta' \sin(\phi - \alpha') = e', \quad \cotg \beta'' \sin(\phi - \alpha'') = e''$$

$$\frac{G_o}{l_o} \sin(\varphi - l) = b, \quad \frac{G'_o}{l'_o} \sin(\varphi - l') = b', \quad \frac{G''_o}{l''_o} \sin(\varphi - l'') = b''$$

e l'equazione (19) può scriversi nel modo seguente

$$(e' - e)^2 (e'' - e')^2 (e'' - e)^2 = (e' - e)^4 b'^2 + (e'' - e)^4 b^2 + (e' - e')^4 b^2 - 2bb'(e'' - e')^2 (e'' - e)^2 - 2bb''(e' - e)^2 (e'' - e')^2 - 2b'b''(e' - e)^2 (e'' - e)^2$$

nella quale apparisce che il termine $(e' - e)^2 (e'' - e')^2 (e'' - e)^2$ non è zero, nè può ridursi con altri termini. Poste queste cose le equazioni (13) (14) (15) si risolveranno in questo modo. Posto un valore per m , che ordinariamente poco differisce dall'unità, la (13) darà subito φ da un'equazione di primo grado; conosciuto φ la (14) darà n , e se il valore assunto per m è esatto, con m, n, φ , la (15) deve essere soddisfatta. Trovato m , cioè il rapporto $\frac{z}{z'}$, la equazione (7) darà z , e quindi z' . Le (8), con riprova di calcolo,

daranno $\lg i$, e le (4) (5) daranno similmente il semiparametro p . Determinate queste quantità, il resto è agevole e conosciuto.

QUARTA MEMORIA

Determinazione degli elementi dell'orbita, con due osservazioni comunque lontane, due derivate di primo ordine, ed una di secondo, per ciascuna osservazione.

Il titolo della presente memoria somiglia, in quanto ai dati da adoprare, a quello della seconda, come il titolo della precedente somiglia a quello della prima. Ma come si è visto che i procedimenti analitici impiegati nella prima e terza erano differentissimi ed indipendenti fra loro, altrettanto verrà a scorgersi tra questa e la seconda.

Han luogo le equazioni facilmente verificabili

$$G = \cotg \beta \sin(l - \alpha) = \frac{x \sin l - y \cos l}{z} \quad (1)$$

$$F = \cotg \beta \cos(l - \alpha) = \frac{x \cos l + y \sin l - R}{z} \quad (2)$$

Contrassegnino α_0 , β_0 , le derivate della longitudine e latitudine del pianeta, ed R_0 la derivata del raggio vettore della Terra; ciò posto differenziando la prima $G = \cotg \beta \sin(l - \alpha)$ si ha

$$G_0 = -\cotg \beta \cos(l - \alpha) \alpha_0 - \frac{\sin(l - \alpha)}{\sin^2 \beta} \beta_0 \quad (3)$$

Differenziando l'altra $F = \cotg \beta \cos(l - \alpha)$ si ha

$$F_0 = \cotg^2 \beta \sin(l - \alpha) \alpha_0 - \frac{\cos(l - \alpha)}{\sin^2 \beta} \beta_0 \quad (4)$$

Questi differenziali sono presi restando l costante. Si ha ancora

$$\left(\frac{dG_0}{dl} \right) l_0 = \left\{ \cotg \beta \sin(l - \alpha) \alpha_0 - \frac{\cos(l - \alpha)}{\sin^2 \beta} \beta_0 \right\} l_0 = F_0 l_0 \quad (5)$$

Dall'equazione $F = \frac{x \cos l + y \sin l - R}{z}$ differenziando sempre col restar l invariata, viene, moltiplicando i risultati per l_0

$$F_0 l_0 = \frac{-k \sqrt{p} \sin i \cos(\varphi - l) l_0 - z R_0 l_0 + R z_0 l_0}{z^2} \quad (6)$$

Ciò posto, ricordo l'equazione precedentemente trovata

$$G_o = \frac{k\sqrt{p}\sin i \sin(\varphi - l) + Rl_o z}{z^2} \quad (7)$$

Questa differenziata dà

$$G_{oo} + \left(\frac{dG_o}{dl}\right) l_o = \frac{-k\sqrt{p}\sin i \cos(\varphi - l)l_o + Rz_o l_o + Rz l_{oo} + R_o l_o z}{z^2} - \frac{2z_o \left\{ k\sqrt{p}\sin i \sin(\varphi - l) + Rl_o z \right\}}{z^3 z}$$

ponendo in questa invece di $\left(\frac{dG_o}{dl}\right) l_o = F_o l_o$ il suo valore fornito dalla (6),

tenendo presente nelle riduzioni che per essere $R^2 l_o = \text{costante}$, viene $Rl_{oo} + 2R_o l_o = 0$ avremo l'equazione assai notevole

$$\frac{G_{oo}}{G_o} + \frac{2z_o}{z} = 0 \quad (8)$$

e di questa mi servirò per trovare le incognite φ ed i , evitando le derivate della latitudine.

Differenziando logicamente l'equazione

$$z = -\frac{R \lg i \sin(\varphi - l)}{1 + \cot \beta \lg i \sin(\varphi - \alpha)} \quad (9)$$

avremo l'equazione

$$-\frac{z_o}{z} = \frac{G_{oo}}{2G_o} = \cot \lg(\varphi - l)l_o - \frac{R_o}{R} + \lg i \frac{l_o \sin \varphi - K_o \cos \varphi}{1 + \cot \beta \lg i \sin(\varphi - \alpha)}$$

ed all'epoca t' sarà

$$-\frac{z'_o}{z'} = \frac{G'_{oo}}{2G'_o} = \cot \lg(\varphi - l')l'_o - \frac{R'_o}{R''} + \lg i \frac{l'_o \sin \varphi - K'_o \cos \varphi}{1 + \cot \beta' \lg i \sin(\varphi - \alpha')}$$

ed eguagliando i due valori di $\cot \lg i$ che si traggono da queste due ultime equazioni, si avrà

$$\begin{aligned} \cotg i &= \frac{H_o \operatorname{sen} \varphi - K_o \cos \varphi}{\frac{G_{oo}}{2G_o} + \frac{R_o}{R} - \cotg(\varphi - l)l_o} + \cotg \beta \operatorname{sen}(\varphi - \alpha) \\ &= \frac{H'_o \operatorname{sen} \varphi - K'_o \cos \varphi}{\frac{G'_{oo}}{2G'_o} + \frac{R'_o}{R'} - \cotg(\varphi - l')l'_o} + \cotg \beta' \operatorname{sen}(\varphi - \alpha') \quad (10) \end{aligned}$$

Si avrà da queste prima il valore di $\operatorname{tg} \varphi$, o di $\cotg \varphi$ da una equazione che è evidentemente di terzo grado, e poi si dedurrà $\cotg i$

Le derivate da determinare sono dunque G_o , K_o , G_{oo} per la prima osservazione. Si ricorderà essere H_o , K_o le derivate di $\cotg \beta \cos \alpha$, $\cotg \beta \operatorname{sen} \alpha$, e che G_o si ottiene da H_o e K_o e viceversa; in fatti esistendo fra queste derivate la relazione

$$G_o = H_o \operatorname{sen} l - K_o \cos l$$

è sufficiente conoscerne due, onde poterne dedurre la terza senza calcolo diretto. Lo stesso valga per le derivate della seconda osservazione.

L'equazione (9) darà z , e dall'equazione (7) si avrà il semiparametro p .

Cognita la z , sarà agevolissimo calcolare x , y da espressioni più semplici di quelle che forniscono tali incognite in funzione di φ , i . L'equazione (8) ci darà z_o , onde con φ , i , \sqrt{p} , z , x , y , avremo x_o , y_o da formole semplicissime e notissime. Il rimanente non offre più alcuna difficoltà.

QUINTA MEMORIA

Determinazione del raggio vettore con una osservazione, due derivate di primo, due di secondo, ed una di terzo ordine.

In questa memoria, come nelle precedenti, si vedranno escluse le derivate della latitudine, il cui calcolo, nelle orbite di piccola inclinazione, riesce penoso, e di poco sicura esattezza. Il raggio vettore si vedrà determinato da una equazione di terzo grado pura, e notevole perchè il termine noto è funzione delle sole derivate dei diversi ordini. Gli altri dati della osservazione entrano nelle formole allorchè si vuol procedere al calcolo delle altre incognite.

Rimanendo lo stesso il significato de' simboli adoperati precedentemente, sia F_{00} la derivata seconda di $\cos \lg \beta \cos(l-\alpha)$, e G_{000} la terza derivata della funzione $\cos \lg \beta \sin(l-\alpha)$, entrambe prese rispetto ad α , β soltanto.

Si differenzi l'equazione

$$\frac{G_{00}}{G_0} + \frac{2z_0}{z} = 0 \quad (1)$$

e si otterrà, dopo fatte le riduzioni

$$2G_0G_{000} + 2l_0G_0F_{00} - 3G_{00}^2 - 2l_0F_0G_{00} = 4h^2G_0^2r^{-3} \quad (2)$$

Per ottenere tale equazione si rifletta che si ha $\frac{dl^2z}{dt^2} = -\frac{h^2z}{r^3}$, e che i valori di G_0 , G_{00} , F_0 , F_{00} essendo

$$G_0 = -\cos \lg \beta \cos(l-\alpha)\alpha_0 - \frac{\sin(l-\alpha)}{\sin^2\beta}\beta_0$$

$$F_0 = \cos \lg \beta \sin(l-\alpha)\alpha_0 - \frac{\cos(l-\alpha)}{\sin^2\beta}\beta_0$$

$$G_{00} = -\cos \lg \beta \cos(l-\alpha)\alpha_{00} - \frac{\sin(l-\alpha)}{\sin^2\beta}\beta_{00} - \cos \lg \beta \sin(l-\alpha)\alpha_0^2$$

$$\frac{2\cos(l-\alpha)\alpha_0\beta_0}{\sin^2\beta} + \frac{2\cos \lg \beta \sin(l-\alpha)}{\sin^2\beta}\beta_0^2$$

*

$$F_{..} = \operatorname{co} \operatorname{tg} \beta \operatorname{sen} (l - \alpha) \alpha_{oo} - \frac{\cos (l - \alpha)}{\operatorname{sen}^2 \beta} \beta_{oo} - \operatorname{co} \operatorname{tg} \beta \cos (l - \alpha) \alpha_o^2 \\ - \frac{2 \operatorname{sen} (l - \alpha) \alpha_o \beta_o}{\operatorname{sen}^2 \beta} + \frac{2 \operatorname{co} \operatorname{tg} \beta \cos (l - \alpha)}{\operatorname{sen}^2 \beta} \beta_o^2$$

Da tali espressioni si ricava $(\frac{dG_o}{dl}) l_o = F_o l_o$, e $(\frac{dG_{oo}}{dl}) l_o = F_{oo} l_o$. Ciò posto la equazione (1) differenziata dà

$$G_o \left\{ G_{ooo} + \left(\frac{dG_{oo}}{dl} \right) l_o \right\} - G_{oo} \left\{ G_o + \left(\frac{dG_o}{dl} \right) l_o \right\} = 2 G_o^2 \frac{\tilde{z}_o^2 - \tilde{z}_{oo}}{z^2} \\ = 2 G_o^2 \left(\frac{G_{oo}^2}{4 G_o^2} - \frac{\tilde{z}_{oo}}{z} \right) = \frac{G_{oo}^2}{2} + 2 G_o^2 k^2 r^{-3}$$

la quale prontamente si riduce all'equazione (2).

Avuto il raggio vettore r , si avrà z da

$$r^2 = z^2 \operatorname{co} \sec^2 \beta + R^2 - 2 R z \operatorname{co} \operatorname{tg} \beta \cos (l - \alpha)$$

e quindi x, y, ρ dalle tre

$$\rho = z \operatorname{co} \operatorname{tg} \beta, \quad x = z \operatorname{co} \operatorname{tg} \beta \cos \alpha + R \cos l \\ y = z \operatorname{co} \operatorname{tg} \beta \operatorname{sen} \alpha + R \operatorname{sen} l$$

Differenziando le due ultime equazioni, e ponendo $R \cos l = X$, $R \operatorname{sen} l = Y$, chiamando X_o, Y_o le loro derivate, avremo

$$x_o - X_o = z_o H + z H_o, \quad y_o - Y_o = z_o K + z K_o \quad (3)$$

Per ciò che riguarda le derivate H_o, K_o , si è veduto, che ove siano conosciute, si ottengono G_o, F_o ; viceversa date G_o, F_o , possono determinarsi le H_o, K_o . Si ha infatti

$$G_o = \operatorname{sen} l H_o - \cos l K_o, \quad F_o = \cos l H_o + \operatorname{sen} l K_o$$

e per riprova di calcolo dovrà aversi

$$G_o^2 + F_o^2 = H_o^2 + K_o^2$$

Ottenuto adunque dalla (1) il valore di z_o , dopo determinato z , le (3) daranno i valori di x_o, y_o , che uniti ai valori, anche determinati, di x, y forniranno quanto è necessario per compiere la soluzione del problema.

SESTA MEMORIA

Determinazione dell'orbita di un pianeta, che si muova nel piano dell'eclittica, con una osservazione, e derivate di primo, secondo, e terzo ordine della longitudine.

Insisterò poco sulle formole di questa memoria tanto perchè la singolarità del movimento supposto le rende di molto improbabile attuazione, come perchè nella ottava memoria esporrò un metodo generale che resta applicabile anche quando tale specie di movimento venisse a verificarsi.

Si ponga per brevità

$A = R \sin(l - \alpha)$ e siano A_0, A_{00}, A_{000} , le tre prime derivate, le quali saranno note ove siansi calcolate le tre $\alpha_0, \alpha_{00}, \alpha_{000}$ che sono le tre derivate successive della longitudine geocentrica del pianeta. Sia ω la longitudine eliocentrica, e ω_0 la sua derivata. L'equazione del raggio visuale menato al pianeta essendo

$$y - R \sin l = \operatorname{tg} \alpha (x - R \cos l)$$

se in questa si sostituiscono per x ed y i loro valori $r \cos \omega, r \sin \omega$, sarà

$$\cos \alpha (r \sin \omega) - \sin \alpha (r \cos \omega) = A$$

questa è l'equazione che si tratterà di differenziare tre volte di seguito. Si

presenteranno termini della forma $\frac{d^2(r \sin \omega)}{dt^2}, \frac{d^2(r \cos \omega)}{dt^2}$, pe' quali si so-

stituiranno i loro valori $-\frac{\sin \omega}{r^2}, -\frac{\cos \omega}{r^2}$, poichè si ha pure

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{y}{r^3}, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{x}{r^3}$$

posta la massa solare eguale all'unità, e trascurata quella del pianeta.

Ponendo adunque $\omega_0 - \alpha_0 = n$ si avranno le due quazioni seguenti che contengono le due incognite r, n , anzi quest'ultima vi entra al primo grado.

$$(A^2 \alpha_0^2 - A A_{00}) r^3 - (A \alpha_{00} + 2 A_0 \alpha_0) r^2 \sqrt{r^2 - A^2 - 1} + 2 \alpha_0 n r^2 = 0 \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} (A\alpha_{ooo} + 3A\alpha_o\alpha_o^2)r^3 - 2A\alpha_o\sqrt{r^2 - A^2} + 3An\sqrt{r^2 - A^2} \\ (A\alpha_{ooo} + 2A\alpha_o^3 + 3A_o\alpha_o)r^3\sqrt{r^2 - A^2} - 3\alpha_{oo}nr^3 - 2A\alpha_o \end{aligned} \right\} = 0 \quad (2)$$

È facile assicurarsi che $r > A$, onde assumendo un valore di r maggiore di A , l'equazione (1) darà n , e se il valore di r è esatto, i due valori di n , r sostituiti nella (2) dovranno soddisfarla.

Trovato r , avremo ω dall'equazione $\sin(\omega - \alpha) = \frac{A}{r}$, e dall'altra

$n = \omega_o - \alpha_o$ avremo ω_o . Dopo ciò l'espressione $r^3 \omega_o$ ci determinerà il valore del semiparametro.

Di più l'equazione del raggio visuale differenziata dà

$$y_o \cos \alpha - y \alpha_o \sin \alpha - x_o \sin \alpha - x \alpha_o \cos \alpha = A_o$$

che unita all'altra $xy_o - yx_o = r^3 \omega_o$ darà x_o, y_o . I valori di x, y son for-

niti da $r \cos \omega, r \sin \omega$. Il semiasse maggiore si ha dalla equazione $\frac{1}{a} = \frac{2}{r}$,

$-x_o^2 - y_o^2$, e l'eccentricità da $r^2 \omega_o = \sqrt{a(1 - e^2)}$. L'anomalia eccentrica u , e la vera v , si calcolano colle due

$$r = a(1 - e \cos u), \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} u.$$

con ω e v sarà ancor nota la longitudine del perielio.

MEMORIA SETTIMA

Determinazione dell'orbita di un pianeta con tre osservazioni.

In questa memoria mi son proposto di ritenere, nello sviluppo delle coordinate eliocentriche in funzione del tempo, fino ai termini moltiplicati per le quarte potenze di questo, inclusivamente. È risaputo che tale approssimazione è sufficiente nella massima parte de' casi, e d'altra parte il Gauss ha mostrato che si può avere una soluzione sufficientemente vicina alla vera, anche ritenendo i soli termini di secondo ordine. Il Challis con metodo diverso, ha ritenuto altresì fino ai termini di quarto ordine, e l'applicazione numerica fattane all'orbita di Ebe, mostra che tale libertà è permessa.

Siano al tempo t , x , y le coordinate del pianeta nel piano stesso dell'orbita, e si ponga $k(t' - t) = \theta''$, $k(t'' - t' = \theta$, $k(t'' - t) = \theta'$. Avremo

$$x = x' - \frac{dx'}{dt} \theta'' + \frac{d^2 x'}{dt^2} \frac{\theta''^2}{2} - \frac{d^3 x'}{dt^3} \frac{\theta''^3}{6} + \frac{d^4 x'}{dt^4} \frac{\theta''^4}{24} \quad (1)$$

altrettanto si faccia per x'' , y , y'' .

Ora si ha

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x'}{d\tau^2} &= -\frac{x'}{r'^3}, \quad \frac{d^3 x'}{d\tau^3} = -\frac{dx'}{r'^3 d\tau} + \frac{3x' dr'}{r'^4 d\tau} \\ \frac{d^4 x'}{d\tau^4} &= -\frac{2x'}{r'^6} + \frac{6dx' dr'}{r'^4 d\tau^2} + \frac{3x'(dx'^2 + dy'^2)}{r'^4 d\tau^3} - \frac{15x' dr'^2}{r'^5 d\tau^2} \end{aligned} \quad (2)$$

lo stesso s'intenda per y' .

Sostituendo questi valori nella (1) e sue tre altre analoghe, ove dalla prima divisa per x' si sottragga la terza divisa per y' , moltiplicando poi

tutto per $x' y'$, verrà, contrassegnando con Δ' l'espressione $\frac{y' dx' - x' dy'}{d\tau}$

$$xy' - yx' = -\Delta' \left(\theta'' - \frac{\theta''^3}{6r'^3} - \frac{\theta''^4 dr'}{4r'^4 d\tau} \right) \dots \quad (3)$$

ed operando allo stesso modo sulla seconda e quarta delle (1) sarà

$$x''y' - y''x' = -\Delta' \left(\theta - \frac{\theta^3}{6r'^3} + \frac{\theta^4}{4r'^4} \frac{dr'}{d\tau} \right) \dots \quad (4)$$

In queste espressioni si è posto $\tau = k dt$.

Eliminando ora fra le (3) (4) il simbolo $\frac{dr'}{4r'^4 d\tau}$ si trova

$$\Delta' = \frac{6r'^3 \left\{ (x''y' - x'y'')\theta'^4 + (x'y - x'y')\theta^4 \right\}}{6r'^3 (\theta\theta'^4 + \theta''\theta^4) - \theta'^3\theta^4 - \theta^3\theta'^4} \quad (5)$$

Ciò posto esprimendo le coordinate della seconda e terza osservazione in funzione di quelle della prima, con simili operazioni si dedurrà

$$\Delta = \frac{6r^3 \left\{ (x''y - x'y'')\theta'^4 - (x'y - x'y')\theta^4 \right\}}{6r^3 (\theta'\theta'^4 - \theta''\theta^4) - \theta'^3\theta^4 + \theta^3\theta'^4}$$

$$\text{in cui } \Delta = \frac{ydx - xdy}{dt}$$

e coll'esprimere le coordinate della prima e seconda in funzione di quella della terza si troverà

$$\Delta'' = \frac{6r'^3 \left\{ (x''y - x'y'')\theta^4 - (x''y' - x'y')\theta'^4 \right\}}{6r'^3 (\theta\theta^4 - \theta'\theta'^4) - \theta'^3\theta^4 + \theta^3\theta'^4}$$

ora è noto che $\Delta = \Delta' = \Delta''$ onde ponendo $x'y - x'y' = n''$, $x''y - y''x = n'$, $x''y' - y''x' = n$, che rappresentano le tre note aree triangolari, avremo le due

$$\frac{\theta'^4 n + \theta^4 n''}{\theta^2 - \theta\theta'' + \theta'^2 - \frac{\theta^2\theta'^2}{6r'^3}} = \frac{\theta'^4 n' - \theta'^4 n''}{\theta'^2 + \theta'\theta'' + \theta'^2 - \frac{\theta'^2\theta'^2}{6r'^3}} \quad (6)$$

$$\frac{\theta'^4 n + \theta^4 n''}{\theta^2 - \theta\theta'' + \theta'^2 - \frac{\theta^2\theta'^2}{6r'^3}} = \frac{\theta^4 n' - \theta'^4 n}{\theta^2 + \theta\theta' + \theta'^2 - \frac{\theta^2\theta'^2}{6r'^3}} \quad (7)$$

Da queste possiamo determinare i rapporti $\frac{n}{n'}$, $\frac{n''}{n'}$, quando sian noti i raggi vettori. Ponendo per maggior semplicità

$$\frac{1}{r^2} = q, \quad \frac{1}{r'^2} = q', \quad \frac{1}{r''^2} = q''$$

si avrà

$$\frac{n}{n'} = \frac{\theta}{\theta'} \frac{12\theta\theta'\theta'' + \theta^3(\theta^2q - \theta'^2q' - \theta''^2q'')}{12\theta\theta'\theta'' + \theta'^3(\theta^2q - \theta'^2q' + \theta''^2q'')} \quad (8)$$

$$\frac{n''}{n'} = \frac{\theta''}{\theta'} \frac{12\theta\theta'\theta'' + \theta''^3(\theta''^2q'' - \theta'^2q' - \theta^2q)}{12\theta\theta'\theta'' + \theta'^3(\theta^2q - \theta'^2q' + \theta''^2q'')} \quad (9)$$

Ripigliando ora le equazioni (1), si moltiplichino la prima per la quarta, e vi si sottragga il prodotto della seconda per la terza. L'uno de' membri è $x'y'' - x''y$, l'altro è funzione di $x'y'$ e loro derivate. Si ritengano in questo prodotto fino ai termini moltiplicati per la quarta potenza del tempo. Si tenga altresì presente essere $x'dy' - y'dx = \text{costante}$, e quindi dif-

ferenziando $\frac{x'd^2y}{d\tau^2} - \frac{y'd^2x'}{d\tau^2} = 0$, come pure

$$\frac{x'd^3y' - y'd^3x'}{d\tau^3} = \frac{dy'd^3x' - dx'd^3y'}{d\tau^3}, \quad \frac{x'd^4y' - y'd^4x'}{2d\tau^4} = \frac{dy'd^3x' - dx'd^3y'}{d\tau^4}$$

verrà, eseguite le riduzioni

$$n' = \Delta' \left(\theta' - \frac{\theta'^3}{6r'^2} - \frac{\theta'^3(\theta - \theta'')}{4r'^4} \frac{dr'}{d\tau} \right)$$

ora dalle (3) (4) si ha

$$n'' = \Delta' \left(\theta'' - \frac{\theta''^3}{6r'^3} - \frac{\theta''^4}{4r'^4} \frac{dr'}{d\tau} \right)$$

$$n = \Delta' \left(\theta - \frac{\theta^3}{6r'^3} + \frac{\theta^4}{4r'^4} \frac{dr'}{d\tau} \right)$$

fra queste tre ultime potremo eliminare Δ' e $\frac{dr'}{4r'^4 d\tau}$, ed avremo

$$0 = \frac{n}{n'} \left\{ 6r'^3 (\theta' \theta - \theta'^2) - \theta'^2 \theta'^2 \right\} - \left\{ 6r'^3 (\theta^2 - \theta'' \theta + \theta'^2) - \theta^2 \theta'^2 \right\} + \frac{n''}{n'} \left\{ 6r'^3 (\theta' \theta'' - \theta^2) - \theta'^2 \theta^2 \right\} \quad (10)$$

È duopo qui ricordare le note equazioni fra n, n', n'' e le distanze accorciate. Ponendo

$$Ra \frac{n}{n'} + R'' e \frac{n''}{n'} - R' b - k' \rho' = 0 \quad (11)$$

$$(Rf - c\rho) \frac{n}{n'} - \rho' d + R' g = 0 \quad (12)$$

$$(R'' i + a\rho'') \frac{n''}{n'} - \rho' e - R' h = 0 \quad (13)$$

si ha pel valore delle costanti

$$\begin{aligned} a &= \lg \beta'' \sin(l - \alpha) - \lg \beta \sin(l - \alpha'') \\ b &= \lg \beta'' \sin(l' - \alpha) - \lg \beta \sin(l' - \alpha'') \\ c &= \lg \beta'' \sin(l'' - \alpha) - \lg \beta \sin(l'' - \alpha'') \\ d &= \lg \beta' \sin(l'' - \alpha'') - \lg \beta'' \sin(l'' - \alpha') \\ e &= \lg \beta' \sin(l - \alpha) - \lg \beta \sin(l - \alpha') \\ f &= \lg \beta'' \sin(l'' - l), \quad g = \lg \beta'' \sin(l' - l'') \\ h &= \lg \beta \sin(l' - l), \quad i = \lg \beta \sin(l'' - l) \\ h' &= \lg \beta \sin(\alpha'' - \alpha') - \lg \beta' \sin(\alpha'' - \alpha) + \lg \beta'' \sin(\alpha' - \alpha) \end{aligned}$$

A queste aggiungo le altre due

$$r'^2 = \rho'^2 \sec^2 \beta' + R'^2 - 2 R' \rho' \cos(l' - \alpha') \quad (14)$$

$$r^2 = \rho^2 \sec^2 \beta + R^2 - 2 R \rho \cos(l - \alpha) \quad (15)$$

Ciò posto, la soluzione potrà esser condotta nel seguente modo. Assunto un valore per ρ' , la (14) darà il valore di r' corrispondente.

Avremo dunque le due (10) (11) dalle quali si determineranno i rapporti $\frac{n}{n'}$, $\frac{n''}{n'}$. La (12) ci darà ρ , e dalla (6) ricaveremo r . Ove il valore di ρ' sia esatto, i valori di ρ , r dovranno verificare la (15). Trovato il valore esatto di ρ' , e le altre incognite ora nominate, avremo ρ'' dalla (13), e quindi r'' da

$$r''^2 = \rho''^2 \sec^2 \beta'' + R''^2 - 2 R'' \rho'' \cos(l'' - \alpha'')$$

Dalla (5) facilmente si ha il valore del semiparametro. Dopo qualche riduzione si trova

$$\sqrt{p} = \frac{1}{\theta \theta' \theta''} \frac{\theta''^4 n + \theta^4 n''}{\theta^2 - \theta \theta'' + \theta''^2 - \frac{\theta^2 \theta' r^2}{6 r'^2}}$$

È chiaro che per calcolar questa formola debbonsi già aver calcolati i valori assoluti di n , n' , n'' , mentre nel principio del calcolo si hanno soltanto i loro rapporti. Ma questo calcolo può agevolmente farsi dietro la conoscenza di r , r' , r'' , ρ , ρ' , ρ'' . Sono troppo note le formole che danno gli angoli che formano i raggi vettori non che l'inclinazione ed il nodo, conosciute che siano tali quantità, nella cui determinazione sta tutta la difficoltà del problema.

Ove tra le equazioni (6) (7) (11) si eliminano le quantità $\frac{n}{n'}$, $\frac{n''}{n'}$, si ottiene una rimarchevole equazione tra r , r' , r'' , la quale è perciò vera nel caso che, ne' precedenti sviluppi, si trascurino i termini moltiplicati per la quinta potenza del tempo, in poi. Tale equazione semplicissima è

$$\frac{\theta}{r^3} + \frac{\theta''}{r'^3} = \frac{\theta'}{r'^3}$$

Aggiungerò i valori di r , r' , r'' quali potrebbero ricavarsi ove si conoscessero i soli rapporti $\frac{n}{n'}$, $\frac{n''}{n'}$ essi sono

$$\frac{1}{6r} = \frac{(\theta'^2 + \theta'\theta'' + \theta''^2) n + (\theta'^{1/2} - \theta\theta'' - \theta^2) n' - (\theta^2 + 3\theta\theta'' + \theta''^2) n''}{\theta'^2 \theta''^2 n + \theta'^2 \theta^2 n'' - \theta^2 \theta''^2 n'}$$

$$\frac{1}{6r'} = \frac{(\theta\theta'' + \theta^2 - \theta''^2) n + (\theta\theta'' - \theta^2 - \theta''^2) n' + (\theta\theta'' - \theta^2 + \theta''^2) n''}{\theta'^2 \theta''^2 n + \theta'^2 \theta^2 n'' - \theta^2 \theta''^2 n'}$$

$$\frac{1}{6r''} = \frac{-(\theta^2 + \theta''^2 + 3\theta\theta'') n + (\theta^2 - \theta\theta'' - \theta''^2) n' + (\theta^2 + \theta\theta'' + \theta''^2) n''}{\theta'^2 \theta''^2 n + \theta'^2 \theta^2 n'' - \theta^2 \theta''^2 n'}$$

Queste equazioni si applicano con successo al calcolo delle orbite delle stelle doppie. Accade in simili ricerche che le osservazioni danno direttamente i rapporti in parola, poichè alle aje n , n' , n'' che si trovano come fattori di tutti i termini del numeratore e denominatore, si possono sostituire rispettivamente le aje fornite dalle distanze, e differenze degli angoli di posizione osservati; il coseno dell'angolo dell'inclinazione fra il piano dell'orbita, ed il piano perpendicolare al raggio visuale trovandosi in tutti i termini, scompare dalle formole. Entra bensì in tal caso un'altra incognita ch'è l'analogia della costante Gaussiana k , ma fortunatamente, e per la forma stessa delle precedenti equazioni, tale incognita si elimina per se stessa. Lo sviluppo di tali teoriche formerà l'oggetto di un'altra mia memoria.

NOTA ALLA TERZA MEMORIA.

Nelle prime quattro delle presenti memorie s'impiega un numero di dati superiore a quello che il problema analiticamente richiede; ma per compenso le osservazioni possono essere comunque lontane fra loro, e spesso le equazioni finali contengono una sola incognita. In questa nota, e nella seguente farò uso de' dati rigorosamente necessari, e tratterò il problema in due modi diversi fra loro, e dai precedenti. Mi occuperò in prima di

Determinare l'orbita di un pianeta con due osservazioni, e due derivate di primo ordine.

Il significato de' simboli rimane lo stesso. Ciò posto, è facile assicurarsi che ha luogo l'equazione

$$xx' - z'x' = (x'z'_0 - z'x'_0) \left(\theta'' - \frac{\theta''^3}{6r'^3} - \frac{\theta''^4}{4r'^3} \frac{dr'}{dt} \right) \dots \quad (1)$$

supposto che le osservazioni siano fatte ai tempi t, t' , posto $\theta'' = k(t' - t)$, e limitando gli sviluppi fino ai termini moltiplicati per le quarte potenze del tempo, inclusi. (vedi le equaz. (3), (4), 7^a mem.) Di più, nella equazione (4) della memoria terza si è veduto essere

$$\frac{G_0 z^2 - R l_0 z}{\sin(\varphi - l)} \cos \varphi = k \sqrt{p} \sin i \cos \varphi = x' z_0 - z' x'_0 \quad (2)$$

Ora nelle due equazioni

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r^3} &= \frac{1}{r'^3} - \frac{\theta''}{dt} d \frac{1}{r'^3} + \frac{\theta''^2}{2dt^2} d^2 \frac{1}{r'^3} \dots \dots \dots \\ \frac{1}{r'^3} &= \frac{1}{r'^3} + \frac{\theta}{dt} d \frac{1}{r'^3} + \frac{\theta^2}{2dt^2} d^2 \frac{1}{r'^3} \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Se si ritengono i soli termini moltiplicati per le prime potenze del tempo risulta l'equazione rimarchevole

$$\frac{\theta}{r^3} + \frac{\theta''}{r'^3} = \frac{\theta'}{r'^3}$$

la quale si è già dedotta per altra via (mem. 7^a in fine) e si è dimostrato che essa si verifica allorchè nello sviluppo delle coordinate eliocentriche si ritengono fino ai termini moltiplicati per le quarte potenze del tempo inclusivamente. Avremo dunque dalla prima delle equazioni (3), trascurando il terzo termine del secondo membro

$$\frac{\theta''^3}{12 r^3} - \frac{\theta'^3}{12 r'^3} = \frac{\theta'^3 dr'}{4 r'^3 dt}$$

sostituendo questo valore, e l'altro $x' z'_0 - z' x'_0$ dato dalla (2) nell'equazione (1) verrà

$$x z' - x' z = \frac{G_0 z^2 - R l_0 z}{\sin(\varphi - l)} \cos \varphi \left(\theta'' - \frac{\theta'^3}{12 r^3} - \frac{\theta'^3}{12 r'^3} \right)$$

e ponendo per x, x' i loro valori in z, z' , sarà ricordando ancora che $z = m z'$

$$z(\Pi - \Pi') + X - X' m = \frac{G_0 z - R l_0}{\cos l \operatorname{tg} \varphi - \sin l} m \left(\theta'' - \frac{\theta'^3}{12 r^3} - \frac{\theta'^3}{12 r'^3} \right) \quad (4)$$

Ricordo le equazioni (8) (9) della 3^a memoria

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{G_0 m^2 \sin l' - G'_0 \sin l + \sqrt{l'_0 l'_0} (K' - K) m}{G_0 m^2 \cos l' - G'_0 \cos l + \sqrt{l'_0 l'_0} (\Pi' - \Pi) m} \quad (5)$$

$$z = \frac{X \operatorname{tg} \varphi - Y - m X' \operatorname{tg} \varphi + m Y'}{\Pi' \operatorname{tg} \varphi - K' - \Pi \operatorname{tg} \varphi + K} \quad (6)$$

Ciò posto, fatta una ipotesi sul valore di m , la (5) darà φ ; quindi la (6) darà z , donde si ha z' e poscia r, r' . Tali valori dovranno soddisfare la (4), se il valore supposto di m è esatto.

NOTA ALLA QUARTA MEMORIA

Determinazione dell'orbita con una osservazione, due derivate di primo, e due di secondo ordine.

È noto che han luogo le equazioni generali

$$\frac{d^2(zH+X)}{d\tau^2} = -\frac{H\bar{z}+X}{r^3}, \quad \frac{d^2(\bar{z}K+Y)}{d\tau^2} = -\frac{\bar{z}K+Y}{r^3}$$

ed eseguendo le differenziazioni, avremo

$$\bar{z}_{00}H + 2H_0\bar{z}_0 + H_{00}\bar{z} + X_{00} = -\frac{H\bar{z}+X}{r^3}$$

$$\bar{z}_{00}K + 2K_0\bar{z}_0 + K_{00}\bar{z} + Y_{00} = -\frac{K\bar{z}+Y}{r^3}$$

e riducendo mediante l'equazione $\bar{z}_{00} = -\frac{\bar{z}}{r^3}$ (chiamando \bar{z}_{00} la seconda derivata di \bar{z}) sarà

$$\left. \begin{aligned} 2H_0\bar{z}_0 + H_{00}\bar{z} + X_{00} &= -\frac{X}{r^3} \\ 2K_0\bar{z}_0 + K_{00}\bar{z} + Y_{00} &= -\frac{Y}{r^3} \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

tenendo ancor presente che han luogo le altre

$$X_{00} = -\frac{X}{R^3}, \quad Y_{00} = -\frac{Y}{R^3}$$

ricaveremo facilmente dalla (I), eliminando la \bar{z}_0 , l'altra equazione

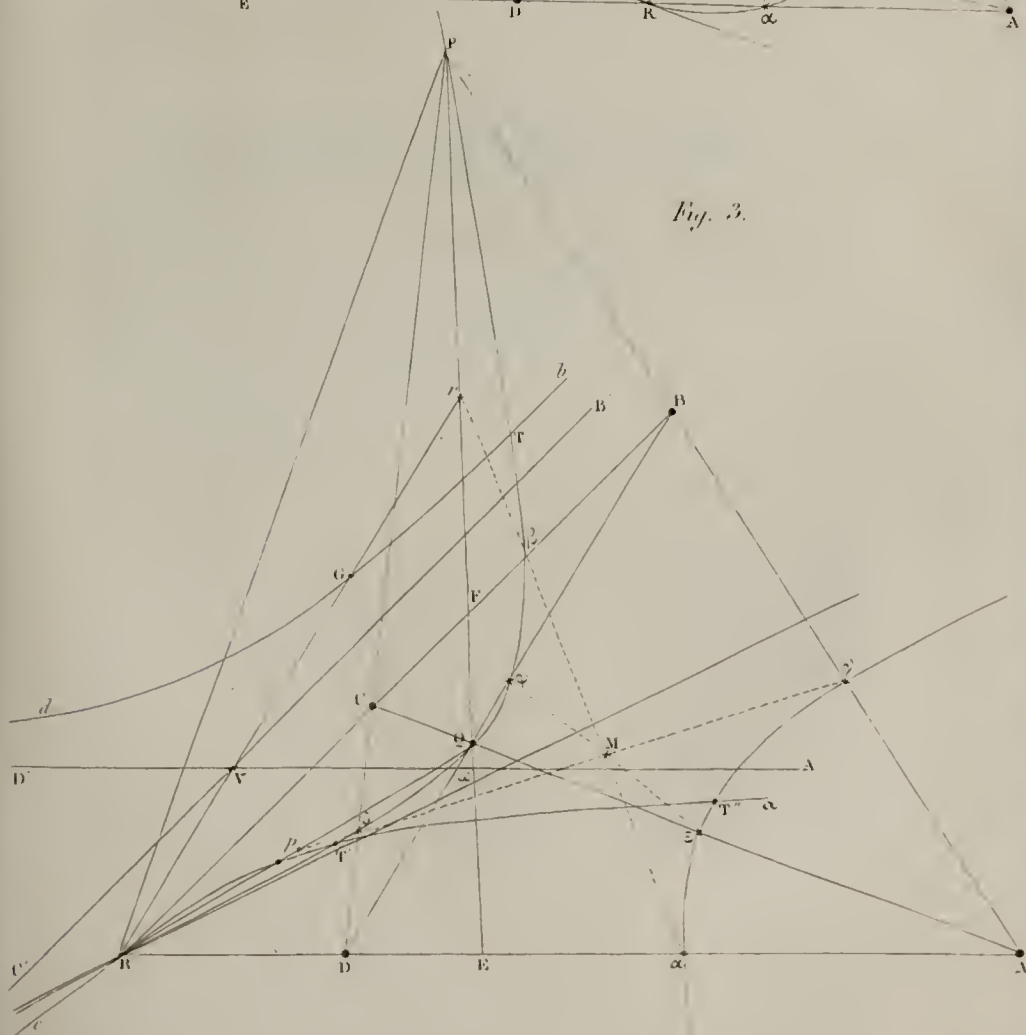
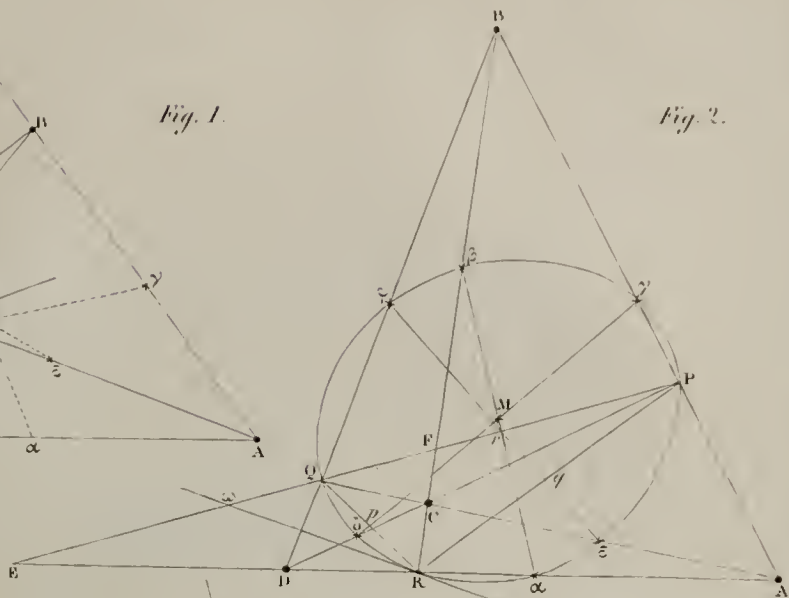
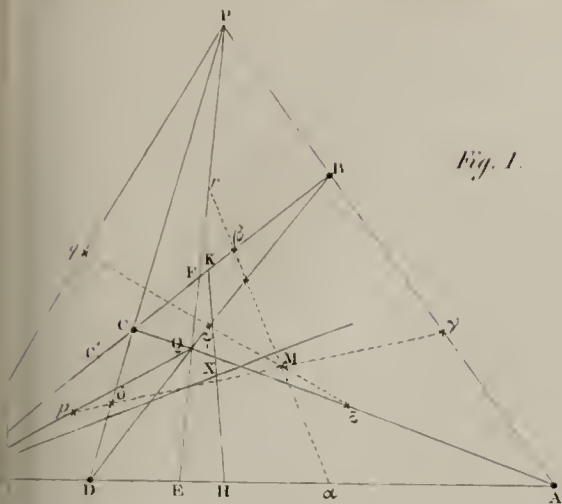
$$\bar{z}(K_0H_{00} - H_0K_{00}) = (K_0X - H_0Y)\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right) \quad (2)$$

Or qui è da notare che gli astronomi hanno finora ottenuto in cento maniere equazioni analoghe alla (2), analoghe tanto che tutte rientrano le une nelle altre, e con facili trasformazioni danno una stessa ed unica equazione. L'oggetto intanto della presente nota è di far vedere che la forma della (2) conduce a delle considerazioni non ancor fatte da alcuno, e che a me sembrano di qualche interesse. Infatti invece dell'espressione $K_o H_{oo} - H_o K_{oo}$ si può metter l'altra $K_o^2 \frac{d}{d\tau} \left(\frac{H_o}{K_o} \right)$ e le due equazioni che risolvono il problema, contenenti le due incognite z, r , saranno

$$z K_o^2 \frac{d}{d\tau} \left(\frac{H_o}{K_o} \right) = (K_o X - H_o Y) \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right). \quad (3)$$

$$r^2 = z^2 \operatorname{cosec}^2 \beta + R^2 - 2 R z \cos \beta \cos (I - \alpha) \dots \quad (4)$$

nelle quali viene a farsi uso de'cinque dati indipendenti $\alpha, \beta, H_o, K_o, \frac{d}{d\tau} \left(\frac{H_o}{K_o} \right)$, invece de'sei ordinariamente richiesti. Ciò si è verificato anche nella quinta memoria in cui si è ottenuto il raggio vettore in funzione di cinque sole derivate. Però tanto nell'uno quanto nell'altro caso, pel calcolo delle coordinate eliocentriche, e loro derivate, è necessario far entrare tutte le sei quantità arbitrarie. Così nel metodo presente onde avere il valore di z_o dalla prima o seconda delle (1), fa d'uopo conoscere H_{oo} , o pure K_{oo} .





MEMORIE

PER LE

SCIENZE NATURALI

PRESENTATE ALL'ACCADEMIA NELL'ANNO 1854

E DA ESSA APPROVATE

MEMOIRE

DE LA SOCIÉTÉ ROYALE

DES SCIENCES ET DES ARTS

DE BRUXELLES

SULLA

EGUAGLIANZA DI VELOCITÀ

CHE LE CORRENTI ELETTRICHE DI VARIA TENSIONE
ASSUMONO NELLO STESSO CONDUTTORE METALLICO

MEMORIA

DEL SOCIO ORDINARIO

MACEDONIO MELLONI

Nel riferire le sperienze eseguite ultimamente in Inghilterra sulle diverse velocità di trasmissione de' telegrafi elettrici i cui conduttori sono sospesi nell'aria o circondati di gutta percha e tuffati nell'acqua, oppure sotterrati entro tubi di ferro o di piombo, accennai di passaggio la teorica del Faraday sulla conducibilità, e dissi, che l'illustre scienziato inglese trovava una conferma di cotale sua teorica nella diminuzione di velocità che si manifesta ne' telegrafi sotterranei o sottomarini per rispetto ai telegrafi aerei. Ecco, in poche parole, la sua argomentazione.

La conducibilità elettrica consiste in una serie d'induzioni molecolari propagate successivamente dall'una all'altra estremità del corpo. Ora se l'induzione viene parzialmente sviata dalla sua direzione longitudinale, e richiamata lateralmente, la tensione secondo il verso della propagazione diminuisce, e con essa la velocità del fluido lungo il conduttore.

Quest'intima connessione ammessa dal Faraday tra la tensione e la velocità del fluido elettrico non mi parve bastantemente giustificata da' suoi magnifici esperimenti, e nel rispondere a questo gran fisico cre-

*

dei opportuno di accennare una esperienza atta a sciogliere direttamente la quistione. Poniamo infatti da banda qualunque considerazione relativa alle variazioni osservate ne' conduttori telegrafici di diversa costruzione, ed occupiamoci unicamente della trasmissione delle correnti elettriche più o meno intense entro lo stesso filo metallico.

Egli è noto che l'azione magnetica di tali correnti dipende ad un tempo e dalla quantità del fluido elettrico circolante e dalla sua tensione. Nelle correnti prodotte dall'elettromotore voltaico *la quantità* dipende dall'ampiezza degli elementi, e *la tensione* dal loro numero. Se fosse pertanto possibile di procurarsi due pile, l'una composta d'un gran numero di piccoli elementi, e l'altra di pochi elementi a gran superficie, le cui correnti possedessero la medesima forza elettro-magnetica dopo di aver percorsa tutta l'estensione d'una lunga linea telegrafica, si vedrebbe, dal confronto de' tempi necessarii alle manifestazioni finali delle rispettive loro azioni sull'ago magnetico, se la tensione influisce o no sulla velocità del fluido elettrico.

Faraday promise d'interporre i suoi buoni uffizii presso la Compagnia inglese de' telegrafi elettrici, onde si tentasse l'esperienza. La proposta, appoggiata da un tant'uomo, venne favorevolmente accolta, e dopo alcune settimane si diè mano all'opera. Ho l'onore di presentare all'Accademia una serie di segni vergati dal telegrafo sotto l'azion successiva di varie correnti elettriche più o meno intense. Le due lettere che accompagnano questi documenti originali sono del tenore seguente.

Mio caro Melloni

ISTITUZIONE REALE

2 GIUGNO 1854.

. « M. Satimer Clark ha fatto l'esperimento da voi richiesto » ed esteso un ragguaglio dei risultamenti: vi mando il tutto qui unito. » È assai difficile avere le linee totalmente libere durante un certo intervallo di tempo; sicchè egli dovette aspettare le occasioni propizie, » ed operare a più riprese, come meglio potè, e senza la mia assistenza. Ma io credo ne rimarrete soddisfatto, giacchè potete avere » piena fiducia nell'esattezza delle sue osservazioni. »

tutto vostro affez.^{mo}

M. FARADAY.

COMPAGNIA ELETTRO-TELEGRAFICA
(fondata nel 1846)

Uffizio degl'ingegneri 488. West-Strand.
Londra 31 maggio 1854

Satimer Clark al prof. Faraday

» Ho fatto alcune sperienze sulle velocità comparate delle correnti
» di varia intensità, e vi accludo le strisce di carta che mostrano i
» risultamenti. Non mi riuscì di uguagliare le deviazioni del galvanometro prodotte dalle correnti più intense, le correnti cioè che derivano da un gran numero di piccole lamine, con quelle provenienti da poche lamine a gran superficie; imperocchè nessun'ampiezza poteva supplire alla mancanza di tensione. Alludo alla forma dell'esperienza suggerita da Melloni; ma credo che i risultati saranno tuttavia per lui interessanti. »

» Le sperienze furono eseguite. Sopra 768 miglia di filo metallico rivestito di gutta percha, sulla linea cioè che va da Londra a Manchester e ritorna qui due volte, colle nostre ordinarie batterie (elettrici) di solfato di rame di 3 poll. quadr., e con tensioni, le quali variarono tra 31 coppie e sedici volte circa questo numero ossia 500 coppie. »

» Nelle prefate strisce la linea superiore, prodotta da un meccanismo locale, indica il principio dell'esperienza, ed il tempo durante il quale la corrente era trasmessa. »

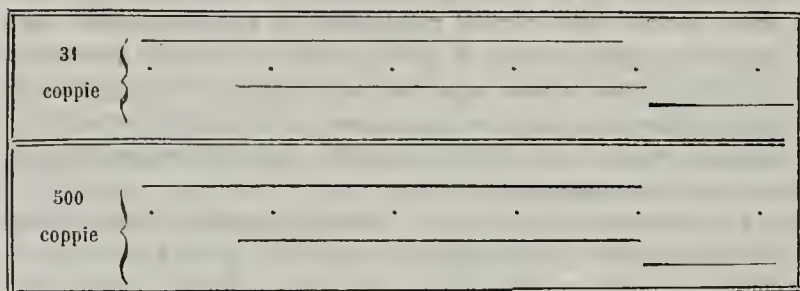
» La seconda linea (di punti) significa il tempo, in minuti secondi, e proviene dallo scatto d'una mollettina toccata da un pendolo ad ogni suo passaggio pel centro dell'arco d'oscillazione. »

» La terza linea mostra l'istante in cui la corrente apparisce all'estremità da noi detta *capo lontano* (*distant end*) dalla linea di 768 miglia di filo. »

» La quarta linea indica finalmente il residuo della scarica del
 » *capo vicino* (*near end*) del filo, che ponevasi in comunicazione colla
 » terra subito dopo il distacco delle batterie. Ciò non ha nessuna rela-
 » zione col soggetto delle presenti nostre indagini. »

» Ora, si vede, per mezzo della terza linea, che in tutt'i casi tra-
 » scorsero due terzi circa di minuto secondo prima che l'azione dive-
 » nisse apparente alla distanza di 768 miglia, indicando così una ve-
 » locità di circa 1000 miglia per minuto secondo. Questa velocità è
 » dunque sensibilmente uguale per qualunque tensione della corrente
 » elettrica. »

Depongo ogni cosa tra le mani del sig. Presidente; e soggiungo
 qui sotto il *fac simile* delle due strisce telegrafiche relative alle cor-
 renti delle pile di 31 o 500 coppie, che sono per noi le più essenziali.



Ricorderò in primo luogo all'Accademia, che le linee continue sono prodotte da penne o stili di ferro adattati al telegrafo stampatore di Bain, il quale lascia un'impressione stabile sulla striscia di carta preparata chimicamente ed uniformemente mossa da un meccanismo d'orologeria, come dissi nella precedente mia comunicazione sul medesimo soggetto. E farò poi osservare quale novità importante la traduzione del tempo in linguaggio grafico mediante l'ingegnoso congegno del Clark: così ognun vede a colpo d'occhio la frazione di minuto secondo trascorsa fra l'istante in cui la corrente penetra nel *capo vicino*, e l'istante del suo arrivo al *capo lontano*.

Noterò finalmente come il genere de' segni elettro-chimici impiegato dal sig. Clark abbia felicemente resa inutile la precauzione ch'io credeva indispensabile per la riuscita dell'esperienza.

E veramente, egli è certo che la perturbazione dell'ago magnetico, la calamitazione del ferro dolce, l'attrazione delle spranghe che arrestano i movimenti delle ruote dentate, o qualunque altra azione prodotta dal conflitto elettro-magnetico, esige una certa quantità di forza, la quale può risultare, non solamente dal primo impeto di una corrente sufficientemente intensa, ma benanche dalla somma degl'impulsi successivi di una corrente alquanto più debole. Sicchè, poteva darsi benissimo il caso in cui gli effetti sensibili manifestati all'estremità della linea percorsa dalla corrente della pila di 31 coppie apparissero più tardi di quelli della pila di 500 coppie senza che perciò se ne dovesse necessariamente arguire la maggiore velocità di propagazione di quest'ultima corrente rispetto alla prima: ecco perchè io consigliava di compensare coll'ampiezza della superficie l'inferiorità di forza elettromagnetica dovuta al minor numero delle coppie.

Ma nelle condizioni sperimentali adottate dal sig. Clark l'azione chimica della pila di 31 coppie, quantunque più debole di quella proveniente dalla pila di 500, è tuttavia bastantemente distinta anche sul principio dell'azione e giustifica pertanto la conclusione dedotta da questo valente ingegnere rispetto all'uguaglianza di velocità delle correnti elettriche di qualunque tensione.

Tra le strisce inviate se ne trova una sola dove la corrente d'un elettromotore di 64 coppie di 12 pollici quadrati di superficie (formato dalla riunione di quattro sezioni di 16 coppie ordinarie, di 3 pollici), sembra essersi mossa un po' più lentamente delle altre. Ma, siccome tutte le sperienze furono duplicate, e che nella compagna di questa non apparisce lo stesso ritardo, così l'anomalia deriva, secondo ogni probabilità, da qualche differenza accidentale, e deve quindi trascurarsi.

In alcune sperienze il sig. Clark trasmise la corrente per due galvanometri della Compagnia (non è detto la struttura e le dimensioni di cotali strumenti) prima d'introdurla nel conduttore e non trovò nessuna differenza ne' tempi della propagazione; ciò che doveva naturalmente aspettarsi, a cagione della debole resistenza de' galvanometri rispetto alla linea telegrafica.

Da tutto ciò si rileva dunque, che allorchando l'elettrico allo stato di corrente possiede tanta forza che basti a vincere la somma delle resistenze oppostegli da un dato conduttore di qualunque lunghezza, l'aumento d'una tensione quindici o venti volte maggiore non altera punto la sua velocità di propagazione.

Questo fatto è in aperta contraddizione col significato, generalmente attribuito alle denominazioni di *quantità* e *tensione*; stantechè colla prima si paragona la massa dell'elettricità a quella d'un fluido, e colla seconda figurasi la sua elasticità ossia tendenza al moto.

L'eguaglianza di velocità delle correnti di varia tensione offre per lo contrario un bellissimo argomento in favore dell'opinione di coloro, i quali suppongono le correnti elettriche analoghe alle vibrazioni dell'aria sotto l'azione de' corpi sonori. E per vero, siccome i suoni più o men gravi od acuti percorrono nell'aria lo stesso spazio nello stesso tempo, qualunque siasi la lunghezza od intensità delle onde aeree formate dalle pulsazioni del corpo sonoro, così le vibrazioni più o men rapide e più o men vigorute, che il fluido elettrico concepirebbe sotto l'azione degli elettromotori composti d'un numero più o men grande di coppie si propagherebbero ne' coaduttori colla medesima celerità.

Ognun vede, pertanto, come le ipotesi da noi immaginate per render ragione de' fenomeni naturali valgano talora a suggerire certe indagini sperimentali, donde risultano le prove della loro validità od insufficienza.

Avrò presto l'occasione di presentare all'Accademia altri fatti i quali dimostrano chiaramente, a mio credere, l'errore di alcune conseguenze ammesse finora intorno all'induzione elettrostatica, e terminerò conchiudendo di bel nuovo, che la differenza di velocità osservata tra le correnti elettriche trasmesse dai conduttori isolati nell'aria, o profondati nel suolo, o circondati da un doppio strato di sostanze coibenti e deferenti proviene unicamente da un aumento di capacità. In altri termini: l'induzione laterale esige una certa proporzione di elettricità, ed il progresso della corrente nella direzione della lunghezza è tanto più ritardato quanto è maggiore la quantità dell'agente necessaria alla produzione del fenomeno.

S'intende poi come dal fatto dell'uguaglianza di velocità di qualunque corrente nello stesso filo metallico ne risulti che le correnti e-

lettriche di diversa tensione conservano ne' conduttori sotterranei quei medesimi rapporti di quantità ch'esse posseggono ne' conduttori sospesi nell'aria: imperocchè la porzione di elettricità sviata, sotto le stesse, condizioni dinamiche, verso le pareti per virtù dell'induzione, essendovi trattenuta da una *forza di reazione*, deve necessariamente variare proporzionalmente all'intensità del fluido circolante.

SULLA

INDUZIONE ELETTROSTATICA

MEMORIA

DEL SOCIO ORDINARIO

MACEDONIO MELLONI

A chiunque abbia studiato i primi elementi di fisica è noto che, quando un conduttore isolato BC (fig. 1) trovasi in presenza d'un corpo elettrizzato A, il principio elettrico contrario a quello di A si svolge nella parte più prossima B, e l'omologo nella parte più lontana C.

E di fatto qualora un dischetto metallico isolato sia, giusta il metodo d'Epino, posto in contatto coll'una o coll'altra estremità del conduttore e quindi avvicinato ad elettroscopio elettrizzato, si ottengono segni negativi per B e positivi per C se A è positivo; e si hanno, per lo contrario, segni positivi per B e negativi per C nel caso ove A è negativo.

L'esperienza può abbreviarsi, e rendersi fors'anche più significativa, seguendo il metodo di Wilke, che consiste a comporre il conduttore BC di due parti, le quali riunite e poscia separate, nello stato d'isolamento, sotto l'influenza elettrica positiva o negativa di A, vengono successivamente accostate all'elettroscopio già carico di una data specie d'elettricità. Stantechè in tali circostanze le due parti trovansi elettrizzate in senso contrario, l'anteriore mostrandosi costantemente fornita dello stato elettrico opposto a quello di A. Qualunque indizio di elet-

tricità manca del tutto se le due parti vengono separate subito dopo di aver patita l'azione del corpo A; prova manifesta che i fenomeni osservati non derivano da una trasfusione elettrica di A in BC, ma sì bene da un disequilibrio introdotto nella elettricità naturale dell'ultimo corpo per l'azione del primo.

Lo sviluppo de' due principii elettrici in un conduttore isolato per virtù del semplice influsso d'un corpo elettrizzato posto ad una certa distanza è pertanto indubitato e indubitabile.

Tuttavia le sperienze allegate non dimostrano questo sviluppo *in presenza* della forza induttrice o attuante, ma *dopo* l'esercizio di essa sul corpo attuato.

Si risponde che per mostrare l'esistenza reale delle due elettricità durante l'azione basta servirsi d'un elettrometro caricato o sospendere alcune coppie di pendolini tessuti con fili di lino e midollo di sambuco lungo il cilindro indotto, ed accostarvi poi un bastoncino elettrizzato di vetro o di ceralacca: giacchè i moti elettrici de' pendolini nelle due porzioni del cilindro BC sono opposti tra loro, come pure le indicazioni dell'elettrometro.

Ma alcuni istanti di riflessione bastano per convincersi dell'insufficienza di codeste pretese dimostrazioni. Infatti gli strumenti o congegni adoperati per conoscere lo stato elettrico del conduttore BC sono dessi, pure sottoposti all'influenza del corpo A e patiscono in B un'azione molto maggiore in C: non potrebbe darsi che l'opposizione osservata de' segni procedesse unicamente da questa perturbazione degli strumenti e non già dalla diversa qualità del principio elettrico nelle due porzioni del corpo attuato.

Per sciogliere il quesito converrebbe dunque trovare il modo di sottrarre nell'azione del corpo attuante gli apparecchi impiegati nell'analisi del fenomeno.

Abbiassi una lamina metallica verticale comunicante col suolo. Ad una certa distanza da siffatta lamina pongasi da un lato una leggerissima pallina di midollo di sambuco sospesa ad un lungo e sottile filo di lino, e dall'altro il conduttore della macchina elettrica. Per quanto intensa sia l'elettricità del conduttore e minima la distanza della lamina al pendolino, questo conserva esattamente la sua direzione verticale. Se poi la pallina di sambuco è appesa ad un filo di seta od elettriz-

zata, una certa attrazione si manifesta tra il pendolo e la lamina: ma tale attrazione deriva unicamente da una forza di *reazione* destata dall'elettricità del pendolo e non ha che fare coll'azione del corpo situato oltre la lamina; com'è facile il convincersene rimuovendo il conduttore elettrizzato, o comunicandogli successivamente le due specie di elettricità: poichè queste vicende capitali sono del tutto insensibili al pendolino, che mantenuto nello stesso grado di elettricismo, forma sempre lo stesso angolo colla verticale. Del resto l'attenzione di reazione che la lamina esercita sul pendolo elettrizzato diminuisce rapidamente coll'allontanamento come tutte le forze di questo genere, e diventa sensibilmente nulla ad una breve distanza.

Ora da questi fatti mi parve se ne potesse inferire, che per sottrarre un corpo all'influenza o attuazione elettrica bastava ripararlo convenientemente dietro una lamina di metallo la quale comunicasse colla terra, o serbatoio comune, come la chiamano gli elettricisti. Ciò m'indusse ad accostare successivamente un elettroscopio, così guarentito dall'influenza del corpo attuante, presso ai punti B e C del cilindro sottoposto all'attuazione; ed allora vidi, con somma mia sorpresa, lo strumento indicare sempre la medesima specie di elettricità, la parte posteriore esercitando tuttavia un'azione più potente della parte anteriore: nell'uno e nell'altro caso i due corpicciuoli mobili dell'elettrometro caricato di elettricità positiva si scostavano maggiormente tra di loro se A era elettrizzato positivamente, e di cui univano per lo contrario la loro divergenza quando A trovavasi elettrizzato negativamente, donde opporre che la sola specie di elettricità sensibile nel cilindro sottoposto all'attuazione era quella stessa del corpo attuante (1).

Passando poi all'esperienza de' pendolini accoppiati e sospesi lungo il cilindro BC, m'ingegnai prima di sottrarne questi corpicciuoli all'azione diretta di A mediante alcune lamine metalliche convenientemente

(1) Per rimuovere qualunque sospetto che l'elettricità osservata in BC derivasse da una trasmissione del fluido eccitato in A, dirò che dopo ognuna delle predette osservazioni e dalle analoghe susseguenti, si scaricava il conduttore della macchina elettrica, mettendo subito dopo a contatto di BC un sensibilissimo elettroscopio a foglie di oro; e che si rigettarono come inconcludenti quelle poche osservazioni le quali dopo la scarica del conduttore furono seguite dalla manifestazione del più leggero indizio d'un residuo elettrico nel cilindro sottoposto all'attuazione.

disposte e comunicanti al pavimento. Presi poi una bacchetta elettrizzata di vetro e l'accostai gentilmente al di sopra d'ogni coppia di pendoli, in direzione normale all'asse di BC, avendo cura di ripararla essa pure dall'azione diretta di A con una delle predette lamine. Le coppie manifestavano sotto l'attuazione elettrica le solite divergenze, maggiori alle estremità che verso il centro del cilindro: tuttavia ognuna di esse aumentò per l'avvicinamento del vetro quando A era elettrizzato positivamente e diminuì sotto la condizione contraria di A negativo.

Ripetei l'esperimento disponendo l'asta di vetro parallelamente all'asse di BC, e per modo che venisse ad occupare presso a poco la posizione centrale soprastante. Se i due principii elettrici del cilindro BC trovavansi, come si vede, ancora generalmente, allo stato di tensione, le divergenze de'pendolini anteriori e posteriori dovevano necessariamente subire delle variazioni opposte, per modo, che le prime diminuissero mentre le ultime aumentano o viceversa, secondo la qualità positiva o negativa del corpo attoante.

Or tutte queste divergenze si videro accresciute simultaneamente nel primo caso, e simultaneamente diminuite nel secondo: ciò che bastò per dileguare in forza, direi quasi, *d'un sol colpo di bacchetta magica*, le illusioni acquistate sin dalla prima mia gioventù sulle opposte tensioni elettriche dominanti alle due estremità del corpo indulto.

Allora cercai di confermare il nuovo fatto d'una sola tensione elettrica durante l'attuazione senza il soccorso delle lamine comunicanti col suolo ed ottenni l'intento nella disposizione seguente.

È noto che il cilindro vuoto di metallo destinato alla dimostrazione de'fenomeni d'induzione termina ad ogni sua estremità con una lamina conformata sfericamente. Procacciate due di cotali superficie emisferiche (fig. 2) le chiusi con due lamine piane dello stesso diametro; le corredai di pendoli semplici analoghi a quelli che s'usano apporre alle facce posteriori de' dischi conjugati, le fermai notabilmente su colonne di vetro; e le feci comunicare tra loro per mezzo d'un' asta metallica. Situato l'apparecchio ad una certa distanza dalla macchina elettrica in attività vidi tosto i due pendolini divergere scostandosi dai rispettivi piani verticali che chiudevano gli esemplari B, C. La divergenza era minore in B che in C, ma derivante in ogni caso dalla elettricità positiva, dappoichè la bacchetta elettrizzata di vetro recato successivamente in B e

in C respinse sì l'uno che l'altro pendolo. La medesima repulsione ebbe luogo sostituendo un sottil disco metallico all'emisfero B, donde risultò la presenza dell'elettricità positiva sin presso la superficie anteriore del corpo indotto. E quasi superfluo l'osservare che se il conduttore della macchina trovavasi elettrizzato negativamente lo stato elettrico cambiava e che in tal caso i due pendolini divergevano per elettricità negativa.

Tutto l'artifizio di questo esperimento consiste, come ognun vede, a disporre le cose per modo che gl' indicatori dello stato elettrico proprio alle diverse parti del corpo attuato siano compiutamente sottratti all'azione diretta del corpo attuante, donde la necessità che il diametro trasversale di quest' ultimo corpo sia minore, o tutt' al più eguale, a quello del primo.

Si potrebbe credere, a prima giunta, che la presenza di una sola elettricità in tutta l'estensione del corpo attuato sta in contraddizione colle sperienze del Colombo e degli altri fisici, i quali trovarono mediante le più precise osservazioni fatte colla bilancia di torsione, che la anteriore del corpo attuato è elettrizzata in senso contrario della sua parte posteriore. Ma tale contraddizione non sussiste; e tutto spiegasi felicemente colle opposte fasi di tensione insensibile e sensibile, che assume successivamente sul *piano di prova* una delle due specie di elettricità.

E veramente sia A positivo. Noi sappiamo per le sperienze descritte sul principio di queste osservazioni che, dopo di aver subita l' induzione e la separazione, i punti anteriori del cilindro BC si mostrano elettrizzati negativamente, e gli ultimi fatti ei han provato che questo stato elettrico è dissimulato durante l'attuazione e sostituito da una certa dose di elettricità positiva. Suppongasi dunque che il punto anteriore del detto cilindro BC toccato dal piano di prova possessa una sola unità di elettricità positiva e quattro di elettricità negativa. All'istante del contatto il piano di prova sarà elettrizzato positivamente, poichè la sola unità elettropositiva è dotata di tensione apparente. Ma quando il piano, carico di $+1$ d'elettricità sensibile e di -4 d'elettricità dissimulata, si allontana da A ond'esser sottoposto al raggio della bilancia di torsione, l'ultima specie di elettricità acquista essa pure la tensione sensibile, neutralizza la positiva e rimane in eccesso di tre unità. Se il punto toccato avesse tre unità di elettricità dissimulata e due di sensibile, il

piano di prova, positivo durante il contatto di BC e la presenza del corpo A, manifesterebbe sulla bilancia di torsione una elettricità negativa uguale all'unità. Finalmente il piano di prova sarebbe ancora positivo all'istante del contatto con BC, ma non fornirebbe più sulla bilancia di torsione verun segno elettrico positivo o negativo qualora il punto toccato possedesse delle proporzioni uguali del principio elettrico sensibile e del principio elettrico dissimulato.

Questo avvicinamento de' due principii elettrici nella parte anteriore del corpo attuato non contiene in sè nulla d'ipotetico ed è anzi una conseguenza irrefragabile della esperienza d'Epino e delle mie proprie osservazioni. Per renderlo tuttavia manifesto ed evidentissimo a chiunque credesse permesso il respingerlo come non abbastanza consolidato, basterà citare i fatti seguenti, che tutti possono riprodurre colla massima facilità.

Supponiamo il conduttore che congiunge i due emisferi B, C dell'ultimo esperimento, fatto a cerniera in C e terminato in B con un gancio a pallina siccome s'usano nelle sperienze elettrostatiche. Questa cerniera e questo gancio siano disposti per guisa che sollevando l'estremità B, il conduttore se ne scenda in virtù del proprio peso lasciando B isolato.

Ottenuta la divergenza de' pendolini e verificata l'identità della loro forza motrice col principio elettrico attuante, si toglierà la comunicazione tra B e C, prodotto così l'isolamento dell'emisfero anteriore B, si scaricherà il conduttore della macchina elettrica, o il corpo qualunque cui è dovuto il fenomeno dell'induzione. Allora il pendolino di B diverrà più divergente di prima; e sarà facile il convincersi che questa maggior divergenza non procede mica da un aumento d'energia nel principio elettrico che lo teneva inizialmente scostato dalla corrispondente superficie piana, come succede nell'analogia sperienza de' dischi conjugati; ma sì bene dalla *sostituzione di una elettricità contraria, più copiosa della precedente*: perciocchè que' medesimi corpi i quali si mostravano prima attraenti diverran repellenti, e viceversa (1).

(1) Per osservare con facilità siffatte metamorfosi torna comodissimo il *cannello assaggiatore* del prof. Belli, il quale consiste, com'è ben noto ai cultori della scienza elettrica, in un tubo o cilindro di vetro metà nudo e metà ricoperto d'uno strato di ceratacca che stropicciato col panno lano presenta ad un tratto l'una e l'altra specie di elettricità.

Ecco dunque pienamente verificata col fatto la lotta che , al cessare dell'influenza di A su BC , si stabilisce nella parte anteriore di quest' ultimo corpo tra il principio elettrico dissimulato ed il principio elettrico sensibile.

Conchiudiamo, che durante l'attuazione o induzione elettrostatica, la sola elettricità omologa alla forza induttrice trovasi sviluppata in quantità più o men grande su tutta l'estensione del corpo indotto ; mentre l'altro rimane totalmente dissimulato alla sua parte anteriore e non vi apparisce se non dopo d'averla isolata e sottratta all'azione della forza attuante.

Quantunque la presenza della elettricità dissimulata resti dimostrata, per le precedenti sperienze, nella sola parte anteriore, nondimeno la diffusione della elettricità contraria in tutta l'estensione del corpo attuato m'induce a credere ch'essa pure trovisi in proporzione più o men grande, nelle diverse parti di questo corpo ; ed ho anzi escogitato un apposito apparecchio onde mettere la cosa in evidenza. Non mancherò d'informare l'Accademia del risultato delle mie ulteriori ricerche ; e porrò fine alle considerazioni presenti con un esempio, il quale dimostro egregiamente , se non m'inganno , che le modificazioni da introdursi nella legge fondamentale dell'attuazione elettrica, lungi dal complicare inutilmente le spiegazioni de' vari fatti relativi all'induzione, le rendono anzi più semplici, e le accolgono tutte indistintamente sotto un principio unico ed invariabile , il solo che sia veramente razionale e conforme all'osservazione.

Tra le due maniere di elettrizzare un elettrometro, la più usitata consiste, come ognuno sa, a toccare, in presenza del corpo elettrizzato, la sua guarnizione metallica superiore ed a sottrarre poscia lo strumento all'azione induttiva della forza elettrica : poichè allora gl'indici divergono in virtù d'una elettricità contraria.

Ora, se giusta l'opinione generalmente adottata sino al giorno d'oggi, le elettricità si trovassero amendue sviluppate con tensione nel cilindro orizzontale che serve a stabilire il principio dell'induzione elettrica, esse dovrebbero certamente sussistere colle medesime proprietà sulla parte metallica verticale e isolata dell'elettrometro ; stantechè in questa sorta di fenomeni la differenza di posizione rispetto alla gravità non ha nessuna influenza. Perchè dunque quando si tocca l'istrumento mettendola

così in comunicazione col suolo, le elettricità sviluppate per induzione non se ne fuggono ambedue nel serbatoio comune? Evidentemente perchè l'una di esse trovasi in uno stato diverso dall'altra: o, più esplicitamente, perchè l'elettricità omologa a quella del corpo attuante è la sola mobile e dotata di tensione, mentre la contraria non possiede, nè l'una, nè l'altra proprietà.

La carica induttiva degli elettrometri non si poteva spiegare altrimenti. Sicchè per essa s'adattava facilmente una dottrina diversa da quella apertamente sostenuta nella spiegazione de' fenomeni elettrici che offre il cilindro orizzontale sottoposto all'induzione.

Questa contraddizione è tolta nella proposizione fondamentale dell'attuazione elettrica risultante delle precedenti nostre osservazioni, dove il diverso stato delle due elettricità indotte diventa un principio generale perfettamente dimostrato dall'esperienza.

ELETTROSCOPIO

DEL CAV.

MACEDONIO MELLONI (*)

On sait qu'un conducteur à l'état naturel rapproché d'un autre conducteur électrisé, dissimule une portion de cet état électrique, et rendant peu à peu au fluide dissimulé sa tension primitive, à mesure que le fluide sensible s'en va par suite de la dispersion, prolonge la durée de la charge électrique. On sait d'autre part que cet effet derive de l'électricité contraire développée par induction dans la partie la plus voisine du corps induit, et que l'électricité homologue à celle du corps inducteur apparait dans les portions les plus éloignées, ou elle se repand en proportions d'autant plus grandes que les rayons de courbure sont moindres.

(*) In quel giorno medesimo (18 agosto) in cui l'egregio cav. Melloni doveva presentare all'Accademia delle scienze un nuovo Elettroscopio di sua recente invenzione, il segretario perpetuo di essa con commoventi parole ne annunziava l'imatura e irreparabile perdita avvenuta pochi giorni innanzi (10 agosto). Il Presidente e l'Accademia tutta, che in grande pregio han sempre avuto i trovati di quell'esimio fisico, ad istanza del socio A. Nobile, che nella seguente tornata presentavale quell'ultima pruova dell'ingegno inventivo del Melloni, deliberava che venisse pubblicata per le stampe una descrizione del sopradetto istrumento. La cortesia dell'inconsolabile vedova offrivane una di mano dell'autore, e trovata tra le sue carte. Questa descrizione, benchè scritta in idioma francese e non condotta a termine, l'Accademia ha creduto opportuno far imprimere senza punto alterarla; ed è quella che qui appresso si fa seguitare.

*

Une heureuse combinaison de ces trois données, m'a fait concevoir la possibilité de construire un électroscope éminemment sensible et capable de se maintenir électrisé dans l'un ou l'autre sens beaucoup plus longtemps que tout les appareils connus du même genre. L'effet a parfaitement répondu à mon attente. Et comme il me paraît évident que cet instrument nouveau deviendra fort utile dans plusieurs sortes de recherches électriques, je vais tâcher de le décrire avec tous les détails convenables.

Imaginez une petite tasse métallique A , munie de deux longues appendices filiformes DD soudées à deux points opposés du bord supérieur et communiquant par un conducteur qui passe dans l'axe d'un tube de verre, avec une boule ou un disque en métal E .

Imaginez, en outre, une seconde tasse métallique renversée B , un peu plus petite et beaucoup plus légère que la précédente, attachée au dessous d'un fil ou levier très mince de métal CC , suspendu par son milieu à un fil de soie F .

Supposez enfin les axes des deux tasses dans la même verticale et le fil de suspension porté à une telle hauteur, que la seconde se trouve entièrement contenue dans l'intérieur de la première, et puisse tourner librement autour de son point de suspension, sans que le contact s'établisse entre ses propres parois et celles de la tasse fixe A (1).

Les choses étant ainsi disposées, on comprend que si le conducteur E vient à recevoir une charge électrique, elle se propagera *par transmission* à la tasse extérieure A , et que de là elle agira par induction sur la tasse intérieure B . Supposons, pour fixer les idées, que l'électricité communiquée soit positive.

Cette force électrique répandue en A troublera l'équilibre du fluide naturel de B , repoussera le principe positif, attirera le négatif, qui réagira à son tour sur le fluide libre de A , en dissimulera une certaine quantité, et abandonnera enfin le reste aux lois connues de la distribution électrique sur les conducteurs isolés; en sorte que l'intensité

(1) Nell'elettroscopio modello fatto costruire dal Melloni, secondo vedesi nella figura, vi ha una particolarità di cui non si fa parola nella descrizione. Dal mezzo nel fondo interno della tazza fissa si eleva un piccolo cilindro metallico f , il quale, quando la tazza mobile è stata bene equilibrata nel suo convenevole sito, trovasi dentro di essa senza punto toccarla.

de l'action dépendra de la courbure des surfaces et sera moins forte sur les parois de la tasse que sur les appendices. La tasse extérieure *A* de l'appareil chargé contiendra donc une certaine proportion d'électricité positive dissimulée, c'est à dire accumulée sans tension et sans mobilité, et ses appendices *DD* posséderont une électricité libre de même nature, d'autant plus énergique que l'on approchera davantage de leurs extrémités.

Quant à la tasse intérieure *B* et son levier *CC*, il y aura de l'électricité négative dissimulée à la partie centrale placée en regard de la tasse *A*, et de l'électricité positive libre sur le reste du système mobile, c'est à dire sur la sommité plate de la tasse renversée et sur son levier supérieur. Or cette dernière espèce d'électricité sera évidemment beaucoup plus énergique aux extrémités du levier que dans sa partie moyenne et au sommet de la tasse: 1° parceque ces extrémités constituent les points les plus éloignés de l'action inductive; 2° parceque leur rayon de courbure est plus petit que partout ailleurs.

Ainsi le levier *CC* possédant la même espèce d'électricité que les appendices *DD*, et étant par sa position concentrique soumis à l'action conspirante de leur force répulsive, sera énergiquement repoussé s'il ne se trouve pas précisément dans le même azimuth qu'elles; et après quelques oscillations, il s'arrêtera à un certain angle de déviation. Alors la charge électrique communiquée au système fixe *EADD* commencera à diminuer. Mais cette diminution sera beaucoup plus lente que dans les électroscopes ordinaires à cause de l'électricité dissimulée, qui se dégagera peu à peu de la partie centrale et viendra remplacer sur la tasse *A*, ses appendices *DD*, le fil de communication et le disque *E* une partie de l'électricité libre perdue par l'effet de la dispersion. L'électrisation double ou inductive du système mobile *ACC* suivra exactement les phases successives de l'électrisation simple du système fixe: ses deux principes se recomposeront graduellement en proportion des pertes de la charge: et après un certain temps tout rentrera dans l'état naturel. Tout ce que nous venons de dire est indépendant du mode employé pour charger le conducteur *E*, et peut en conséquence s'appliquer également au cas de la charge directe de contact, et au cas de la charge indirecte ou contraire, obtenue au moyen de l'induction.

En résumé: la partie mobile de l'instrument s'électrise toujours

par induction et jamais par communication; la différence de forme entre le centre et les extrémités des pièces fixes et mobiles rend la distribution des forces motrices la plus avantageuse possible pour la rotation de l'index; et l'action inductive des surfaces centrales, dissimulant une portion d'électricité pour lui rendre peu à peu l'état libre au fur et à mesure des pertes subies, prolonge la durée de la charge reçue.

Si on a bien saisi le sens de ces notions préliminaires, on comprendra de suite la condition qu'il faut satisfaire dans la construction de l'appareil et la manière de l'employer.

Et d'abord, la minceur des pièces qui constituent la partie essentielle de l'instrument contribuant à accélérer les pertes de l'électricité dans le milieu ambiant, il est nécessaire de les renfermer dans une cage où l'air se maintienne fort sec, moyennant une substance avide d'humidité. La sécheresse de l'air intérieur est surtout indispensable pour que la torsion du fil de soie qui supporte la tasse renversée ne varie point et que l'index *CC* puisse revenir constamment dans le même azimuth lorsque les appendices *DD* ont perdu leur charge électrique.

Il faut ensuite que la cage ait une forme convenable. Et comme les observations à faire exigent la connaissance des angles de déviation formés par deux barreaux superposés sans contact, et maintenus à distance d'un cadran inférieurement placé, la disposition la plus favorable au but est évidemment de suspendre l'extrémité libre du fil de soie au sommet intérieur d'un tube vertical aboutissant au centre d'un disque horizontal de verre, dont la circonférence repose sur un récipient cylindrique en métal, tant soit peu plus grand que le levier mobile et les appendices sousjacentes de la tasse fixe. Les bords supérieurs de ce récipient doivent être aplatis, garnis de peau afin d'intercepter la communication entre l'air intérieur et l'air extérieur lorsque ils sont serrés au moyen de petites vis de pression contre le cercle métallique qui encadrera le disque de verre.

Le cercle divisé qui mesure les angles formés par la répulsion de l'index, sera percé au centre pour livrer un libre passage à la tasse fixe *A* soutenue par un tube de verre verni, dont l'intérieur contiendra le fil de communication entouré de mastic isolant: ce même conducteur isolé se recourbera deux fois à angle droit dans le même plan

vertical, reprendra sa direction primitive, et aboutira à la pièce extérieure de métal destinée à l'introduction de la charge électrique.

L'espace inférieur au cadran devra recevoir, moyennant des ouvertures à vis pratiquées sur le fond du récipient cylindrique, un ou deux réservoirs remplis de chlorure de calcium et entourés de bords plats doublés de peau.

Le fond de ce récipient s'appuyera sur un trépied muni de vis qui serviront à placer le fil de suspension dans l'axe de l'appareil.

Enfin la nécessité de transporter l'instrument d'un lieu à l'autre, et de donner au levier mobile un certain angle initial de déviation, exigeront à l'extrémité supérieure du tube qui renferme le fil de soie deux sortes de mouvements: le premier, de simple translation verticale, pour faire poser la tasse renversée intérieure sur le fond plat de la tasse droite extérieure et la rencontrer ensuite à la hauteur convenable; le second, de rotation horizontale pour placer au commencement de chaque série d'expériences, le levier indicateur à une petite distance angulaire des appendices fixes. Le mouvement de rotation se communiquera au système mobile en vertu de la force de torsion de la soie.

Comme c'est en vertu de cette même force de torsion qu'est due la résistance qui fait équilibre à l'action électrique et arrête le levier, et la tasse électrisée par induction à une distance angulaire plus ou moins grande, il faut en proportionner la valeur à celle de la masse tournante. Voilà pourquoi, au lieu d'un seul fil de cocon, il sera utile d'en prendre plusieurs réunis, non pas tordus à la machine, mais simplement collés ensemble par l'action de leur propre substance gommeuse et de l'eau chaude, tels qu'ils sortent enfin du premier appareil de la filature.

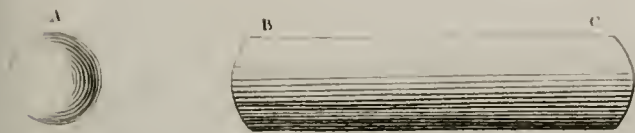
Au reste, si on trouve la force de torsion du fil de soie trop faible et qu'on veuille abréger le temps des observations, il n'y aura qu'à poser parallèlement à la direction de l'index, une petite aiguille aimantée sur la tasse mobile, comme on le fait pour l'indicateur de l'électroscope de Peltier, et à placer les appendices de la tasse fixe dans une direction qui forme un angle de 4° à 5° avec le méridien magnétique.

Mais il ne faut pas oublier qu'alors on perdra en sensibilité ce que l'on gagnera du côté de la promptitude des observations: à peu près comme cela arrive en mécanique dans le cas où il s'agit de soulever

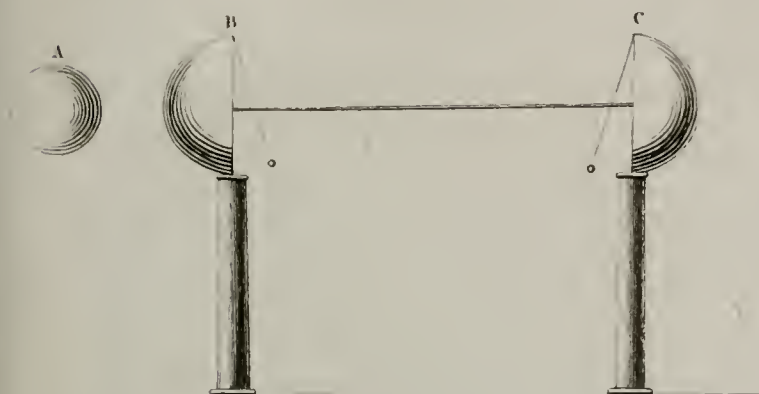
un poids à une certaine hauteur avec une force appliquée directement ou rendue plus efficace par le moyen des moufles, du treuil, ou de toute autre machine; car on ne peut augmenter la vitesse qu'aux dépens de la force, ou viceversa. Le secours de l'aiguille aimantée pourra toutefois être utile dans plusieurs circonstances; et surtout lorsque la trop grande humidité de l'air enlève rapidement l'électricité à la partie extérieure de l'instrument.

Il ne me reste plus, qu'à donner les dimensions du modèle que je viens de faire construire, et à montrer par quelques exemples, les qualités précieuses dont il est doué (1).

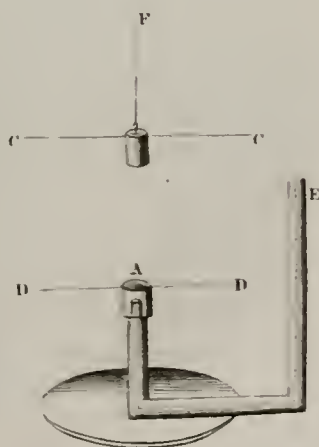
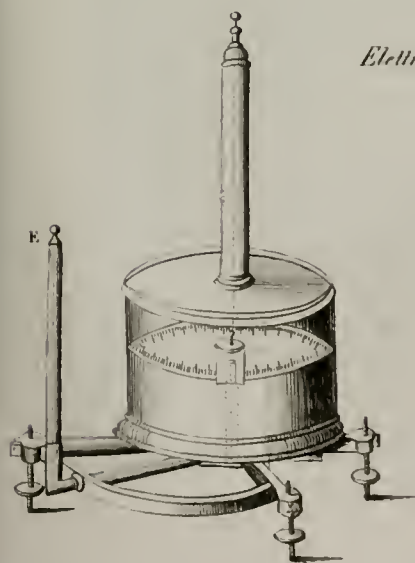
(1) Le dimensioni del modello sono le seguenti — Diametro della scatola 45^{mm} — altezza della scatola 44^{cc} — Lunghezza del filo di bozzolo 25^{cc} — Distanza tra il quadrante ed il disco di vetro che chiude la scatola di metallo 3^{cc} — Diametro interno della tazza fissa 24^{mm} — Diametro esterno della tazza mobile 46^{mm}.



Induzione Elettrostatica.



Elettroscopio



SIGNORI,

Il Melloni, dopo di aver coltivato con tanto successo un ramo della fisica che rimarrà inseparabile dal suo nome, dopo di essere stato giustamente salutato il Newton del calorico, volle dare nuova direzione ai suoi lavori ripiegandosi nel vasto campo del magnetismo e dell'elettrocismo, e voi già conoscete i primi risultamenti di queste sue nuove elucubrazioni. Or continuando egli in cosiffatti studii avea menato a termine, mercè l'opera paziente e nobilmente disinteressata del macchinista Gargiulo, un nuovo elettroscopio che vi dovea essere presentato in quel giorno medesimo in cui vi fu annunziata la sua morte.

Di questo strumento dunque non vi daremo la descrizione, sì perchè lo avete sotto i vostri occhi, sì perchè, fortunatamente, l'abbiamo vergata dalla mano stessa dell'autore, offertaci dalla cortesia della inconsolabile vedova di lui. Ci limiteremo perciò a dirvi solo qualche cosa della importanza scientifica di questo strumento.

Esso, come elettroscopio ad indice orizzontale, somiglia in parte agli elettrometri di Peltier, ed anche a quello da uno di noi ridotto per le osservazioni di meteorologia; elettrica, ma ciò non per tanto il medesimo è regolato da una nuova idea, cioè da un principio la prima volta applicato all'elettroscopio, siccome si scorge dalle parti nuove che sono le due tazze o i due cilindri vuoti che vi figurano.

La sua squisitezza è tale che può paragonarsi a quella dell'elettroscopio di Bohnenberger, senza que' difetti di cui questo suole essere accagionato, meno il pregio unico nel medesimo d'indicare immediatamente la natura della elettricità che si osserva.

Il volume e la massa della tazza mobile congiunta all'indice fanno sì che questo si muova lentamente per effetto del momento d'inerzia, onde il deviamiento cresce tuttavia quando l'impulso della forza motrice è da gran tempo cessato. Anche più lento poi è il ritorno dell'indice verso lo zero, perchè vi deve essere ricondotto dalla picciolissima forza di torsione del filo di bozzolo.

In vista di ciò il Melloni non ha mancato, sull'esempio di altri strumenti simili, di suggerire l'aggiunta sull'indice di un piccolo ago calamitato la cui forza direttrice renderebbe più celere il moto dell'indice suddetto, e quindi più pronto il suo ritorno verso lo zero. Lo strumento perderà allora un poco della sua squisitezza, ma in compenso riuscirà più pronto nelle indicazioni; ed essendo ora un semplice elettroscopio, potrebbe forse allora diventare un elettrometro, siccome ricordiamo averne avuto speranza l'autore, la quale speranza a noi sembra quasi certezza, perocchè crediamo possibile la compilazione di una tavola di gradi proporzionali.

Uopo è finalmente notare che questo strumento, dopo di essere stato scaricato, si ricarica da sè di una tensione residuale, la quale per nuovo contatto sparisce per ricomparire molto più piccola, e lo stato naturale non rinasce se non dopo un certo tempo. Il che non permette in molti casi di fare due osservazioni di seguito. Due sono le cause, secondo ci siamo fatti certi, di cotesta maniera di elettricità vindice rinascente: la prima è il lungo invoglio coibente che circonda il conduttore, il quale viene a rappresentare un'armatura di un coibente armato; la seconda è riposta nel principio stesso da cui lo strumento è governato, perocchè la tazza fissa scaricandosi per contatto, la mobile acquista un poco di tensione, cosicchè coteste tensioni residue che vietano all'indice di tornare allo zero, in parte procedono dal noto principio delle scariche residuali de' coibenti armati, ed in parte dalle leggi della elettricità dissimulata. A togliere l'inconveniente che deriva dalla prima cagione converrebbe accidentalmente variare la struttura dell'apparecchio: per fare sparire poi quello della seconda basterà abbassare l'indice dopo ciascu-

na osservazione, affinchè le due tazze vengano in comunicazione tra loro.

Il Melloni poi ebbe forse le sue ragioni di chiudere l'indice in una cassa di metallo e non di vetro, le quali si desumono dalle sue esperienze sulle induzioni elettrostatiche, egli volle cioè metter l'indice al coperto delle azioni che i corpi esterni avrebbero potuto esercitare per influsso sopra di esso; ma così facendo si è assoggettato l'indice alle azioni de' corpi che comunicano con le pareti metalliche della scatola anzidetta. Ecco una delle curiose esperienze nelle quali studiando l'istrumento ci siamo imbattuti. Toccando con un corpo elettrizzato, p. e. con uno de' poli di una pila a secco, le esterne pareti della scatola o campana che dirvi piaccia, l'indice dello strumento lentamente si avvia, rimanendo deviato per un angolo molto più piccolo di quello che si avrebbe se la pila avesse toccato l'estremo del conduttore; ora poi toccando questo con la mano per iscaricarlo e ridurlo a zero, vedrete con meraviglia che l'indice devia molto di più, come se le vostre dita fosser cariche di elettricità omologa. Questo curioso fenomeno è mestieri sia noto a coloro che vorranno fare uso dell'ingegnoso strumento del Melloni, affinchè non cadano talvolta in errore.

Comunque sia di ciò, l'autore con la sua consueta assennatezza giudicò potersi con l'aiuto di questo strumento assai bene dimostrare in isenola tutte le leggi della elettricità d'influsso e della elettricità dissimulata, e quindi lo corredò di tutte le parti occorrenti, cioè di un condensatore, che può essere utile anche in altre congiunture, di due piccoli dischi coniugati, di due lamine una coibente ed una deferente con piede isolante, di un diaframma metallico forato, e di una sorgente di elettricità di attrito.

Per le quali cose tutte noi siamo di credere che lo strumento del quale abbiamo parlato possa tornare utile tanto per nuove scientifiche ricerche, quanto per lo insegnamento, e però debba essere fatto di pubblica ragione.

LUIGI PALMIERI *relatore*

ANTONIO NOBILE

Cav. D. VINCENZO FLAUTI.

INDICE

DE' LAVORI AGGADEMICI CONTENUTI NEL PRESENTE VOLUME

Breve notizia per la presente pubblicazione, ricavata dal segretario perpetuo da' registri dell' Accademia, eripartita per classi. pag. v a xxxiv

ANNO 1853.

MEMORIE MATEMATICHE.

- FERGOLA N. — *Sulle Concussioni* — Memoria estratta da' costui
Mss. inediti, dal socio e seg. perp. V. Flauti . pag. 3-16
con una tavola.
- FLAUTI V. — *Ricerche del modo come i geometri antichi poterono pervenire a conoscere la diversa natura de' problemi.* 17-30
con una tavola
- PADULA F. — *Delle curve di 4° grado, che hanno tre punti di regresso di prima specie.* 31-48
con una tavola.
- TUCCI F. P. — *Congetture sopra la minima superficie continua terminata da un quadrilatero storto.* 49-60
con una tavola.
-

ANNO 1853.

MEMORIE MATEMATICHE.

- TRUDI N. — *Rappresentazione geometrica immediata dell'equazione fondamentale nella teorica delle funzioni ellittiche, con diverse applicazioni.* 63-100
- 45

- MAJO L. DE — *Metodi e formole generali per l'eliminazione nelle equazioni di primo grado.*
Presentata dal socio signor Trudi. 101-116

SCIENZE NATURALI.

- MELLONI M. — *Ricerche intorno al Magnetismo delle rocce* —
I. Mem. — *Sulla polarità magnetica delle lave e rocce affini.* 121-140
II. Mem. — *Sopra la calamitazione delle lave in virtù del calore, e gli effetti dovuti alla forza coercitiva di qualunque roccia magnetica.* 141-164
COSTA A. — *Ricerche sui Crostacei amfipodi del regno di Napoli.* 165-235
Costui non era ancora ascritto tra' nostri corrispondenti.
con 4. tavole

ANNO 1854.

MATEMATICHE.

- TRUDI N. — I. *Delle proprietà delle curve del 2° ordine circoscrivibili ad un quadrigono.*
II. *Ricerca della minima tra esse in superficie* . . . 237-282
con una tavola.
GASPARIS A. — *Sulla determinazione dell'orbita di un pianeta* — *Memorie VII.* 283-316

SCIENZE NATURALI.

- MELLONI M. — *Sulle correnti elettriche di varia tensione nello stesso conduttore metallico.* 319-326
— *Sull' induzione elettrostatica.* 327-334
— *Descrizione dell'elettroscopio di sua invenzione.* . . 335-340
con una tavola.

PERSONALE ATTIVO DELL' ACCADEMIA

NEGLI ANNI 1852, 1853, 1854.

SOCI ORDINARI

EPOCA DI LORO NOMINA

1808 maggio 20	FLAUTI V. — <i>Professore</i> di Matematiche nella R. Università degli studii dal 1803, al presente <i>emerito</i> — <i>Segretario interino</i> dell' Accademia da giugno 1808 al novembre seg. — Da tale epoca <i>Segretario aggiunto</i> di essa per la classe di Matematiche fino al 1845, che divenne <i>Segretario perpetuo</i> .
1811 aprile 9	TENORE M. c. — <i>Professore</i> di Botanica nell'Università, dal 1811; <i>Direttore</i> del Real Orto Botanico— Dal 1852 al 1854 presidente dell' Accademia.
1825 giugno 15	SANTORO L. c. — <i>Professore</i> di Chirurgia nella R. U. ec. ec. <i>Morto il 3 maggio 1853</i> .
1826 luglio 24	LUCA F. DE c. — <i>Professore</i> nel Real Collegio Militare— <i>Segretario generale</i> della Società Reale Borbonica.
1829 agosto 28	MASDEA G. — <i>Archivario</i> dell'Accademia, e Conservatore degli oggetti e libri, che ad essa appartengono.
1831 agosto 24	GUARINI G. — <i>Professore</i> di Chimica. <i>Morto il 26 febbrajo 1857</i> .
.	GUSSONE G. c. — <i>Direttore</i> in 2° del Real Orto Botanico ec.
.	CAPOCCI E. c. — Già <i>Astronomo direttore</i> del R. Osservatorio in Capodimonte.
1832 agosto 1	COSTA O. G. — <i>Professore</i> di Zoologia.
1835 dicembre 8	BRUNO F. — <i>Professore</i> di Matematiche nella R. Università degli studi.
1837 marzo 27	CHIAJE S. DELLE — <i>Professore</i> di Anatomia Patologica nella R. Università degli studi, e <i>Direttore</i> del Gabinetto corrispondente
1838 luglio 21	VULPES B. c. — <i>Professore e Direttore</i> di Clinica Medica nella R. U. degli studi. <i>Morto il 12 maggio 1855</i> .

1839 marzo 22	SEMMOLA G. — <i>Professore di Medicina</i> (impedito nell'esercizio accademico per malattia abituale).
1841 aprile 1	NORILE A. — <i>Astronomo</i> nel Reale Osservatorio di Capodimonte.
1842 giugno 11	MELLONI M. — <i>Professore di Fisica</i> distintissimo. <i>Morto il dì 11 agosto 1854.</i>
.	GRIMALDI G. CEVA <i>marchese</i> — Già <i>Presidente del Consiglio de' Ministri di Stato</i> , G. C. d'insigni ordini cavallereschi nazionali e stranieri. <i>Superiormente dispensato dall'intervento.</i>
1843 ottobre 24	TUCCI F. P. — <i>Professore di Matematiche</i> nella R. Università degli studi.
1846 settembre 20	BOZZELLI F. P. c. — <i>Attual Presidente</i> della S. R. Borbonica.
1850 agosto 22	AGOSTINO F. D', C. — <i>Generale di Artiglieria</i> ec. ec. <i>Superiormente dispensato dall'intervento.</i>
.	PALMIERI L. — <i>Professore di Filosofia</i> nella R. Università degli studi.
1851 luglio 1	NICOLINI N., C. — <i>Presidente</i> della G. S. di Giustizia. <i>Morto il 15 marzo 1857.</i>
. . . luglio 18	FORTUNATO G. <i>marchese</i> — Già <i>Presidente del Consiglio de' Ministri di Stato</i> — G. C. di più ordini cavallereschi nazionali e stranieri.
1853 settembre 14	PADULA F. c. — <i>Professore di matematiche</i> nel Real Collegio Militare, nella Scuola di Ponti e Strade, ec.
. 18	TRUDI N. — <i>Professore di Analisi sublime</i> nella R. Università degli studi ec. — Già socio corrispondente dal 25 settembre 1845.
. . . dicembre 19	VALLE CES. MONTICELLI DELLA — <i>Consigliere</i> nella G. C. de' Conti.
.	ROCCO N. c. — <i>Procuratore Regio</i> sost. presso la G. C. C. di Napoli.
1854 maggio 9	SCACCHI A. — <i>Professore di Mineralogia</i> , e direttore del Gabinetto corrispondente nella R. U. degli studi.
1854 maggio 9	GASPARIS A. DE, c. — <i>Professore di Astronomia</i> ec. nella R. U. degli studi, ed <i>Astronomo aggiunto</i> nel Reale Osservatorio di Capodimonte.
. . . novembre 20	MARTINO A. DE — <i>Professore</i> nel Real Collegio Veterinario.

Avv. — Il c. dinota *cavaliere*; il C. *commendatore*;
il G. C. *Gran Croce*.

MEMORIE

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

S. 1105. C.

MEMORIE

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DAL 1852 IN AVANTI

RIPARTITE NELLE TRE CLASSI

DI

MATEMATICHE, SCIENZE NATURALI, E SCIENZE MORALI

VOL. II.

CHE CONTIENE QUELLE DAL 1855 AL 1857.

NAPOLI

TIPOGRAFIA DI FEDERICO VITALE

2 e 5 - Largo Regina Coeli

1857

NOTIZIE PRELIMINARI

AL PRESENTE VOLUME

AVVERTIMENTO

Queste notizie corrispondono al Rendiconto accademico, pe' sunti della parte scientifica degli atti verbali, per le relazioni sulle Memorie approvate, e per qualche articolo degno di esser ricordato; che però per quelle del 1855 appena verrà accennato ciò, che nel Rendiconto di questo anno trovasi già pubblicato, e quindi a comune conoscenza. Lo stesso pel 1° bimestre del 1856, che l'era già pubblicato, quando all'Accademia fu finalmente concesso poter dare alle stampe, come seguito del Rendiconto, le Memorie de' soci; e però esse saranno più particolareggiate dal marzo di tale anno in poi; e comprenderanno anche qualche lavoro letto all'Accademia, ma non sottomesso alla sua censura.

MEMORIE

APPROVATE PER L'ANNO 1855.

MATEMATICHE

Passarono le prime tre tornate dell'anno 1855 senza alcuna lettura di lavori accademici; da che veniva indotto il segretario perpetuo, per non lasciarle proseguire in simil modo, a ricercare tra le sue antiche carte qualche cosa da poterla decentemente presentare a' suoi colleghi, ed occupare l'Accademia in più di una tornata, quante volte non vi fossero Memorie di altri soci. Fortunatamente riuscivagli rinvenire un antico lavoro su le *quantità negative*, che ebbe formato il soggetto di sue lezioni nella Università degli studi di Napoli nel 1806, come meglio rileverassi dalla introduzione al medesimo.

La lettura delle diverse parti di questo lavoro teneva occupata l'Accademia per le cinque tornate, che precedevano le vacanze della primavera dell'anno 1855. Al finir di queste il socio corrispondente ab. *del Grosso* poté presentarle la sua Memoria: *Sulle funzioni generatrici di alcune rimarchevoli serie trascendenti*, che le aveva promessa fin

dal gennajo, e che ottenuta la regolare approvazione viene ora pubblicata. (1)

Nella tornata del 6 luglio il socio *Flauti* informava l'Accademia sulla pubblicazione di tre scritti di *Lionardo Pisano*, trasportatore dell'Algebra dall'Oriente in Italia, e promotore di tale scienza verso la fine del dodicesimo secolo e l'inizio del seguente. Erano stati tali tre scritti rinvenuti, dal sig. principe *Boncompagni* romano, diligente e dotto ricercatore di opere inedite, e memorie d'illustri italiani de' primi tempi di nostra coltura scientifica, prima di altre nazioni, nella biblioteca Ambrosiana di Milano. Riguardava l'un di essi il tanto desiderato *Liber Quadratorum*, di cui un esemplare n'ebbe esistito nella biblioteca dell'ospedale di S. Maria Nuova di Firenze, il quale suppresso fu miseramente disperso, e probabilmente distrutto, come con dispiacere ricordiamo avvenuto presso noi di molte preziose opere, diplomi ed altre antiche carte con la suppressione delle biblioteche ed archivi de' monisteri per tutto il regno, ne' primi anni del corrente secolo. Il dotto e laborioso *P. Cossali*, dopo averne fatto invano ricercare in Firenze dal bibliotecario della *Riccardiana*, si vide finalmente costretto a rilevarne il contenuto in esso dall'informe e confusa esposizione, che tre secoli dopo n'ebbe data *Luca Paccioli*, nella sua *Summa de Aritmetica, Geometria* ec., ed avendolo rivestito nelle forme algebriche moderne, il recava nella sua elaboratissima opera dell'*Origine e trasporto dell'Algebra in Italia*, rendendo alla storia di questa scienza un importante servizio.

(1) Di essa ne fu inserito un sunto, fattone dall'autore, nel *Rendiconto*, a pag. 130 e 131.

L' altro di tali scritti, che piacque a *Lionardo* intitolare *Flos*, e ne assegnava il motivo nell' introduzione ad esso, che indirizzava al Cardinal Diacono in Cosmodin, così dicendogli: *hunc libellum ad laudem et gloriam nominis vestri compositum florem ideo volui titulari, quia illa vobis florida clericorum elegantia radiantibus dictavi, atque etiam quia ibi nonnullae sunt floride quamquam nodose appositae quaestiones, tanquam geometricae, quam arithmeticae indagatione vigili sic probabiliter enodate, ut nedum non solum floreat in se ipsis, immo et quod per eas, velut ex radicibus plantulae emergunt innumere quaestiones* (1). . .

In fatti in esso egli tratta alcune quistioni indeterminate su' numeri, ed un problema geometrico, primo albore dell' uso dell' Algebra nella Geometria.

Di questo n' è una continuazione il terzo MS. intitolato: *Epistola suprascripti Leonardi ad magistrum Theodorum philosophum domini Imperatoris*.

Al certo il rinvenimento di tali MSS. nulla aggiugne alla scienza analitica de' moderni, tant' oltre prodotta; ma è ben atto a mostrare quali furono i principii di essa, e quali stenti provarono que' primi maestri, che si adoperarono a farla conoscere, ed a promuoverla. Tra le intricate ricerche di *Lionardo* ravvisasi anche, non senza sorpresa, taluna verità algebrica, la quale non poco onora i moderni, per averla di proprio conio riprodotta in modo generale. Finalmente non è ultimo pregio di tali MSS. la conoscenza che si ha da essi de' nomi di alcuni dotti filosofi e matematici, che formarono la Corte regia di quel magnanimo nostro sovrano ed imperadore *Federico II*, che

(1) L' ortografia che quì ed in appresso vedesi, è quella dell' originale MS.

seppe essere prode guerriero in battaglia , legislatore non ultimo sul trono , e dotto al pari di ogni altro de'suoi tempi nella vita privata , avendo ridotta la sua Corte ad una forma di Accademia , che per verità così avrebbe dovuto esser considerata nella storia di queste. (1)

Perveniva in Napoli, nell'agosto di questo anno, il vol. III. delle *Biografie* dell' illustre *Arago* , scritte dottamente , con la solita sua eleganza, e piene di aneddoti da renderle interessanti principalmente per coloro, che furono da noi vivendo conosciuti ; ed il socio *Flauti*, non senza sua istruzione e piacere , si diede a leggerle. Il dotto *Arago*, allontanandosi dal principale scopo, che nella qualità eminente di segretario perpetuo dell' Accademia delle scienze dell' Istituto di Francia si aveva prefisso, di andar , cioè , ramemorando la vita scientifica di que' distinti suoi colleghi , che morte aveva tolti a quel corpo cospicuo e ben di antica fama , volle anche ricordare le memorie de' più insigni coltivatori dell' Astronomia a' loro tempi , de' quali notissimo n' era il merito e il da loro operato , e vite ed elogi n'erano stati con intelligenza delle loro opere pubblicati. Fra essi comprendevansi i tre grandi riformatori della scienza della Natura , il *Galilei* , il *Cartesio* , il *Newton*. Parziale pel suo compatriotta, non ebbe tralasciata minuzia anche fuori luogo , che potesse offendere , fosse pure in infinitesima parte , la vita anco privata del *Newton* ; ma tutt' i suoi maggiori sforzi critici furono rivolti avverso il *Galilei*, discendendo fino alla più bassa satira.

(1) Questa relazione accademica del *Flauti*, vedesi inserita nel *Rendiconto* per l'anno 1855.

Dispiaciuto da una tale lettura il socio *Flauti*, che per la sua età, e per le molte occupazioni accademiche non avrebbe voluto imprendere egli un esame critico di tale articolo dell' *Arago*, che dovea necessariamente dar luogo a riscontri di non poche opere, ne raccomandava l'adempimento a più di un suo collega, stimandolo anche proprio più di lui a sostenere l'impegno; ma non vedendo principio alle promesse fattegliene, profittando delle vacanze autunnali, imprendeva ad occuparsene esso alla meglio che poteva riusciregli, anche per la mancanza assoluta in cui si era presso noi della vita del *Galilei* scritta dal *Nelli*, sebben resa pubblica in Firenze fin dal 1818, e della interessante pubblicazione di tutte le di lui opere edite ed inedite, che ne stava giudiziosamente terminando l'*Alberi*, delle quali appena gli riuscì avere cinque volumi della corrispondenza. Non ostante tali mancanze egli compiva in quel ristretto periodo di tempo tal suo lavoro alla meglio che poteva, e nel novembre seguente leggevalo all'Accademia in due tornate successive, che rimastane soddisfatta, più forse per amore e giustizia dovuta verso uno de' più grandi ingegni italiani, che pel merito di esso ne deliberava il pronto inserimento nel *Rendiconto*, ove vedesi pubblicato col titolo di: *Esame critico di ciò che l'Arago ebbe scritto sulle invenzioni, scoperte ed opere di Galileo Galilei*. Questo tumultuario lavoro del *Flauti* fu di spinta al dotto editore *Alberi*, che aveva nelle mani tutti i preziosi MSS. del *Galilei*, favore singolare concessogli dalla munificenza veramente reale del Gran Duca di Toscana, e però poteva ribattere talune proposizioni dell'*Arago*, non congetturando e ragionando, ma con fatti, ad intraprendere

un consimil lavoro, che seguentemente ebbe pubblicato nel volume di *Supplimento* alla sua distinta edizione, intitolandolo: *Esame della biografia del Galileo scritta da Francesco Arago*; del quale avendone gentilmente inviati due esemplari al *Flauti*, costui ne rendeva conto all'Accademia. Ed egli l'aveva già precedentemente informata di altra pubblicazione dello stesso *Alberi*, di rivendica al gran *Galilei* dell'uso del pendolo ad esatto misuratore del tempo. (1)

Nella tornata del 6 luglio, il socio *Nobile* indicava all'Accademia un lavoro del barone *Dembowski*, passionato coltivatore dell'Astronomia, che però si fu ridotto a vivere sotto il bel cielo di Napoli, stanziando nell'amena contrada di S. Giorgio a Cremano, volgarmente detta *Santojorio*, ove ebbe stabilito un privato Osservatorio, provvedendolo di ottimi strumenti. Tal lavoro riguardava le *misure micrometriche di 127 stelle doppie* da lui osservate; e per esso affidatone l'esame allo stesso socio *Nobile*, ed al suo collega *Capocci*, dietro loro ragionata relazione (2) veniva approvato per gli Atti, ed ora comparisce pubblicato in questo volume.

(1) Tornata del 1° aprile 1856.

(2) *Rendiconto* pel 1855, bimestre di luglio ed agosto.

SCIENZE NATURALI

Quattro Memorie per gli Atti riceveva l'Accademia in quest' anno , tre dal socio ordinario sig. *O. Costa*, una dal suo antico corrispondente in Napoli prof. *Giardini*, del quale , non senza dispiacere soffriva la perdita nel seguente anno. Delle Memorie del *Costa*, la prima, ch'egli leggeva nella 1^a tornata del giugno, e gli veniva approvata nella seguente , riguardava la *descrizione di alcuni pesci fossili*, da lui asseriti *del Libano*, per tali avendoli ricevuti dall'ab. *Gordano*, nostro professore di Fisica (1). La seconda e la terza riguardano *i foraminiferi fossili*, l'una *delle Marne blu del Vaticano*, l'altra *delle Marne terziarie di Messina*, che l'Accademia ebbe approvate a relazione dell'intera classe (2).

La Memoria del socio corrispondente *Giardini* da lui letta fin dalla tornata del 23 settembre del precedente anno, riguardava *una gran Calamita temporanea animata dal solo magnetismo terrestre*: di essa ne venne affidato l'esame all'intera classe di Scienze Naturali, che dopo ripetute osservazioni e sperimenti, eseguiti nel gabinetto di Fisica della regia Università degli studi diretto da esso *Giardini* , intervenendovi altri distinti professori , nella tornata del 9 settembre di questo anno , ne faceva leggere lunga e ragionata relazione dal membro di essa *Antonio de Martino*, conchiu-

(1) La relazione de' commissari *Tenore* , *Gussone* , *Palmieri* e *Scacchi* relatore , può leggersi a pag. 49 e 50 del *Rendiconto*.

(2) Il rapporto vedesi inserito nel *Rendiconto* da pag. 77 a 79.

dendo , che nell' aspettativa della stampa negli Atti , *ne venisse inserito un largo sunto nel Rendiconto , e venisse incoraggiato l' autore a proseguire la serie delle ricerche intorno alle singole azioni , che si sviluppano nel di lui nuovo apparecchio posto in movimento* (1) e l' Accademia in vista di queste l'approvava per gli Atti. Ma perchè il *Giardini*, sicuro di arricchire tal suo lavoro di nuovi fatti, n' ebbe consegnato pel sunto dimandato , e pubblicato la stessa Memoria , e sorpreso da morte non potè adempiere a ciò che intendeva aggiungervi in perfezionarla , essa non si vedrà però compresa nel presente volume.

(1) Tale relazione leggesi da pag. 81 ad 87 del *Rendiconto* pel settembre ed ottobre , al quale segue il lavoro dimandato fino a pag. 106.

MEMORIE

APPROVATE NELL' ANNO 1856.

MATEMATICHE

La commissione destinata all' esame di cinque altre delle diverse soluzioni date dal socio *cav. de Gasparis* al problema della determinazione dell' orbita di un pianeta , variando ne' dati , e nelle condizioni per esso, nella tornata del 4 gennajo leggeva un particolareggiato rapporto su tutte esse , in seguito del quale l' Accademia ne approva-va l' inserimento ne' suoi Atti. (1)

Lo stesso socio nel novembre di questo anno presentava all' Accademia un lavoro di *Formole e Tavole per la*

(1) Il *de Gasparis* ebbe cominciato a dare tali sue soluzioni su di uno stesso problema, fin dal 1854, ed i soci *Tucci*, *Padula* e *Nobile*, incaricati dell' esame delle prime due, ne davano favorevole parere nel settembre di tale anno, in vista del quale l' Accademia le approvava. Seguentemente ne ebbe date cinque altre nel corso dell' anno 1855, che venivano approvate nel gennaio 1856; e però se ne vede recata la relazione de' commissarii nel 1° fascicolo del *Rendiconto* per questo anno; ma l' unità dell' argomento esigendo che esse venissero insieme riunite, permettendolo il ritardo della stampa, si veggono però inserite nel vol. 1, pel 1854; di che fu anche accennato nelle *notizie preliminari* a tal volume.

soluzione del problema di Keplero, che veniva inviato all'esame de' soci cav. *Capocci*, *Nobile*, *Bruno*, *Trudi*; e l'Accademia glielo approvava, udita la seguente

RELAZIONE

Il problema che va sotto il nome di problema di *Keplero*, e che ha per obbietto la soluzione di una semplicissima equazione in cui entra l'*anomalia media*, l'*eccentrica* e l'*eccentricità*, è problema di frequente uso nella pratica astronomica, e però sommamente utile ad averne una spedita e pronta soluzione. Nondimeno, se per via di operazioni finite e brevi, si presenta la soluzione quando si assume per ignota l'*anomalia media*, ben altrimenti avviene quando cercasi l'*anomalia eccentrica*. Laonde chiari geometri fecero da prima ricorso a regole pratiche e false posizioni, e poscia per mezzo della teorica delle serie, porsero, di quest'ultimo caso, soluzioni abbastanza comode ed esatte, le quali ben suppliscono ai bisogni della scienza, quando le orbite hanno piccole *eccentricità*, come quelle di tutti i pianeti primarii.

Ma poichè tra i numerosi asteroidi di cui la moderna astronomia si è arricchita, ve ne ha di quelli le cui orbite hanno grandi *eccentricità*; e d'altra parte, le orbite delle comete, e spesso quelle delle stelle doppie, son del pari molto *eccentriche*, le varie serie date dai Geometri, benchè dimostrate tutte convergenti dal celebre *Jacobi*, riescono tuttavia, nel surriferito caso, come ne avverte il *Carlini*, di lentissima convergenza, e però non sempre opportune all'uso della pratica. Per ovviare ad un tale inconveniente, il *Gauss* escogitò una regola pratica di cui grandemente si giovano gli astronomi; e d'altra parte, il *Carlini* ed il 2° *Herschel* costrussero ingegnose macchine per conseguire con esse, senza computo alcuno, l'ignota che si domanda.

La regola del *Gauss* torna, in generale, facile e spedita, ma non mancano de' casi, e segnatamente quelli testè menzionati, in cui è mestieri ricorrere a varii tentativi, e a successive approssimazioni, che le tolgono in parte il pregio della brevità. Il lavoro del nostro socio, ha

per obbietto di ovviare ad un tale inconveniente, di render generale la regola del *Gauss*, ed offrire, in tutti i casi, soluzioni pronte e spedite. Egli vi è pervenuto trovando le soluzioni diverse che può ammettere l'equazione fondamentale del problema nel caso che l'anomalia media e l'eccentrica variano di grado in grado, e che l'eccentricità non eccede l'unità; e queste soluzioni le ottenne, non con calcolare i singoli e numerosi casi che montano intorno a 1000, il che lo avrebbe condotto ad operazioni lunghissime, ma con un'artificio semplice ingegnoso, e, quel che è più, tale da potersi applicare ad una classe molto estesa di equazioni trascendenti. Le tavole ch'egli ne ottenne sono brevi, e porgono colla sola ispezione di esse, per qualsivoglia valore dell'eccentricità quello dell'incognita approssimato entro un grado; e di poi, con semplicissime proporzioni, approssimato, per dir poco, a meno di un minuto.

La commissione non pure ha seguito a parte a parte il lavoro, quale lo ha esposto l'autore, ma ha tolto a provare il metodo e le tavole che ne formano lo scopo, per via di esempj particolari; e dai quali riportò ella piena convinzione, essere il surriferito lavoro pregevole ed utilissimo ad un'importante ramo di Astronomia pratica, e però meritevole di formar parte dei nostri Atti.

FRANCESCO BRUNO

NICOLA TRUDI

ERNESTO CAPOCCI.

ANTONIO NOBILE *relatore*

Questa circostanza risvegliava alla memoria del socio *Flauti* una soluzione di tale importante problema, che ebbe esercitato sempre le menti de' più grandi geometri ed astronomi, dal *Keplero* in poi, la quale doveva esistere tra le carte del fu insigne nostro socio *Nicola Fergola*, nè mancava ricordare ancora ciò che vi ebbe aggiunto il costui discepolo, e fu suo collega *Giuseppe Scorza*, e rinvenute tali carte ne faceva giudice il *de Gasparis*, dal quale ne riceveva i seguenti riscontri.

Reale Specola 14 dicembre 1856.

CHIARISSIMO SIGNOR SEGRETARIO

Ho la viva soddisfazione di potervi annunziare, che la soluzione del problema di *Keplero* data dall'insigne geometra *Nicola Fergola*, ed applicata a tutti i pianeti cognitivi a suoi tempi, è diretta, di facile applicazione, e porge un valore abbastanza esatto dell'incognita che si cerca. La serie generale dedotta dall'equazione fondamentale mediante un teorema di *Lagrange*, e limitata ai soli termini contenenti i cubi della eccentricità, si trova di essere più complicata, e richiede calcolazioni più lunghe nel farne la pruova.

Il *Fergola* nel dedurre la sua equazione ha ritenuto fino ai termini moltiplicati pel quadrato dell'eccentricità, e ciò gli era ben permesso, attesochè le orbite allora conosciute erano pochissimo eccentriche. Per questo fatto tale equazione si dovrebbe trovare in condizioni più sfavorevoli della serie generale, nella quale son ritenuti anche i cubi. Intanto entrambe le formole danno errori piccolissimi e dello stesso ordine, del valore, ordinariamente, di pochi secondi.

L'equazione del *Fergola* è

$$\text{sen.} E = \frac{\text{sen.} M}{\sqrt{1 + e^2 - 2e \cos. M}}$$

quella dedotta col teorema di *Lagrange* è

$$E = M + e \text{sen.} M + \frac{e^2}{2} \text{sen.} 2M + \frac{e^3}{8} (3 \text{sen.} 3M - \text{sen.} M).$$

alle quali applicheremo un esempio numerico.

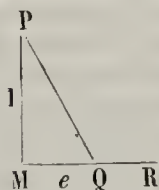
È facile vedere che l'equazione $M = E - e \text{sen.} E$ è verificata da $M = 17^\circ 8' 4''.67$, $E = 19^\circ$, $e = 0,1$. Ora calcolando E colla equazione del *Fergola* avremo

$E = 19^\circ 0' 1''.3$, onde l'errore è $+ 1''.3$. Dalla seconda formola si ha $E = 18^\circ 59' 55''.2$, onde l'errore è $- 4''.8$.

La rimarchevole relazione del *Fergola* mi ha suggerito una considerazione geometrica che credo utile far notare, ed eccola

e

Il radicale $\sqrt{1+e^2-2e\cos M}$ indica evidentemente il terzo lato di un triangolo di cui i lati sono l'unità e l'eccentricità, ed M l'angolo compreso.



Sia MPQ un tale triangolo. È chiaro che sarà
 $PQ = \sqrt{1+e^2-2e\cos M}$, e che avranno luogo le relazioni

$$\frac{\sin M}{PQ} = \frac{\sin P}{e} = \frac{\sin Q}{1}$$

Ma si ha

$$\frac{\sin M}{PQ} = \frac{\sin M}{\sqrt{1+e^2-2e\cos M}} = \sin E$$

avremo dunque

$\sin E = \sin Q$, e quindi $E = PQR$.

Sorge perciò il teorema : *Ove si formi un triangolo che abbia l'unità, e l'eccentricità (supposta piccolissima) per lati, e l'anomalia media per angolo da questi compreso, l'anomalia eccentrica (l'incognita del problema) sarà contrassegnata dall'angolo esterno che si ha prolungando il lato eguale all'eccentricità.*

Questo teorema che si verifica soltanto per le orbite poco eccentriche, poteva esser visto (per approssimazione) anche senza verun calcolo ; ma devesi all'analisi del *Fergola* il risultato che esso si verifica precisamente nel caso in cui è permesso di trascurare i termini contenenti l'eccentricità a potenza superiore alla seconda.

Cav. ANNIBALE DE GASPARIS.

Sul metodo del Prof. Scorza per risolvere il problema di KEPLERO

Il metodo proposto dal prof. *Scorza* per risolvere il problema di *Keplero* si appoggia alle continue approssimazioni. Il primo valore dell'incognita da lui assunto è quale sarebbe dato dal calcolo dei due termini $M + e \sin M$. Si rileva da ciò che pel caso di eccentricità sensibile riesce impraticabile, e pel caso di eccentricità piccole, è al medesimo preferibile il metodo di *Nicola Fergola*. È quindi giustissimo il

parere datone tempo fa da una commissione di quest'Accademia di non tenerne parola. L'aver intanto il nostro dotto ed operoso segretario perpetuo testè comunicato all'Accademia il metodo del *Fergola* (sconosciuto alla prelodata commissione) fa in me sorgere il pensiero, che tali due metodi possono servir di complemento l'uno all'altro, e servirsi di scambievolmente ajuto.

Ed infatti il metodo del *Fergola* benchè con prontezza e direttamente dia il valore dell'incognita vicinissimo al vero (per le piccole eccentricità) non fornisce però le regole onde correggere il valore trovato, e renderlo esatto quanto si voglia. Il metodo dello *Scorza* invece se da un lato è di penosa applicazione, perchè parte da un valore dell'incognita sensibilmente diverso dal vero, dà invece le regole onde renderlo esatto. Basterà dunque, onde il problema resti risoluto prontamente ed esattamente, che il primo valore dell'incognita da assumere nel metodo di *Scorza* sia quello fornito dal metodo di *Fergola*. Servirà dunque questo ad esibirne il valor prossimo, servirà l'altro a correggerlo con tutto il rigore richiesto.

Dalle prove numeriche da me fatte ho rilevato, che l'impiego dei due metodi conduce a risultati esatti e prontamente ottenibili quando se ne voglia far l'applicazione a tutti i pianeti attualmente conosciuti. Rimane però ribelle il caso delle eccentricità cometary, o di quelle che spesso si verificano ne' sistemi binarii stellari.

ESEMPIO

Assumo l'eccentricità $e = 0,3$ ch'è la maggiore che si verifica nelle orbite de' pianeti (l'orbita del nuovo pianeta *Polinnia*) — L'equazione adunque

$$M = E - e \operatorname{sen} E$$

è verificata da

$$M = 17^{\circ} 0' 31'',44 \quad E = 24^{\circ} 0' 0'',00 \quad \log e = 9,477121$$

La formola di *Fergola*

$$\operatorname{sen} E' = \frac{\operatorname{sen} M}{\sqrt{1 + e^2 - 2e \cos M}}$$

dà subito

$$E' = 24^{\circ} 1' 26'',87$$

Fin qui il metodo di *Fergola*; ciò che segue è secondo lo spirito del metodo di *Scorza*. Trovando l'anom. media corrispondente ad E' , si ha

$$M' = 17^\circ 1' 34''.48$$

ed il valor corretto di E' sarà

$$E' + \frac{1}{2}(M - M') = E'' = 24^\circ 0' 55''.35$$

e trovando l'anom. med. M'' corrispondente ad E'' si ha

$$M'' = 17^\circ 1' 11''.57,$$

$$\text{Un terzo valore } E''' \text{ sarebbe } E'' + \frac{1}{2}(M - M'').$$

Ora si porrà

$$E - E' : E' - E'' :: M - M' : M' - M''.$$

e sostituendo i numeri trovati,

$$E - E' : 31''.52 :: -63''.04 : 22''.91$$

$$\text{Onde sarà } E - E' = -1' 26''.73$$

cioè

$$E = E' - 1' 26''.73 = 24^\circ 0' 0''.14$$

risultato esatto entro un decimo di minuto secondo.

In vista di siffatti ragionati pareri del nostro socio cav. *de Gasparis*, il *Flauti* presentavali all'Accademia, nella tornata del 28 novembre, che approvava l'inserimento delle due soluzioni nel presente volume.

(1) È necessario qui avvertire, che la maggior difficoltà si è superata col metodo di *Fergola*. In fatti i risultati di tal metodo possono essere corretti indipendentemente dalle formole dello *Scorza*. Così calcolato che sia *sen. E* colla formola del *Fergola*, la correzione ΔE di E si avrà da

$$\Delta E = \frac{M - E + e \text{ sen. } E}{1 - e \cos. E}$$

e facendo $E + \Delta E = E'$, la seconda correzione, raramente necessaria, sarà

$$\Delta' = \frac{M - E' + e \text{ sen. } E'}{1 - e \cos. E'}$$

Chiudevasi questo anno accademico con approvarsi le due Memorie *sulla dipendenza scambievole delle figure*, che il socio corrispondente sig. *Battaglini* aveva dal giugno precedente presentate all'Accademia, e che non prima del dicembre di questo anno potettero ottenere dai commissari destinati ad esaminarle la seguente favorevole

R E L A Z I O N E

Napoli dicembre 1856

SIGNORI

Fin da giugno dell'anno già finito il professore sig. *Giuseppe Battaglini*, attualmente nostro socio corrispondente, leggeva a questa Accademia due memorie di Geometria, riguardanti, in generale, la *dipendenza scambievole delle figure*; ed ora la vostra commissione adempie al dovere di darvi conto di questi lavori.

Ecco in breve lo scopo e l'oggetto delle due memorie — Muove il sig. *Battaglini* dalle teoriche e dai metodi, dei quali l'illustre *Chasles* ha arricchito la Geometria, e si propone di stabilire la interessante teoria della omografia delle figure, indipendentemente dalla considerazione del rapporto anarmonico. Non è già ch'egli mirasse a prescrivere questa così detta funzione anarmonica, che anch'essa ha la sua propria importanza allorchè trattasi di relazioni metriche; ma l'autore osserva che, se trattasi di proprietà di posizione, questa funzione non è più indispensabile, e la sua introduzione non fa che complicare le ricerche con l'uso di equazioni e di trasformazioni algebriche, il campo delle quali non è certo quel ramo che vuol chiamarsi *pura geometria*.

Questa idea del sig. *Battaglini* è giusta, ed a noi sembra, che l'abbia felicemente attuata. Egli comincia per dare novelle definizioni delle divisioni omografiche, e dei fasci omografici, mentre quelle date dallo *Chasles*, essendo precisamente dipendenti dal rapporto anarmonico, erano disadatte allo scopo cui mirava. Da queste definizioni deduce in modo straordinariamente semplice le principali proprietà del-

la Omografia ; e , dimostrando tra l'altro l'esistenza dei punti doppi e de' raggi doppi con sole considerazioni geometriche , costruisce questi elementi sempre indipendentemente dalla nozione del rapporto anarmonico. Ben si comprende che , una volta ottenuti questi risultamenti , la teoria della omografia è già stabilita ; ma l'autore di ciò non contento , ha voluto in una seconda memoria mostrar coi fatti ciò che può valere la teoria così fondata, applicandola alle proprietà le più importanti delle linee di 2° ordine e di 2ª classe. Quivi non è già quistione di nuovi teoremi ; ma la novità e la semplicità delle dimostrazioni , unicamente appoggiate ai pochi principii da lui esposti, son cose ben degne di considerazione ; e provano che il suo concetto è senza dubbio di quelli che possono concorrere al progresso della scienza geometrica.

La vostra commessione avea già fermato di darvi questa relazione intorno alle due memorie del *sig. Battaglini*, e di proporvi la loro pubblicazione negli Atti accademici, quando un libro pubblicato a Parigi sul finir dell'anno dal *sig. Jonquieres* , uffizial di marina , e da poco conosciuto in Napoli (1), le ha palesato, che questo distinto uffiziale, non che lo stesso *Chasles* hanna avuto la medesima idea di sottrarre la teorica della omografia dal rapporto anarmonico. Noi ciò non diciamo per discendere ad alcun paragone , ma solo per trarne una pruova di più della importanza del concetto del *sig. Battaglini*, da lui stesso pria di ogni altro attuato.

F. PADULA

F. P. TUCCI

N. TRUDI *relatore*

Dopo la breve esposizione de' lavori della classe matematica per gli Atti , l'è ben che accenni anco di taluni altri di *Note* ancor degne di qualche considerazione.

(1) Il *Jonquieres* mi ebbe inviato in dono tal sua pregevole produzione, fin dalla metà dell'anno 1856 — *Il s. p. F.*

Il socio *Flauti*, nel suo *Esame critico* ec. in risposta all' articolo *Galilei* dell' *Arago*, del qaale è stato già detto, aveva dovuto ribattere la proposizione da costui avventata, che *gli autori italiani avessero preteso far onore al Galilei dell' applicazione del pendolo come regolatore degli orologi, in detrimento dell' Ugenio, al quale questa scoperta è stata generalmente attribuita*. A tale uopo egli limitavasi da una parte a mostrare, che a questa opinione inchinarono distintissimi suoi connazionali, tali che il *Montucla* (1), il *Bailly* (2), *La Lande* (3), *Delambre* (4), ed anco il *d' Alembert* e il *Bossut* (5); mentre dall'altra mostrava dell' opinione opposta, e più di quello che avrebbero dovuto, lo stesso *Viviani* (6), sì affezionato al suo maestro, che ne aveva alle mani argomenti palpabili, che ebbe taciuti, ed il *Frasi* (7), scrittore, al dire dell' *Arago*, dello più accurato e compito elogio del *Galilei*, il quale manifestamente dice, che *in tale invenzione il Galilei non vi ebbe altro merito, se non di averne somministrate le prime idee, e di aver eccitati i geometri a svilupparle, e ad applicarle i meccanici*. Aggiungeva esso *Flauti*, che il *Nelli*, il quale tanta premura ebbe mostrato in onorar la memoria di quel suo illustre concittadino, da essersi occupato a recarne le più minute cose talvolta anco super-

(1) *Hist. des Mathem.* p. IV. l. 111.

(2) *Hist. de l' Astron.* l. 111, art. 20.

(3) *Astronomie* art. *Galilei*.

(4) *Hist. de l' Astron. mod.* art. *Galilei*.

(5) *Encicloped.* art. *Pendule*.

(6) *Vita di Galilei* premessa all' ediz. delle sue Opere, nelle edizioni di Firenze e di Padova.

(7) *Elogio del Galilei*, Milano 1778.

flue, in tale assunto non ebbe ritegno di sforzarsi a volerli negare ciò che ben risultava da una lettera del *Viviani* al principe *Leopoldo de' Medici*, che era in sue mani, mentre la poneva a conoscenza del pubblico (1). Non furon dunque gl'italiani rei di quella ingiustizia di cui gli accusa l'*Arago*. E se il *Tiraboschi* inclinò dalla parte del *Galilei*, non mancò di farlo con buone ragioni, appoggiandosi al *Nelli*, e con molta circospezione.

Avendo il *Flauti*, per tal modo adempito in ribattere le proposizioni dell'*Arago*, si limitava a conchiudere questo suo articolo, con indicare un lavoro in tale argomento letto dal professor *Veladini* all'Istituto Lombardo, di cui allora trovavasi degno segretario, intitolato: *Sulla prima applicazione del pendolo agli orologi*, del quale ne avea ricevuto dall'autore un esemplare (2).

Fin qui però la proprietà del *Galilei* per tale invenzione non cresceva che in probabilità a suo favore. Ma il diligente editore di tutte le di lui opere, cui era dato di poter con fatti riconoscere un tale assunto, occupatosi a fare le più accurate e minuziose ricerche tra' costui Mss., otteneva il mezzo a togliere ogni dubbio sulla invenzione dell'adattamento del pendolo a misuratore del tempo dovuta al *Galilei*; ed egli ne componeva una dotta dissertazione, da farla comparire nel volume di *Supplimento* alla sua pregevole edizione: ed avendone preventivamente inviati due esemplari ad esso *Flauti*, costui nella tornata dell'11 luglio ne presentava uno all'Accademia, ponendola a gior-

(1) Una tal lettera vedesi riportata dall'*Alberi* nel t. XIV. della sua ediz.

(2) Questa dotta memoria del *Veladini* vedesi pubblicata nel vol. VI di quelle di tale Istituto.

no dello scopo e del contenuto in esso. Tal dissertazione intitolata : *dell' Orologio a pendolo di Galileo Galilei* aggiungeva alla valevole testimonianza , che lo stesso *Viviani* ne ebbe fatta , nella lettera scritta al principe *Leopoldo de' Medici*, il disegno della macchina descritta : ma che vale ripetere quì ciò che sì bene e giudiziosamente trovasi esposto dall' *Alberi* nella sua dotta dissertazione.

Nella tornata seguente il nostro rispettabile presidente, sig. marchese *Fortunato* , presentava all'Accademia un esemplare della recente ristampa fatta in Parigi , a cura di *J. B. Biot* e *F. Lefort*, del *Commercium epistolicum de Analysis promota*, cc., pubblicato in Londra dal *Collins* la prima volta nel 1712, e poi ristampato nel 1722 , con le giunte dell'*ad lectorem* , e della *Recensio libri*, e sempre sotto gli auspicî di quella cospicua Società Reale. Tal novella ristampa dopo sì lungo tempo, e per una contesa di priorità e di merito d' invenzione del metodo analitico infinitesimale, rimasta solo per notizia nella storia delle Matematiche , poichè per nulla interessante al progresso de' moderni metodi, doveva ben muovere le curiosità di conoscere la cagione onde promossa ; ed il presidente voleva all'oggetto incaricarne una commissione : ma il segretario perpetuo a farla breve ne assunse egli la cura, e vi adempiva per la prossima tornata con la seguente relazione.

SULLA RECENTE EDIZIONE

DEL COMMERCIIUM EPISTOLICUM J. COLLINS ET ALIORUM
DE ANALYSI PROMOTA ETC.

Pubblicata in Parigi dall'illustre J. B. Biot, anteo membro di quell'Accademia delle scienze, corrispondente della nostra dal 1818, ec. e dal sig. F. Lefort ingegnere in capo del Corpo di ponti e strade dell'Impero Francese.

Dopo circa il secolo e mezzo da che tra il *Newton* e l'*Leibnitz*, e le loro scuole, o piuttosto le nazioni inglese e tedesca agitossi vivamente la quistione a chi di queste due menti straordinarie si dovesse l'invenzione del metodo degli infinitesimi, che dall'uno venne detto *Metodo delle Flussioni*, dall'altro *Metodo differenziale*, ciascuno di essi riguardando alla genesi degl'infinitesimi; e che cessate le gare, che danno sempre luogo a' moti dell'amor proprio o nazionale, producono malumori, disturbano più utili lavori, principalmente per chi è ben atto a farne, e sono anco cagioni d'inquietudini, che amareggiano il vivere, per cui il *Newton* solea ripetere, in tali occorrenze: *Amisi tranquillitatem rem prorsus substantialem* (1). Mentre le ossa onorate di que' due uomini distintissimi a' quali le Matematiche debbono tanto riposano tranquille, e che cessata la stizza, ed attutate le passioni, i geometri tutti riconoscenti all'uno ed all'altro di questo nuovo potentissimo strumento somministrato alle Matematiche, pe' loro grandi, e pronti progressi, concordemente ne riconoscono da ciascun de' due, senza saputa dell'altro, l'invenzione, aggiugnendo, che nell'ordine de' progressi dello spirito umano, da *Archimede* a *Newton* e *Leibnitz*, e per una serie d'intermezzi, che avevano avuto luogo sulla scienza dell'infinito, era questa pervenuta al punto, che il *Caleolo differenziale*, ed il *metodo sulle Flussioni* dovevano comparire, mentre diceva a tutt'altro pensavasi, ecco schiudersi nuovamente, e senza alcun appello l'antica sopita quistione.

(1) Il *Newton* non entrò mai egli direttamente in tale contesa, promossa inconsideratamente da *Fazio Duillier*, e prodotta e sostenuta con soverchia durezza dal *Keill*.

Nel furore di essa, il *Keill* discepolo del *Newton* entrato in mezzo a vendicar qualche torto, che il *Leibnitz* aveva forse senza avvertirvi, come poi egli medesimo ebbe confessato, fatto al *Newton*, il *Keill*, diceva, trascorrè in proposizioni verso quello (1), da determinarlo a dimandare alla cospicua Società Reale di Londra, cui egli era pure ascritto, che glielne facesse ritrattare, e ne rimetteva il giudizio, di tal causa alla stessa Società Reale.

N'era di essa segretario l' *Oldenburg*, col quale stabilissi una corrispondenza col *Leibnitz* ed il *Collins*, che prese gran parte in tal quistione, e con lo spoglio di lavori di distinti geometri, e della corrispondenza con essi, per deliberazione della stessa Società Reale, pubblicavansi dal *Collins* tali atti, intitolandoli *Commereium epistolicum J. Collins et aliorum de Analysis promota etc.* Una tal pubblicazione veniva riprodotta dieci anni dopo, con la giunta di un indirizzo ad *Lectorem*, ed una *Recensio libri*, che contiene la storia di questo scientifico pialo, che l'era però già stata pubblicata fin dal 1715 negli Atti della Società Reale di Londra, e di nuovo, nell'anno stesso, tradotta in francese, nel tomo VII del *Diario Letterario*.

(1) Gli editori degli atti di Lipsia (cioè, come soggingnesi nella *Recensio*, a pag. 34, lo stesso *Leibnitz*) *cum de tractatu hoc agerent* (quello di *Quadraturis*, stampato nel 1704, ma composto dal *Newton* molto tempo prima, come ivi si dice, e nella nota a piè di pagina si vuol comprovare col detto dal *Raphson*, e con attestato del *Keill*, che cita pure l'*Halley*) *affirmabant Leibnitium fuisse primum ejus methodi inventorem, et Newtonum pro differentiis Fluxiones substituisse*, la quale espressione cagionò l'accanita lunga contesa, da che il *Keill* ritorcendo tale assertiva contro il *Leibnitz*, in una lettera inserita nelle *Transazioni filosofiche* vi diceva: *Arithmeti- cam sine omni dubio primus invenit Newtonus, ut cuilibet ejus epistolas a Wallisio editas legenti facile constabit. Eadem tamen Arithmetica postea mutatis nomine et notationis modo a D. Leibnitio in Actis eruditorum edita est.* E ciò dispiacque non poco al *Newton*, perchè ne prevede la contesa che ne sarebbe derivata. Di fatti puntone al vivo il *Leibnitz*, in una lettera in data del 4 marzo 1711 diretta allo *Sluse* vi gridava *alla calunnia*, e dimandava alla Società Reale d'imporre al *Keill* di ritrattarsi, a che costui rispondeva *esser pronto a provare la verità della sua assertiva, purchè il Newton gliene dasse permesso.* Seguentemente il *Leibnitz*, in altra lettera allo stesso *Sluse*, del 19 dicembre 1711, gli scriveva, che *sarebbe assai incivile il solo dubitare del di lui candore*, ed in essa caratterizzava il *Keill* di *hominem juvenem, rerum ante actarum ignarum, rixosum porro hominem*, ed aggiungeva che la costui proposizione l'era sicuramente eruttata senza intesa del *Newton*, al quale liberamente se ne rimetteva in pronunziare in questa causa.

L'è vero che nella pubblicazione del *Commercium epistolicum* vi si recavano i soli documenti a favore del *Newton*; ma ben quelli del *Leibnitz* vedevansi con pari forza sostenuti da lui medesimo, nelle diverse scritture inserite negli Atti di Lipsia, ed in altri giornali dotti, che a quel tempo pubblicavansi con sana critica; e *Giov. Bernoulli*, che aveva la sua gran parte all'aumento del nuovo metodo, che non poco gli deve, non mancava di pubblicare, e diffondere dappertutto, principalmente nella Germania, e nella Francia una lettera indiritta al *Leibnitz*, tacendosi il di lui nome, troppo offensiva pel *Newton*, dicendovi, che non solamente il *Newton* non era affatto l'inventore del *Calcolo differenziale*, che pubblicava col titolo cambiato di *Metodo delle Flussioni*; ma anco che esso non l'intendeva: da che veniva ben con usura compensato ciò che il *Keill* si era lasciato dire nel 1708.

Quest'acerrima lite sostenuta da uomini distintissimi non fu però, come le tante altre di simil genere, inutile per la scienza e per l'aumento di essa; poichè a sostener loro ragioni proponevansi e si risolvevano da ciascuna delle parti nuovi e difficili problemi, e nuove ricerche facevansi in aumento del nuovo metodo, ed a confermarne la utilità grandissima; da che venne finalmente indotta la scuola francese, dopo gli accaniti contrasti che vi ebbero luogo nella stessa Accademia delle scienze, a riconoscerlo. Ed in ciò molto essa dovè all'illustre marchese *de l'Hopital*, che trasmise a' suoi compatriotti quella scienza di tal Calcolo, che egli ebbe appresa da *Giov. Bernoulli*, nella dimora da costui fatta in Parigi, e propriamente nella terra di proprietà del *de l'Hopital*; e fu però ben conseguente, che quell'Accademia, ed i dotti francesi inchinassero dalla parte del *Leibnitz*.

Finalmente tale lite fu sopita, nel modo come nel principio di questa sommaria relazione ho detto, rimanendo gli atti di essa a solo dritto della storia delle Matematiche. Ma nel presente secolo essendosi introdotto il costume di andar rovistando biblioteche, per pubblicarne anche le carte, che meno interessano più la conoscenza del pubblico, un certo *C. S. Gerhardt* pubblicava nel 1849 in Berlino 2 vol. in 8° col titolo *Leibnizens mathematische Schriften herausgegeben*, da carte rinvenute nella Real Biblioteca di Hannover, facendo da esse rivivere un'antica disputa, che per nulla può più conferire al bene del-

la scienza; e da ciò sono stati poi indotti l' illustre *Biot*, ed il *Lefort*, o piuttosto costui solo, giacchè il *Biot*, sebbene dal frontespizio di tale ristampa apparisca collaboratore, ha poi dichiarato nell'*Avvertimento* di non avervi presa altra parte, che in consigliarla, e cooperarsi ad ottenere dal ministero di Pubblica Istruzione dell' Impero francese la cooperazione alla spesa per eseguirla; non senza aggiungere, che egli limitava il suo avviso alla semplice ristampa del testo originale del *Commercium Epistolicum* cc., giusta la seconda edizione datane in *Londra*, vale a dire, comprendendovi l'*ad Lectorem*, e la *Recensio libri*, de' quali due pezzi egli ne fa autore il *Newton*; di che non solo non adduce prova alcuna; ma a me pare il contrario (1), quantunque

(1. Per non lasciare tale mia asserzione senza alcun fondamento di ragioni, accennerò brevemente, che neppur breve sospetto se ne ha da' contemporanei pro e contra; ne' mai pur parola ne fu detta dal *Leibnitz* nella corrispondenza secreta che esso ebbe, per tale disputa, con l'ab. *Conti*, che trovavasi in *Londra*, e gli servì di intermezzo con la Società Reale, col *Newton* e con altri illustri geometri, che presero parte in tal quistione. E poi a chiunque conosce il procedimento di essa per ben 40 anni, e la maniera rispettosa come que'due preclari ingegni si condussero l'un verso l'altro, non persuaderà mai che la *Recensio* fosse scritta a drittura dal *Newton*, mentre in più luoghi di essa viene anco trasgredita quella decenza ed urbanità, che conviene in tutte le quistioni scientifiche; di che mi basta accennarne alcuni luoghi. A pag. 34 dell'edizione inglese vi si dice: *Huc usque igitur inventoris primi nomen minime sibi vindicavit Leibnitius non ausus id facere ante obitum Wallisii postremi illorum senum qui quae inter anglos et Leibnitium, per annos quadraginta acta erant optime noverant. Decessit autem Wallisius mense octobri 1705; Leibnitius vero sibi domum arrogare hoc coepit januario 1705*. Ed a pag. 43, non avrebbe certamente il *Newton* adoperata verso il *Leibnitz* l'espressione: *Quippe propositiones quae in illis habentur* (tre trattati del *Leibnitz*), *si errores et quisquilias dempseris, omnino vel Newtonianae sunt, vel ut corollaria ex eis facile deducendae*. Inoltre a pag. 49 si dice bruscamente al *Leibnitz*: *Abrenuntiet quoque methodo differentiali Newtoni, neque se in partes ingerat, quasi secundus scilicet inventar*. Ed a pag. 45 dell'edizione francese ove dicesi nel testo della *Recensio*: *Illud interim submonendus est Leibnitius, cum id societati impingit quasi inauditum eum condemnatum isset, id ob eam rem per statutum ejus quoddam commeritum se esse, ut nomen ejus inde expungatur*, che il *Biot* a pie di pag. osserva esser la frase inglese anche più dura, e la riporta originalmente, mentre nè la doglianza del *Leibnitz* era del tutto irregolare, nè il *Newton* sarebbe mai giunto all'eccesso di dimandare, che il nome di un tanto uomo venisse cassato dall'albo de' membri della Società Reale, che gran torto sarebbe stato per lui e per questa; e ben avrebbe potuto il *Leibnitz* controcambiargli una tale offesa; ma fi-

l'è ben da credere, che il *Newton* ne fosse stato a giorno. Soggiugne pur di aver acconsentito poi alle osservazioni del *Lefort* per inserire in questa novella ristampa una scelta raccolta de' documenti e pezzi giustificativi pe' due primarii contendenti, nel che eseguire egli si mostra francese, parteggiando piuttosto pel *Leibnitz*.

Da questo supplimento del *Lefort*, fatto con dottrina, e conoscenza del Metodo e di quello che vi ebbero contribuito tanti illustri geometri, dal *Cavalieri* in poi, ben si rileva e l'estensione di sue conoscenze e la fatica che ebbe durate in raccogliere, ordinare, ed esporre con chiarezza le dottrine che vi comprende; (1) ed a noi sol ri-

nalmente se il *Newton*, avesse ciò voluto, la cosa, sebbene irregolare, avrebbe ben avuto luogo, come il potè ottenere il *Maupertuis* dall'Accademia di Berlino un secol dopo, in affare di assai meno importanza contro il *Koenig*.

(1) Niente più comune, che equivocare in notizie biografiche, principalmente non di nazionali, e tra questi di autori italiani, attesa la non unità di questa gente, e tale equivoco si rende più scusabile quando un qualche uomo distinto non ebbe prodotta che una sola opera, e questa siasi resa assai rara, dopo la quale abbia desistito dal coltivare gli stessi studi, come quel primo saggio mostrava conveniente al bene della scienza. Non deve far dunque maraviglia se gl'illustri *Biot*, e *Lefort* avessero creduto poco conosciuto *Michelangelo Ricci*, sol perchè il di lui nome non appariva nella *Biographie Universelle*, che ben meritava un rango tra' distinti matematici del XVII secolo, per la sola opera che ebbe pubblicata in Roma nel 1666, col titolo di *Geometrice Exercitatio*, della quale il *Lefort* ne risveglia la memoria nella parte 2^a delle sue *Pieces justificatives e documents*, recandone in nota a pag. 375 una notizia biografica ricevuta dalla liberalità ed erudizione del sig. *Paolo Beorchia*.

Forse il nome di *Michelangelo Ricci* fu per inavvertenza saltato nella *Biographie Universelle*, come dice il *Lefort*; ma è indubitato che di esso trovisi detto dal *Moreri* nel suo *Dictionnaire historique*, e dal *Bayle* nel suo *Dictionnaire historique et critique*, come pure, sebbene assai limitatamente, nelle diverse edizioni del *Dizionario storico* ripetutamente pubblicato in Francia, sulla cui settima edizione, que' dotti napoletani, che ne fecero la versione dal 1794, ne estesero l'articolo; e finalmente ne accenna appena anche il ristrettissimo *Dictionnaire historique et biographique abrégé* compilato dal *Regnot* in Parigi nel 1822. E sebbene sia da esserne riconoscente al *Lefort* per aver fatto rivivere nel suo lavoro le notizie del *Ricci* dategliene del *P. Boerchia*, pure queste non sono sì estese nè da paragonarsi alla vite che ne scriveva, con la sua solita esattezza e diligenza, *Angelo Fabroni*, dirigendola all'illustre e sventurato marchese *Condorcet*, fin dal 1774, nè tampoco all'articolo riportatone dal *Tiraboschi*. *Storia della letteratura italiana* vol. VIII.

mane a dolerci di non essere stati finora a giorno nè della pubblicazione dal *Gerhardt* fatta da ben otto anni , nè di altre opere alle quali essa era stata di spinta, e delle quali anco ora non conosciamo che i soli nomi ed i titoli, raccogliendoli dalla pubblicazione del *Le-fort*. Un' Accademia di scienze senza biblioteca, come l' ebbe un tempo, senza giornali scientifici , e senza fondi per l'acquisto di libri nuovi , le quali cose pur ebbe fino al 1848 , in una città numerosa , dove v'ha una sola pubblica biblioteca con sufficienti mezzi per acquistar libri, ma che raro ne commette in rami di scienze, specialmente per le Matematiche , nell'attuale sviluppo delle umane conoscenze in ogni branca di sapere ; che non riceve però se non quel piccolo alimento, che possono procurarsi i membri che la compongono, è come un corpo esinanito : e ciò con dispiacere e rossore debbo confessarlo per iscusarei presso lo straniero , se essa non corrisponde come dovrebbe allo scopo distinto e difficile al quale è destinata , e decentemente provveduta di fondi, da poter alle anzidette cose, come un tempo , adempiere.

SCIENZE NATURALI

Fin dal precedente anno aveva il prof. *A. Costa* presentato all'Accademia un suo lavoro intitolato : *de quibusdam insectorum generibus descriptis , iconibusque illustratis* , che venivagli approvato, in seguito della favorevole relazione de' soci cavi. *Tenore* , *Gussone* , e dello *Scacchi* relatore , nella 1^a tornata del gennajo ; di esso leggesene un sunto nel fascicolo del *Rendiconto* già pubblicato pel gennajo e febbrajo di tale anno , e quivi ancora la relazione de' commissari.

Nella tornata del 21 marzo, il socio ordinario *A. Nobile* leggeva un suo lavoro sul *teorema fondamentale dell'induzione elettrostatica*, che, per vederlo presto pubblicato destinava al *Rendiconto* , il che per altro ritornava avverso a' suoi voti , perchè ottenutasi finalmente l'approvazione superiore, di pubblicare le Memorie de' soci destinate agli Atti , come seguito al *Rendiconto* , questo dovè, come è stato altre volte detto , sospendersi , dopo il 1° fascicolo pel bimestre suddetto, per venir sostituito dalle presenti notizie preliminari a ciascun volume. Laonde l'autore, a render noto tal suo teorema, n'ebbe data, fin da quell'epoca, comunicazione al prof. *Volpicelli*, segretario dell'Accademia de' nuovi Lincei di Roma, dal quale fu fatto pubblicare negli Annali

di Matematiche e Fisica del professor *Tortolini* (1), e poscia inserito in altri giornali scientifici. Ciò però non toglie che esso venga anco qui recato, come nel proprio suo luogo; tanto più che l'autore promette all'Accademia altro lavoro correlativo: ed è da sperare, che dal seguente anno in poi, eliminato il ritardo che soffrivano le nostre pubblicazioni, non avendo più ragione i nostri soci di trasmettere a giornali stranieri, ciò che ebbero consegnato all'Accademia, se ne astengano, limitandosi al più a comunicarne a qualche loro corrispondente una semplice notizia. E ciò valga loro di avviso; perchè quante volte non osserveranno sì giusta e ragionevole prescrizione, qualunque loro lavoro verrà solamente accennato nelle *Notizie preliminari* al volume delle Memorie, senza ripeterne superflamente la stampa per intero.

(1) Marzo 1856.

SUL TEOREMA FONDAMENTALE
DELL'INDUZIONE ELETTROSTATICA

N O T A

DEL PROF. A. NOBILE

Tutti sanno che , messo in presenza di un corpo elettrizzato un conduttore isolato , vi si svolgono due principii elettrici ; e niuno ignora che i fisici suppongono liberi tali principii , dotati cioè di apparente tensione , e distribuiti in maniera in un conduttore cilindrico , che dal suo estremo prossimo alla sorgente elettrica ad un punto medio più o meno distante dagli estremi , con ordine decrescente , si trovi unicamente elettricità contraria a quella del corpo inducente ; e che dall'estremo remoto a quel punto medesimo , del pari con ordine decrescente , vi si manifesti solo elettricità del medesimo nome.

Ma quelle due elettricità , che si svolgono mercè l'induzione , si trovano esse veramente libere e dotate di tensione apparente nel senso che i fisici danno a queste parola , e distribuite nel sopradetto modo ? Questa fu la domanda che a sè stesso fece il *Melloni* alquanti giorni innanzi che da immatura morte fosse rapito all'onore dell'Italia ; e la risposta che gli porsero le sue ingegnose esperienze fu contraria alle idee comuni ; imperocchè le esperienze mostrarongli : esser dissimulata l'elettricità contraria all'induceute , libera l'omonoma ; andar quella decrescente dall'estremo prossimo al remoto ; e questa del pari decrescente dal remoto al prossimo.

Si fatta quistione è sopra modo importante , perchè si lega al fatto primitivo della elettricità , ed al teorema fondamentale dell'elettrostatica. E però ben meritano della scienza coloro che tolsero ad esaminarla unicamente con lo scopo di coglierne il vero , o almeno scavarlo dall'errore.

Quando il *Melloni* palesò i suoi dubbi intorno all'antica dottrina testè riferita , e mise innanzi quel nuovo principio , io non esitai punto ad abbracciarlo , trattovi meno dalla forza degli esperimenti all'uopo invocati , che da un bell'accordo che scorgeva tra il medesimo princi-

pio ed alcuni fatti irrepugnabili , di cui la fisica è da gran tempo in possesso ; e più ancora dalla possibilità di poterlo ricavare come conseguenza di questi fatti medesimi. Laonde , nel tessere l'elogio istorico del *Melloni* poco dipoi la sua morte, lasciando a questo grande la gloria di essere stato il primo a porre in campo dubbi, e *richiamare l'attenzione de' fisici su di un punto importantissimo della scienza elettrica* , dissi che quelle sue deduzioni *rientravano nelle dottrine bene intese della elettricità che i fisici chiamano dissimulata* ; e , per non riuscir soverchio, accennai allora, in una brevissima nota, le pruove che mi parvero all'uopo sufficienti.

Questa nuova dottrina , nondimeno , è stata impugnata da alcuni fisici , e da altri accolta ed ampliata ; e quella mia nota, ed un'altra molto autorevole , perchè del celebre *de la Rive* , vennero pubblicate in varie raccolte scientifiche , e ristampate anche separatamente come di sostegno alla medesima dottrina. La qual cosa , indipendentemente dall'importanza dell'argomento , mi caccia quasi nell'obbligo di svolgere alquanto il concetto che allora , per angustia di luogo , troppo brevemente espressi ; di rammentare alcune nozioni che condurrebbero a conseguenze inesatte , quando non fossero intese nel vero senso ; e di aggiungere novelli esperimenti , che per avventura sembranmi tanto ostili all'antica dottrina , quanto favorevoli alla nuova.

Nella disamina delle esperienze conosciute e de' fatti dai quali io credo debba emergere la verità che si cerca , io non anderò punto oltre i fatti medesimi e le leggi da cui son governati ; e farò astrazione da ogni ipotesi intorno alla natura dell'elettricità , ed anche dalla luminosa teorica elettrostatica dell'illustre *Faraday*, da cui forse potrebbe dedursi non pure il principio che prendo a dimostrare, ma eziandio i fatti e le esperienze allegate dal *Melloni*. E se talvolta userò espressioni che sembrano accennare a talune ipotesi , si abbian come mere abbreviazioni di linguaggio , che rammentino non altro che fatti.

Se due dischi metallici isolati , carichi entrambi di eguale quantità di elettricità contrarie , si mettano convenientemente in presenza l'uno dell'altro , e si lascino divisi da uno strato di aria , o da qualunque altra materia isolante ; si sa che questa materia oppone un ostacolo alla riunione o ricomposizione de' due principii , ma non si oppone punto all'azione per influenza , ch'essi esercitano l'uno su l'altro ;

anzi è tale questa influenza , quest' azione attrattiva scambievole delle due elettricità , da vincere la resistenza del corpo isolante , quando questa non è forte abbastanza ; e rendere insensibile , quando ciò non avviene , la loro azione su i corpi circostanti , celandola quasi del tutto : non altrimenti che fanno due elementi chimici , che , congiunti insieme , o tendenti a congiungersi per forte affinità , non risentono le azioni minori che esercitano altri elementi su ciascuno di essi separatamente. Quella forma adunque che assumono i due principii elettrici , qualunque essa sia , quando esercitano tra loro un' azione attrattiva che non vale a vincere la resistenza ad essi opposta da un coibente interposto , e che li rende impotenti ad esercitare manifesta azione su i circostanti corpi , è appunto ciò che i fisici addimandano elettricità dissimulata , e nello stato latente e senza tensione apparente : denominazione che esprime un fatto , senza più. Ho voluto ricordare queste nozioni . perchè la più parte de' dubbi mossi contro il nuovo principio , parmi che abbiano avuto origine dall' essere state intese altrimenti , non ponendosi forse ben mente a' surriferiti caratteri della elettricità detta dissimulata ; talchè non mancano valorosi fisici , i quali trovano anche nel fatto primitivo dell' elettricità , ed in tanti altri simiglianti casi d' influenza una ragione per negare la scambievole dissimulazione di una parte delle contrarie elettricità sembrando loro incompatibile dissimulazione ed attrazione , mentre tutto dimostra che la prima è una conseguenza della seconda ; e che quando più questa aumenta tanto più quella diviene estesa.

Non sembra che sia essenzial differenza tra elettricità libera e dissimulata , essendo entrambe casi d' induzione di cui non sappiamo renderci ragione , e l' ultima di esse quasi conseguenza di forze contrarie che tendono scambievolmente a distruggersi. E forse verrà tempo in cui , maggiormente addentrati i fisici ne' misteri di questo proteiforme agente , sarà per disparire questa distinzione. Ma , poichè è loro mancata la guida di una teorica del tutto esente da obbiezioni , han distinta la elettricità in libera e dissimulata , o in elettricità di tensione , e latente senza tensione apparente ; e perchè , d' altra parte , han riconosciuta quest' ultima forma ne' due dischi , nel quadro magico , nella boccia di Leida , e nel condensatore , ne' quali figurano sempre due conduttori tra uno strato coibente , era mestieri esaminare se le due

elettricità che si svolgono in un conduttore isolato , in presenza di un corpo elettrizzato , vi si trovino ambedue sotto l'una o l'altra forma, o ciascuna in uno stato diverso.

Un conduttore isolato ed un altro elettrizzato , divisi da uno strato di aria , costituiscono un sistema non dissimile da cotesti apparati; e però nella citata nota , dopo aver ricordato tal simiglianza, conchiu- si con le seguenti parole : « Il vero meccanismo della natura nelle a-
« zioni e reazioni elettriche è involto in dense tenebre ; ma mi par-
« rebbe molto strano se si ammettesse , nel caso della boccia , del
« quadro magico , del condensatore ec., una reciproca forza dissimu-
« lante, che mantiene nello stato latente , e senza tensione, due por-
« zioni di contraria elettricità , e si escludesse del tutto nel caso testè
« allegato. La conseguenza logica, che emerge dai fatti e dalle dottri-
« e adottate da tutti i fisici intorno all' elettricità dissimulata, indipen-
« dentemente da nuovi esperimenti, è appunto, se una forte illusione
« non m'inganna : che il corpo inducente svolga ed attiri sul corpo
« indotto tanta elettricità contraria, quanta può mantenerne nello sta-
« to latente e senza tensione. »

Ma, indipendentemente da cotesta simiglianza di apparati , noi pos- siamo trarre altre convincenti pruove del diverso stato delle due elettrici- tà , se poniamo ben mente ai soli fenomeni conosciuti che ne porge il caso in quistione. Ed invero , nel conduttore indotto isolato si svolgono i due principii elettrici , e ciò è un fatto su cui non cade dubbio alcuno ; ed è del pari incontestabile che , mettendo il medesimo conduttore in co- municazione col suolo senza sottrarlo dall' influenza , toccandolo in un punto qualunque , vi rimane solo la elettricità contraria , e vi rimane dissimulata. Ora , questi due fatti , che apparentemente sembrano diver- si , sono senza dubbio due simili casi di induzione : imperocchè il mette- re in comunicazione col suolo un conduttore che trovavasi isolato ed in- dotto , non è altro che aggiungere a questo la massa della terra forman- done un solo enorme conduttore , che differisce dal primo semplicemente per la forma e la mole. Il che porge un forte criterio per supporre in am- bi i casi l' elettricità contraria nel medesimo stato , cioè dissimulata. Nè il pian di prova adoperato alla maniera di *Coulomb* , che ci dimostra l'e- lettricità sensibile quando si è distaccato dalla parte prossima del condut- tore indotto , deve farci supporre altrimenti ; chè , anche quando , collo

istesso metodo , ci facciamo ad esplorare il medesimo conduttore indotto, dopo che fu messo in comunicazione col suolo , troviamo elettricità libera ; e nondimeno nella propria sede eravi del tutto dissimulata. Perchè dunque non supporre nell' altro caso simile la medesima trasformazione ? Perchè non attribuire , come opinava il *Melloni*, al predominante principio contrario dissimulato divenuto libero, ciò che ci mostra il piano di prova ? Le esperienze del *Coulomb* rimarrebbero sempre quali documenti preziosi nella scienza : se non che una delle elettricità che egli misurava dovrebbe aversi come dissimulata.

Torna favorevole a farne supporre cotale stato diverso de' due principi elettrici, che si sviluppano in un conduttore isolato indotto la facilità grande, che ha il principio omologo a venir dissipato per via dell' aria. Ed invero , se i due corpi , inducente ed indotto , subito dopo l' influenza , si allontanano fra loro , il principio contrario, non più allora legato o dissimulato nell' ultimo di tali corpi , divenendo libero come l' omologo , ha luogo la ricomposizione , e svanisce in esso ogni maniera di segni elettrici. Ma , se, al contrario, quei due corpi si lascino lungo tempo in presenza l' uno dell' altro prima di dar opera a quell' allontanamento , segni evidenti di elettricità contraria nell' indotto dimostrano, che durante l' influenza una maggior copia di elettricità omologa è andata dispersa , e che però vi si trovava in uno stato diverso dall' altra.

D' altra parte , il rimanere in quel conduttore la sola elettricità contraria , quando ha avuto luogo , senza più , la comunicazione col suolo, è eziandio pruova evidente che essa vi si trovava sotto condizioni diverse, e che una forza , qualunque ella sia , ve la riteneva ; e , poichè in virtù di cotal forza vi rimane dissimulata , è evidente che in questo stato trovavasi anche prima di quella comunicazione. Quando una delle armature di una boccia di Leida carica è stata isolata , e si tocchi l' altra che contiene elettricità dissimulata e alquanto di libera ; quest' ultima è quella che vi sparisce , e l' altra vi rimane appunto perchè dissimulata.

Aggiungono forza a tali ragionamenti i noti fatti seguenti. Rimanendo il conduttore sotto l' influenza , dopo che per poco si è comunicato col suolo ; se più o meno vi si allontani dall' induttore, una maggiore o minore elettricità dissimulata divien libera. Se , al contrario , si ritorni ad avvicinare , il fenomeno inverso accade ; se più si avvicini , l' elettricità omologa libera è quella che appare. Tutto pruova adunque che l' e-

lettricità dell'induttore, oltre le fasi che subisce per la relazione del principio contrario eccitato nell'indotto, eserciti su di quest'ultimo una forza attrattiva dissimulante.

In fine, se i fisici chiaman dissimulata quella elettricità che rinviensi sul conduttore indotto, dopo che per poco ha comunicato col suolo; se essi ammettono le alternative di una maggiore o minore elettricità dissimulata, secondo che più o meno avvicinansi i conduttori, è mestieri ammettere la dissimulazione nel caso di che è parola. Nè vale il dire che il corpo indotto isolato contiene allora anche l'elettricità omologa; conciossiachè, oltre che in uno de' casi dianzi allegati si hanno del pari i due principii in uno stato diverso, ripugna a tutti i fatti noti il supporre due contrarie elettricità libere nel medesimo conduttore, senza che abbiano a neutralizzarsi; e, d'altra parte, torna più razionale e d'accordo co' fatti noti, il supporre che non abbia luogo questa unione appunto perchè una di quelle è sotto l'azione di una forza; e che i due principii elettrici esercitano tra loro una scambievole forza attrattiva, che ha per conseguenza la dissimulazione, la quale è quasi principio di quella neutralizzazione che diviene estesa e perfetta al solo contatto.

Le belle esperienze del chiarissimo prof. *Volpicelli*, (1) tra le altre cose, benchè più indirettamente, conducono alla medesima conseguenza: imperocchè esse dimostrano siniglienti fasi di conversione di elettricità libera in dissimulata e viceversa, non con le varie posizioni dell'indotto rispetto all'induttore, ma col semplice avvicinamento o allontanamento di un terzo corpo da quest'ultimo.

Le antiche esperienze dirette a farne conoscere lo stato e la distribuzione de' due principii elettrici su di un conduttore isolato ed indotto, riescono dubbie, siccome avvertì il *Melloni*, per le perturbazioni che derivan dall'inducente, e terminate poscia dal *Volpicelli* (2), e perchè non si esamina lo stato elettrico dell'indotto nella propria sede durante l'induzione. D'altra parte, le nuove esperienze, a cagione delle lamine comunicanti col suolo di cui quel fisico faceva uso per riparare gli elettroscopii, hanno destato nelle menti di alcuni qualche dubbiezza più o meno fondata.

Giovandomi di alcuni vecchi apparati elettrici che l'amicizia del-

(1) *Comptes Rendus*, T. XLII, p. 553.

(2) *Idem*, T. XL, p. 246.

l'onorevole prof. *Bandiera* volle mettere a mia disposizione, presi a fare alcune esperienze, di cui ora riferirò le seguenti.

Con intendimento di esaminare lo stato elettrico de' diversi punti del conduttore indotto, evitando appendici ed ogni altra maniera di corpi sporgenti, e non avvicinando ad esso altri conduttori, ho disposto lungo il dorso di un cilindro metallico terminato da segmenti di sfere, i cui diametri erano maggiori del diametro del cilindro, un certo numero di piccoli aggregati di polvere di lycopodio ben secca, curando che questi aggregati non avessero ad oltrepassare il punto più alto del prossimo capo: messo precedentemente questo conduttore in presenza di un altro più sottile comunicante con quello della macchina elettrica, e a una tale distanza da evitare che abbia ad aver luogo la diretta attrazione della polvere, e però il fenomeno complesso che si vuole evitare e che potrebbe condurre ad errori. Animata la macchina, l'induzione tosto manifestasi col sollevamento o getti continui di polvere, che si vede sollevare nella parte lontana dall'induttore, mentre nulla vedesi nella vicina; anzi riesce talvolta bello il vedere elevarsi quella finissima polvere e dar vista di piccole fontane, che van con ordine decrescente dallo estremo remoto dell'induttore al prossimo dove si osserva una perfetta apparente immobilità.

Io non mi farò a trarre conseguenze da questa esperienza: imperocchè chiaramente ella ne mostra, da una parte, l'effetto della elettricità libera; e dall'altra segni evidenti di uno stato elettrico diverso fin presso all'estremo prossimo, dove col piano di prova trovasi sufficiente elettricità contraria.

Il seguente esperimento, quantunque richieda non poca diligenza e delicatezza nel praticarlo, nondimeno più direttamente parmi che conduca al divisato scopo. Per rimuovere o scemare le illusioni che provengono dalle trasformazioni che subisce nel suo stato elettrico il noto piano di prova, poscia che viene allontanato dall'influenza dell'inducente, e distaccato da alcuni luoghi della superficie dell'indotto di cui formava parte; e quindi per isfuggire o menomare le ingannevoli apparenze, invece di far uso del piano di prova metallico, ho adoperato dischetti di materie molto isolanti, perchè tali materie non patiscono le medesime influenze de' conduttori; non scemano, anzi aumentano l'induzione, avendo esse un potere induttivo maggiore dell'aria;

e, di più, sono tali, da prendere e ritenere l'elettricità libera solo in quei punti che furono a contatto col corpo elettrizzato.

Con una composizione a un di presso simile a quella che adopra per formare il coibente dell'elettroforo, ho formato de' dischetti di piccolissima spessezza (circa mezzo millimetro) e molto piccoli di diametro. Ho parimente formato de' simili dischetti di zolfo ed altri di ceralacca, e li ho situati per mezzo di poca di quest' ultima sostanza alla estremità di altrettante sottilissime bacchette di vetro.

Facendo toccare per qualche tempo, senza strofinio, un dischetto con una parte qualunque del corpo indotto, ho sempre ottenuto, segni di elettricità omologa.

Per accertarmi in maniera molto sensibile della natura della elettricità in tal modo comunicata al disco, la prima idea che mi surse nella mente si fu quella di conseguire le figure di *Leichtemberg*, spargendovi le solite polveri di minio e zolfo; ma per la poca elettricità e la mancanza di più opportuni apparati, non essendomi fin ora tornato soddisfacente un tal mezzo, feci ricorso ad un sensibilissimo elettroscopio semplice precedentemente carico di nota elettricità, e ad un elettroscopio a pile a secco, e ne conseguì, i surriferiti risultamenti.

Nel settembre di tale anno, il socio ordinario *O. G. Costa* presentava il disegno a grandezza naturale di un pesce fossile benissimo conservato, da lui ricavato nello scavo fatto eseguire in *Pietraraja*, paese del Contado di Molise, abbondante in oggetti fossili di simil natura, e l'accompagnava con la corrispondente descrizione, denominandolo *Cacus*; e questa da' suoi colleghi cav. *Tenore*, cav. *Gussoni* e *Scacchi*, veniva proposta per gli Atti, con la seguente

RELAZIONE

SIGNORI

Nell'adunanza del dì 5 settembre il socio ordinario *prof. Costa* espose all' ammirazione dei suoi colleghi una novella specie d'ittio-

lite di straordinaria grandezza da lui recentemente scoperta nella calcarea di Pietraraja, e di cui presentava un eccellente disegno di grandezza eguale all'oggetto in natura. La buona ventura di aver potuto estrarre questo fossile dagli strati della roccia, pressochè in ogni sua parte ben conservato, ha permesso allo scopritore di esattamente definirne i più essenziali caratteri, e mentre egli vi ha riconosciuto non poche relazioni di somiglianza con i generi *Caturus* e *Pachycormis*, per molti altri caratteri è venuto alla conclusione di non potersi riferire ad alcuno dei medesimi generi. E per dire delle più importanti differenze ricorderemo soltanto la presenza di robusto aculeo allogato dietro i fulcri basilari dell'inferior lobo della coda, il quale manca nelle specie dei due mentovati generi, e le squame assai grandi, molto rilevate e scabre, le quali al contrario nei *Caturi* e nei *Pachicormi* sono minutissime e talvolta impercettibili. Quindi il sig. Costa riconoscendo la necessità di dover fondare, per il grandioso ittiolite di Pietraraja un novello genere, lo ha intitolato *Cacus*, riserbandosi di imporgli il nome specifico quando sarà per pubblicarsi la sua memoria.

L'Accademia ebbe accolta con plauso la comunicazione fattale dal suo socio, incoraggiandolo nel tempo stesso a continuare nelle sue laboriose ricerche; e noi incaricati di riferire sul merito della memoria, reputandola per ogni riguardo commendevole, stimiamo poter meritare l'inserimento ne' nostri Atti.

Cav. MICHELE TENORE

Cav. GIOVANNI GUSSONE

A. SCACCHI Relatore

Finalmente non è da tacersi, che nello stesso mese anzidetto il distinto socio sig. *Gasparrini*, presentava all'Accademia due suoi importanti e compiti lavori di più anni, accompagnati da molte tavole con gran precisione ed esattezza preparate e disegnate. L'un di essi l'era di: *Ricerche sugli organi assorbenti delle radici, e sulle loro escrezioni*; l'altra di: *Osservazioni sull'origine dell'embrione seminale della Lemna minor*.

Accoglieva l'Accademia con trasporto lavori di simil fatta, per ornarne i suoi Atti; ma ben ne doleva all'autore di essi di non poterli veder sì presto pubblicati, come avrebbe desiderato, dopo avervi durata tanta fatica; ed è però, che trovandosi onorato del titolo di botanico di *S. A. I. e R. il principe D. Luigi, Conte di Aquila*, non gli ebbe appena manifestato tal suo rincrescimento, che ne otteneva la promessa ed i mezzi da pubblicarli direttamente, e richiestili all'Accademia, questa, non senza dispiacere di vederseli sfuggire, glieli ebbe restituiti; ed ora veggonsi, per munificenza di quel Principe Reale, già messi a stampa, e da' dotti cultori di questa parte importante della scienza botanica valutati secondo essi meritavano.

Chiudevasi l'anno 1856, con leggersi, nella tornata del 19 dicembre, dal socio *de Martino*, una Memoria del sig. *Guglielmo Guiscardi*, su di un nuovo genere di *Molluschi*, della famiglia delle *Neritidi*, che veniva inviata per esame alla commissione composta dal cav. *Tenore*, come seniore della classe di Scienze Naturali, e da' suoi colleghi cav. *Gussone*, *Scacchi*, *Costa*, che vi faceva da relatore, nella tornata del 13 marzo (*), da che seguivane l'approvazione per gli Atti, data dall'Accademia a tal lavoro del *Guiscardi*; e però, stando all'epoca della presentazione, verrà pubblicata l'ultima dell'anno 1856.

La relazione de' commissari è la seguente

(*) Per dar luogo ad altre occupazioni dell'Accademia, la lettura di tal rapporto, e l'approvazione della Memoria non potè aver luogo chè nella tornata del 19 giugno, la prima dopo le ferie della primavera.

SULLA GARGANIA BROCCHI

Nuovo genere di Molluschi testacei, del sig. Guglielmo Guiscardi.

Il Gargano , promontorio che isolato e maestoso si estolle fra la Daunia ed il Saunio , e che in parte protendesi nell'Adriatico mare , per quanto svariato nella sua geologica formazione e ricco di organici avanzi, altrettanto si è poco studiato. Visitato appena da qualche geologo non l'è stato punto per alcun paleontologo. Laonde, gli avanzi organici ch' esso racchiude ci rimangono sconosciuti tuttora. Eppure, giudicandone da qualche simbolo che ci è stato concesso ottenerne , molti, e di molto interesse per la scienza esser debbono quelli che vi stanno sepolti. Nè altrimenti si è pervenuto a tali conoscenze, che per le investigazioni di un industrioso che vi cercava marmi. Un solo punto, chè tale può considerarsi lo spazio dal quale à tratto i pochi fossili che noi conosciamo, ne à somministrati di tal fatta, che ci fanno giudicare di qual importanza esser debba quel sito, il quale ci resta anche celato dalla ingordigia di un rozzo esploratore.

Di quale importanza fossero i fossili di quelle rocce calcari , e quanto esser debbano copiosi, lo dicono meglio che altri la bella *Goniatile garganica* , il *Galaritas castanea* , i denti di pesci d' ignoto genere ed altre spoglie testacee , di cui si è fatta parola nella Paleontologia del Regno. E pure tutti siffatti soggetti sono stati ricavati da pochi brani di roccia fra quelli che si trovano raccolti nel Museo Mineralogico della R. Università per lo zelo del suo direttore e nostro collega prof. *Seacchi*.

Tra questi brani ancora frugando il sig. *Guglielmo Guiscardi* adocchiava una conchiglia , le cui fattezze attirarono la sua attenzione. A primo aspetto, com' egli dice, destavagli l' idea di un *Capuloides*. Ma avendolo sottoposto ad accurato studio, vi ravvisava una *Neritacca*, senza che però avesse potuto associarla nè con le *Nerite* p.d., nè con le *Neritine* , nè con alcuno di quegli altri generi di cui si

compone oggi la famiglia delle *Neritacee*. Egli quindi poggiando sul modo come il labro columellare ed il labro esterno si conformano, e sulla spira confusa ed incurvata a dirittura nel mezzo, ben a ragione l'assunse per tipo di novello genere, al quale imponeva il nome di *Gargania* per ricordare il luogo d'onde tale spoglia proviene, e come specie la insigniva del nome di un illustre italiano, l'autore della plaudita *Conchiologia fossile subappennina*.

La commissione alla quale l'Accademia affidava lo esame della Memoria del sig. *Guiscardi* à ben ponderato ogni cosa che riguarda la conchiglia che ne costituisce il soggetto; e vi à riconosciuto esattamente ogni suo carattere. Si è quindi convinta, che la struttura del peristoma, e massimamente quella che si attiene al labio, è il carattere eminente per lo quale essa distinguesi dal genere *Pileolus*; potendosi gli altri caratteri considerare come semplici modificazioni, vellevoli soltanto a farla distinguere come specie. Ammettendo perciò il nuovo genere, qualunque ne fosse il miglior posto d'assegnarli nel metodo, opina che l'Accademia possa accogliere la Memoria del sig. *Guiscardi*, rimeritandola anche dell'onore di far parte de' suoi Atti, per la novità del soggetto, e come appartenente al proprio suolo, e per incoraggiare l'autore ad altre e più importanti ricerche.

Napoli 13 marzo 1857.

MICHELE TENORE
GIOVANNI GUSSONE
ARCANGELO SCACCHI
O. G. COSTA Relatore

SCIENZE MORALI

Nella tornata del gennajo aveva il socio *N. Rocco* annunziato la lettura di quattro dissertazioni sull'argomento: *Come il vero e'l falso indirizzo delle scienze Metafisiche influisce sugli studi del Dritto*, che leggeva seguentemente nelle tornate degli 8 e 22 febbrajo, 21 marzo e 22 aprile, e venivano, nelle debite forme approvate in quella del 20 giugno, sul parere favorevole dell'intera classe di Scienze Morali, letto dal rispettabile socio cav. *Bozzelli*.

Sulle quattro Memorie, lette recentemente nella reale Accademia delle scienze dal socio cav. Nicola Rocco.

AVVISO DELLA CLASSE

L'oggetto che l'autore si propone in questo elaborato complesso di ricerche, è d'indagare con logica severità, onde sia, che la *scienza del dritto*, ad onta de' magnanimi e ripetuti sforzi, coi quali tanti eccelsi spiriti attesero ad illustrarla ne' suoi fondamentali dettati, e parvero quasi averla collocata di sbalzo ne' sentieri più luminosi della verità, offra poi, a chi bene addentro vi miri, una sì enorme oscillazione di principii, e lacune sì vaste ne' suoi più indispensabili elementi, che annebbiandone la dignità, ne rendono equivoco lo scopo; incertissime o funeste le applicazioni.

A prima base de' suoi ragionamenti, l'autore stabilisce, che le filosofiche discipline, prese nel più eminente lor significato, possono imprimere abitudini di acutezza, e somministrar metodi d'investigazione a tutti gli altri diversi rami dello scibile; ma che sono esse inerenti ed essenzialissime alla scienza del dritto, per l'assoluta identità della sorgente da cui a vicenda si versano: e ne trae a legittima conseguenza, che ai rinerescevoli travimenti delle une si debbano attribuire senza più i non meno rinerescevoli travimenti dell'altra.

E al certo è questa un' alta e fecondissima idea. Poichè le facoltà ed i bisogni dell'uomo, di cui la scienza del dritto intende a garantire il pieno esercizio e la pienissima soddisfazione, in guisa da stringere i vincoli della società civile senza perturbarne gli ordini, si ricongiungono e si confondono, per la loro identica origine, al predominio della intelligenza e della volontà, del pensiero e dell'affetto, che tendenti alla ricerca ed all'acquisto del primo vero, costituiscono i cardini supremi, intorno a cui si aggira tutta l'esistenza dell'umanità, e rappresentano l'oggetto unico di tutte le filosofiche discipline.

Ad avvalorare i termini del suo assunto, l'autore passa rapidamente a rassegna i vari sistemi di filosofia, che sbazzati con alacra indipendenza dai greci antichi, ebbero sì ampio svolgimento ne' popoli moderni; e ad indicare i danni che spesso ne derivarono alle dottrine del giusto e dell'equo, ci fermasi principalmente alle due scuole, che occupando gli opposti estremi, e stringendosi all'ombra di pompose apparenze, pretendono aver colta la verità nel più profondo del suo santuario, attenendosi esclusivamente, o ai soli fenomeni dell'esperienza, o ai soli fantasmi dell'astrazione.

Egli assume, che la prima, partendo dal testimonio de'sensi, e non sapendo mai staccarsene, imprigiona la scienza entro i più meschini limiti, e preclude ogni via da spingerla oltre negli spazi dell'immensità: poichè o lascia insolubili ed obbliati, o tenta invano di sciogliere adeguatamente i tre fondamentali problemi, che nel dar moto alle sue intellettuali potenze si affacciano al filosofo: — *donde vengo?* — *ove mi trovo?* — *a qual termine io corro?* — problemi che mettono l'addentellato alla investigazione dei tre grandi soggetti della scienza, *Dio, l'uomo, e l'universo.*

Assume in quanto all'altra, che mentre sta inchiodata sulla terra, essa vuol partire dall'immensità, senza curarsi di giustificare donde abbia tolte le scale per ascendervi; e fa della scienza un aggregato di semplici fantasie; onde a forza di svagare per entro ad incognite ragioni, e di assottigliar tutti i dati e tutte le conseguenze, cade nelle voragini del panteismo: fatale sistema, che distruggendo l'idea della individualità, o rendendola fenomenica, passeggera ed illusoria, gitta il ghiaccio su tutta la creazione, e toglie all'uomo, nelle triste vicende della vita, fin le consolatrici speranze dell'avvenire.

E sommamente a lodarsi la sagace industria, onde l'autore penetra nell' indole di quelle scuole, a ne rileva le tendenze, e ne smaschera le delusioni, per di là innalzarsi a percorrere le scale ascendenti e le scale discendenti della ragione indagatrice del primo vero, e trarne ampi sprazzi di luce a restaurar la scienza del dritto, depurandola delle nebbie, onde i delirii dei sistemi l' avvilupparono, e ricollocandola degnamente sopra le sue immutabili basi; egli gode l' animo che in ciò ei si trovi sulle tracce de' due più eminenti pensatori che abbiano decorata questa nostra patria; s. Tommaso d' Aquino, e Giambattista Vico.

Non può sicuramente la classe, nè farsi giudice di tutte le dottrine innanzi esposte, nè più oltre allargarsi ad enumerarne i molteplici sviluppi, senza uscir della sua delegazione di stendervi sopra un semplice rapporto. Ella crede però esser della massima importanza il far che si richiami su di esse la vigilante attenzione de' sapienti, per ancor più addentro fecondarne i principii e le applicazioni. Quindi è di fermo avviso, che le quattro corrispondenti Memorie, lette in questa reale Accademia delle scienze dal chiarissimo suo socio ordinario, cav. Nicola Rocco, debbano pubblicarsi con le stampe, sia negli Atti accademici, sia ne' fascicoli del Rendiconto, a libera scelta dell' autore.

Letta nella tornata del dì 20 giugno.

FORTUNATO

IL DUCA DI VENTIGNANO

N. NICOLINI

G. MASDEA *Seniore*

BOZZELLI

MEMORIE

APPROVATE PER L'ANNO 1857.

MATEMATICHE

Il socio corrispondente *E. Fergola*, fin dall' ultima tornata del precedente anno 1856, aveva consegnate al segretario perpetuo tre sue Memorie su' seguenti soggetti: I^a *Sopra la condizione per la possibilità dello sviluppo di qualunque funzione in serie ordinata secondo le potenze ascendenti della differenza della variabile sopra un valore costante.* II^a *Ricerca dell' espressione di una derivata qualunque di una funzione in termini delle derivate della funzione inversa.* III^a *Ricerche per esprimere in serie le radici di una equazione qualunque.* Ma non gli fu dato leggerle, che nel dicembre.

Le prime due di esse gli venivano approvate nel gennaio del 1857, in seguito del seguente parere della commissione esaminatrice.

RELAZIONE

20 marzo 1857.

SIGNORI

Nelle difficili e delicate teorie dello sviluppo delle funzioni in serie s'incontrano tuttora spiacevoli lacune, le quali, se spesso son d'in-

*

ciampo a consumati analisti nelle loro astratte ricerche, formano poi insormontabile ostacolo per coloro che sono puramente rivolti alle applicazioni della scienza, le quali precisamente si arrestano là dove si arresta la potenza della scienza istessa.

Una di queste lacune, e certo gravissima, si è la imperfezione delle teorie per quello che riguarda convergenza delle serie; ed è però che i più grandi analisti fecero e fanno ogni lor possa per migliorare questa parte di superiore importanza nella scienza del calcolo.

Intanto quello che si ha di più sicuro e generale intorno a questo delicato argomento si riduce al teorema dell' illustre *Cauchy*, col quale è stabilito che una funzione può essere sviluppata in serie ordinata secondo le potenze ascendenti della variabile, per ogni valore di questa variabile, il cui modulo sia inferiore al più piccolo modulo di quei valori che rendono infinita la prima derivata della funzione proposta.

Ora il nostro socio corrispondente signor *Emmanuele Fergola* ha reso più generale questo teorema estendendolo al caso in cui lo sviluppo della funzione si voglia o debba essere ordinato per le potenze ascendenti della differenza della variabile sopra una quantità costante. E questo passo non è a tenersi in lieve conto; imperciocchè profittando il nostro analista della indeterminazione della costante, ha saputo trarne altri caratteri per decidere della convergenza anche negli ordinarii sviluppi secondo le potenze ascendenti della variabile.

È questo il soggetto di una delle memorie lette dal sig. *Fergola* nella prima tornata dello scorso mese; e però la vostra commissione non esita a dichiararvi, che tal memoria possa riscuotere la vostra approvazione, e far parte de' nostri atti; dappoichè per essa restano allargati i caratteri così preziosi della convergenza.

La vostra commissione intanto coglie questa occasione per ragguagliarvi di un'altra memoria dello stesso sig. *Fergola*, riguardante ancora sviluppo di funzioni, ma toccante un punto del tutto differente da quello sul quale ha avuto l'onore d'intrattenervi. In questa l'autore si è proposto di determinare l'espressione della medesima derivata di una funzione in termini delle prime n derivate della sua inversa: altra lacuna, che assolutamente meritava di sparire. Il sig. *Fergola* ci ha dato questa espressione sotto forma semplice e rimarchevo-

le, e crediamo che abbia reso alla scienza non lieve servizio. Quindi non esitiamo a proporvi che vogliate approvarla, e consentire che possa far parte dei nostri Atti.

FRANCESCO BRUNO

F. PADULA

F. P. TUCCI

N. TRUDI *Relatore.*

La terza di esse poi veniva anche, a pieni voti come le precedenti, approvata, nella prima tornata dopo le vacanze della primavera (il 19 giugno), intesa la seguente

RELAZIONE

SIGNORI

Tra le memorie lette dal nostro socio corrispondente sig. *Emmanuele Fergola* avviene una riguardante la risoluzione delle equazioni numeriche, argomento il quale rimane nell'Analisi in generale sempre di capitale importanza, e che non ostante gli sforzi incessanti e continui de' più grandi analisti offre ancora molte imperfezioni e largo campo ad ulteriori speculazioni, specialmente sotto il rapporto delle pratiche applicazioni, che pure costituiscono lo scopo finale della scienza.

Il soggetto della memoria attuale del sig. *Fergola* versa sulla costruzione di una radice di una data equazione qualunque in funzione immediata dei coefficienti. Certamente non vi attenderete di sentire che l'autore abbia data una espressione finita di questa radice; ma la vostra commessione deve affermarvi, ch'egli dà una espressione di tipo affatto nuovo e bene importante, poichè, se da un lato essa è figurata da una serie infinita, negli elementi però di questa serie entrano simultaneamente tutt'i coefficienti dell'equazione proposta, e non pare che finora siasi da altri ottenuto un risultamento di tal natura. Ed è poi per tal ragione appunto che le formole del sig. *Fergola* sono

ancora applicabili ad equazioni a coefficienti letterali; imperciocchè desse presentano il compiuto sistema delle operazioni che deggono eseguirsi per raggiungere la finale espressione della radice. D'altra parte è assai rimarchevole la stessa semplicità di queste operazioni; semplicità che l'autore mette assai bene in veduta, applicando le sue formole a costruire l'espressione di una radice di una equazione di 5.^o grado a coefficienti generali.

Di più l'autore osserva che in queste formole entrano delle quantità costanti in questo senso, che esse conservano il medesimo valore per tutte le equazioni di uno stesso grado; in breve delle costanti che punto non dipendono da' coefficienti dell'equazione, ma solo dal suo grado; quindi ne trae la conseguenza che nei casi particolari il calcolo può essere abbreviato nella sua parte maggiore, con la costruzione di apposite tavole che potessero somministrare i valori di queste costanti per le equazioni di diversi gradi, ed egli stesso in fatti dà un tipo di queste tavole avendole calcolate per l'equazioni fino al 7.^o grado.

La vostra commissione opina in conseguenza che la memoria del sig. *Fergola* possa riscuotere la vostra approvazione, e meriti di essere inserita negli Atti.

Napoli 16 Aprile 1857.

FERDINANDO DE LUCA.

F. PADULA.

F. P. TUCCI.

N. TRUDI *Relatore.*

Nel marzo veniva similmente approvata la Memoria letta dal socio ordinario *A. Nobile* nel dì 6 febbrajo: intorno ad alcune singolari apparenze del pianeta *Giove*, osservate durante la sua occultazione dietro la luna nel 2 gennajo di questo anno, udito il seguente

RAPPORTO

SIGNORI

La memoria letta nell'ultima seduta dello scorso mese dal nostro collega sig. *Nobile*, intorno all'occultazione di Giove, de' 2 gennaio ultimo, contiene de' fatti e delle deduzioni di molto interesse.

È stata sempre, ed è tuttavia, problematica l'esistenza di un'atmosfera intorno al nostro satellite. Egli con queste nuove osservazioni, dalle difformazioni che il disco del pianeta ha sofferto nell'immergersi e nell'emergere, tanto accuratamente da lui notate, e discusse, dietro i più certi principii dell'ottica, viene ad aggiungere nuovi argomenti validissimi a confermare l'esistenza di cotale atmosfera, quantunque di molto minor densità dell'aria che cinge il globo terrestre: mostrando un accordo compiuto tra tutti i singoli fenomeni osservati col principio teoretico che ne porge la spiegazione.

Da ciò risulta, a nostro avviso, che l'esistenza di cotale atmosfera nella Luna, debba oramai riguardarsi come dimostrata; ad onta de' fatti, direm così, *negativi* che l'hanno sinora infirmata.

Dessi possono dipendere da difetto di favorevoli circostanze nella visione, od anche da reali cangiamenti in quella rara atmosfera, ma non posson mai distruggere i fatti *positivi* novellamente rafforzati dal nostro autore, e le ineluttabili deduzioni ch'egli ne ha tratto. È anzi da notarsi che il cangiamento dianzi accennato non è da ritenersi lungi dal verosimile; quando si pon mente alle particolari condizioni in cui si trovano i due emisferi opposti della Luna, l'illuminato e l'oscuro, nonché i due altri, che co' primi s'inerociano, quello rivolto costantemente a noi e l'altro dal lato opposto, avuto riguardo alla non coincidenza del centro di figura dello sferoide lunare, col suo centro di gravità, com'è stato non ha guari scoperto dal sig. *Hansen*. Sicchè la novella osservazione, anche per questo offre un gran pregio, essendo un dato di più da porre a scrutinio nel rintracciare la legge che regola per avventura questa variabile visibilità del fenomeno.

Suggerisce inoltre un mezzo accuratissimo per accertarsi di tal rifrazione lunare, quantunque non debba eccedere 1 o 2 secondi col mi-

surare i diametri de' pianeti prima e dopo che il loro lembo vi s'immerga o n' emerga ; cosa alcerto non disagevole a chi è fornito di qualche gran rifrattore , con moto parallattico, come oramai ve ne ha tanti : poichè il diametro del pianeta compreso fra' due fili del micrometro , dovrà visibilmente trovarsi minore , presso il contatto.

Oltre di questi fatti capitali che si accordano perfettamente con l'altro osservato l'anno scorso dal sig. barone *Dombivski*, il nostro socio ha osservato in questa occultazione l'altro fenomeno , pur parecchie volte antecedentemente avvertito , dell'apparente sovrapposizione de'satelliti di Giove al lembo lunare nel punto di occultarsi , e con giustissimo ragionamento dimostra non potersi punto attribuire alla stessa causa , cioè alla rifrazione di un atmosfera di densità decrescente dal basso in alto , lasciando ad ulteriori investigazioni il risolvere cotale oscuro argomento.

Nota da ultimo un altro fenomeno non mai avvertito (per quanto è a nostra notizia) in niuna simile occorrenza: la depressione cioè del lembo luminoso della Luna nel punto occupato dal pianeta nella sua emersione. Egli lo attribuisce allo svanire della irradiazione in quel tratto del perimetro della Luna , che cessa di proiettarsi su di un fondo oscuro ; e noi siamo con essolui pienamente di accordo in cotale spiegazione.

Ma siccome un di noi , insieme al prof. signor Rinonapoli , ha veduto nella Specola della Real Marina , questo medesimo avvallamento nel contorno lunare persistere , per alquanto tempo anche dopo che il disco di Giove se n'era distaccato del tutto, resterebbe a trovare il modo diverso onde la stessa illusione subiettiva s'ingenera.

Da quanto abbiamo avuto l'onore di esporvi risulta evidentemente l'importanza della memoria del nostro socio ; per lo che la riputiamo degna di approvazione e di essere inserita ne' nostri Atti.

Napoli 6 febbraio 1857.

FERDINANDO DE LUCA
ANNIBALE DE GASPERIS
ERNESTO CAPOCCI *Relatore.*

A questa relazione veniva aggiunta la seguente :

Comunicazione, per via di lettera, fatta dal barone E. Dombrowski al socio ordinario Antonio Nobile, intorno ad una singolare apparizione osservata nell'occultazione di Giove nel luglio 1856, e da costui, nella presente occorrenza trasmessa all'Accademia.

Luglio 22 T. M.

in S. Giorgio a

Cremano

o m s

12. 57. 13, 9 — Contatto del I° lembo di Giove col lembo illuminato.))

13. 2. 57, 1 — Disparizione totale di Giove dietro il lembo oscuro))

13. 10. 35, 9 — Immersione del I° satellite dal lembo osc.))

13. 13. 57, 9 — Riapparizione del I° lembo di Giove dal lembo oscuro))

13. 19. 28, 6 — Contatto del II° lembo di Giove col lembo oscuro))

13. 27. 39, 9 — Emersione del II° satellite dal lembo oscuro))

L'osservazione è stata fatta col mio solito Rifrattore, e coll'ingrandimento di 300 — Latitudine dell'Osservatorio 40.° 49'. 50", 4.

Le condizioni atmosferiche erano sufficientemente favorevoli, e non ostante un poco di diffusione e di tremore di tempo in tempo, i lembi dei due pianeti erano ben definiti. Usando tutta l'attenzione possibile Giove mi sembrava essere perfettamente circolare—In alcuni momenti ho creduto ravvisare lo schiacciamento.

Ma forse a motivo delle condizioni atmosferiche, che non erano perfettamente tali quali le avrei desiderate, e forse anche a motivo di una certa inclinazione dell'equatore di Giove sull'orizzonte del luogo devo dire che lo schiacciamento era agli occhi miei molto dubbio. L'ò veduto bene altrimenti pronunziato, in circostanze più favorevoli.

Circa 15^m prima del principio dell'occultazione, allorchè li vidi simultaneamente nel campo del telescopio, fui colpito dalla differenza di colore dei due pianeti. Paragonati fra loro, il colore della luna era di un bel giallo paglia molto delicato, quello di Giove d'un composto un pò sporco di giallo e di verde, tirante al pistacchio—La differenza tra i colori diventava sempre più sensibile a misura che i dischi si avvicinavano; e quando Giove ebbe cominciato a scomparire dietro il lembo illuminato della Luna, vedeva il contorno di questa perfettamente tagliato in giallo sul verde chiaro di Giove, e poteva benissimo distinguere le più piccole asperità del lembo lunare, li cui contorni illuminati apparivano allora molto più chiari del resto, mentre ne discernevo le ombre dal lato opposto. Questa differenza tra i colori restò sempre la stessa durante tutto il tempo dell'osservazione.

Sono stato molto attento ai quattro contatti, e non vi ho notato specie alcuna di legamento, nè filo luminoso fra i lembi rispettivi dei due pianeti. Tutti ebbero luogo coi lembi bene definiti, e senza la benchè minima deviazione apprezzabile dalla loro curvatura.

Ma durante l'immersione, allorchè circa 1,8 del diametro di Giove era già nascosto, a mia grande sorpresa, rimarcai che il suo emisfero interno subiva a poco a poco una specie di schiacciamento parallelamente al lembo illuminato della Luna, e mentre l'emisfero opposto conservava la sua forma circolare senza alterazione apprezzabile. Questa deformazione abbastanza rimarchevole raggiunse il suo massimo allorchè circa 1,6 del diametro di Giove fu scomparso, e cessò di essere percettibile ad 1,3 circa dell'occultazione — Una parte del disco di Giove essendo invisibile, mi sarebbe difficile di dare a questo schiacciamento un valore relativo un poco esatto — Ma per quanto ho potuto giudicarne, era certamente più forte di $\frac{1}{14}$, che è presso a poco lo schiacciamento riconosciuto del pianeta.

Da $\frac{1}{3}$ dell'occultazione in poi, e sino alla sparizione totale di Giove dietro il lembo oscuro della Luna, non ho rimarcato, nella sua parte visibile, nessuna deviazione sensibile dalla forma circolare che gli avevo veduta dapprima.

Durante l'emersione, più volte mi sembrò di vedere in Giove un allungamento nel senso del suo equatore (che va allora presso a poco

perpendicolare al lembo oscuro della luna) ma era per lo meno molto dubbio.

Tutta la mia attenzione essendo assorbita dal pianeta principale, non ho osservato che le emersioni dei due primi satelliti. Sono ben sicuro che il *primo* non è ricomparso tutto ad un tratto in tutto il suo splendore : forse più di 1' passò prima che avesse ripresa tutta la sua luce. Il *secondo* all' incontro emerse istantaneamente come una stella fissa.

S. Giorgio 11 agosto 1856.

Nel febbrajo anzidetto il distinto socio ordinario *cav. F. Padula* leggeva un suo lavoro di *Ricerche su le superficie curve*, che a tornata seguente gli veniva a pieni voti approvato per gli Atti, inteso il parere della commissione destinata ad esaminarlo, espresso nel seguente modo:

RELAZIONE

SIGNORI

La vostra commissione destinata a ragguagliarvi intorno ad una memoria letta non ha guari dal nostro socio *cav. Padula*, col titolo di *Ricerche su le superficie curve*, adempie a questo incarico manifestandovi che un tal lavoro del nostro socio compie non solo un punto interessante della teorica generale delle superficie curve, ma compie ad un tempo un desiderio dell'illustre *Steiner* professore in Berlino. Era già noto che l'inviluppo di una retta mobile, la quale stacca da una curva piana segmenti di costante grandezza, tocca le basi di questi segmenti nei loro punti medii. Il signor *Steiner* estese questa proposizione alle superficie di 2° ordine, e dimostrò che l'inviluppo di un piano mobile, il quale stacca da una superficie di tal fatta segmenti di volume costante, tocca le basi di questi segmenti nei loro centri di gravità.

Ma in questa occasione il geometra di Berlino soggiunge — *Il reste à établir un théorème analogue sur des surfaces courbes quelconques; savoir — Lorsqu'on retranche d'une surface courbe au moyen de plans des segments de volume costant, examiner quelle est la surface qui touche les bases de tous les segments; quels sont les points dans lesquels elle les touche; et quelles sont ses autres propriétés.*

Ripetendovi queste parole dello *Steiner* la vostra commissione non fa che descrivervi il soggetto preciso delle ricerche del nostro socio, aggiugnendo ch'essa ha dovuto ammirare prima la destrezza e semplicità con cui veggonsi risolte quistioni così ardue, e poi la eleganza dei risultamenti, tra quali è veramente rimarchevole quello che risguarda i punti di contatti dell'inviluppo con le basi dei segmenti; imperciocchè questi punti sono per una superficie qualunque della stessa natura che per le superficie di 2° ordine, vale a dire i centri di gravità delle basi.

La vostra commissione è quindi di avviso che la memoria del socio cav. *Padula* possa meritare la vostra approvazione, ed essere inserita nei nostri atti.

F. BRUNO

P. P. TUCCI

A. DE GASPERIS

N. TRUDI *Relatore.*

Ritornava il solerte socio corrispondente *E. Fergola*, nell'aprile, con una Memoria: *Sopra lo sviluppo della funzione $\frac{1}{e^x-1}$; e sopra una nuova espressione de' numeri di Giac. Bernoulli*, che non potendo leggerla, perchè distratta l'Accademia da altre occupazioni, all'avvicinarsi le ferie della Primavera, consegnavala al segretario perpetuo, il quale potè presentarla nella 1ª tornata dopo tali vacanze, che ebbe luogo nel 19 giugno. Essa venne inviata pel voluto esame alla stessa commissione de' soci *Tucci, Trudi e Padula*,

la quale facendo questo da *relatore*, nell'ultima sessione accademica del 10 luglio, ne riferiva come quì appresso.

SIGNOR PRESIDENTE

La Memoria presentata dal signor *Fergola* riguarda varie importanti ricerche di calcolo, e della teorica dei numeri: dapprima l'autore esamina lo sviluppo della funzione $\frac{1}{ee^r-1}$, e si occupa di assegnare l'espressione del termine generale di siffatto sviluppo. Comunque a prima giunta sembrar potrebbe a taluno non molto difficile siffatta ricerca, pure col fatto la cosa riesce altrimenti; e basta quì accennare, che nel caso particolare in cui la costante $e=1$, la funzione esaminata dal nostro socio riducesi ad $\frac{1}{e^r-1}$, intorno al cui sviluppo molti geometri si sono occupati; ed è dovuta ad un ingegnoso artificio d'analisi impiegato da *Laplace* la determinazione del termine generale, della quale ricerca si è pure in seguito occupato, seguendo altro andamento, il celebre *Abel*. L'autore risolve con molta semplicità ed eleganza la quistione in parola, partendo da una formola già da lui data in altra precedente Memoria approvata pe' nostri Atti.

È noto pure che i coefficienti numerici dei termini dello sviluppo della funzione $\frac{1}{e^r-1}$ danno origine ai numeri detti *Bernoulliani*, e però l'autore propone denominare *ultra-bernoulliani* quelli che si hanno dalla funzione più generale da lui esaminata. È però da avvertirsi che la formola trovata dall'autore per la determinazione dei numeri *ultra-Bernoulliani* non comprende il caso dei numeri *Bernoulliani*, perchè essa cade in difetto appunto pel caso di $e=1$, che a questi ultimi numeri si riferisce; e quindi l'autore si occupa di esaminare a parte questo caso, e perviene ad una formola esprimente i numeri *Bernoulliani*, diversa da quella data da *Laplace* ed *Abel*, e non meno elegante.

Infine l'autore espone un modo molto semplice per determinare tutte le soluzioni intere e positive dell'equazione

$$q_1 + 2q_2 + 3q_3 + \dots + nq_n = n$$

e nel tempo stesso fa vedere come si possano trovare varie relazioni tra i valori delle q_1, q_2, \dots, q_n , che somministrano delle belle trasformazioni di analisi. L'equazione precedente è un caso particolare della

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = n$$

di cui la completa soluzione è dovuta al celebre analista inglese *Sylvester*, il quale ne enunciava i risultamenti senza dimostrazione, nel 2.^o fascicolo del *Quarterly Journal*: il suo illustre compatriota *Cayley*, cui tanto deve l'analisi moderna, accennava potersi dimostrare quel risultamento col calcolo dei residui, e l'egregio analista italiano *Brioschi* con tal procedimento appunto ne dava la dimostrazione nel fascicolo di gennajo degli *Annali di Tortolini*.

Tornando ora alla Memoria di cui ci stiamo occupando concludiamo, che tanto per l'importanza del soggetto, quanto per l'eleganza del procedimento tenuto dall'autore, è nostro parere essere la stessa meritevole di inserirsi negli Atti di questa Reale Accademia.

P. P. TUCCI

N. TRUDI

F. PADULA *relatore*

L'Accademia, in seguito di tal favorevole parere, l'approvava pe' suoi Atti a pieni voti.

Due Memorie presentava il laborioso socio ordinario cav. *de Gasparis*, nella 2.^a tornata del giugno. L'una: *Sopra un'equazione di grande importanza nella teorica de' movimenti de' pianeti*; l'altra di: *Formole e Tavole numeriche per calcolare prontamente le distanze di un corpo celeste dalla Terra*, che il presidente inviava pel consueto esame a' soci cav. *Capocci*, *Nobile*, *Bruno* e *Tru-*

di , cui l'autore dichiarava di presentar loro le tavole per la 2^a Memoria, ma che non istimava necessario che venissero pubblicate in seguito di essa, essendolo già stato.

L' Accademia ne udiva , nella sessione del 21 agosto la seguente favorevole

RELAZIONE

SIGNORI

Il socio ordinario *de Gasparis* , nella tornata del 26 giugno 1857, presentò a questa nostra Accademia due Memorie , una delle quali versa intorno ad una equazione importante nella teoria de' movimenti de' pianeti , e l'altra su formole e tavole numeriche per calcolare prontamente la distanza di un corpo celeste dalla Terra — La Commissione chiamata dal nostro presidente a dare il suo parere intorno a tali Memorie , sottomette all'Accademia le seguenti considerazioni.

Il sig. *Waterston* , per ottenere prontamente , e con sufficiente approssimazione la distanza di un corpo celeste dalla Terra , propose che venisse descritta graficamente una curva , la quale , venendo intersecata da una retta da determinarsi in ogni caso particolare , somministrasse la distanza medesima ; e d'altra parte , il sig. *Challis* determinò l'equazione di quella curva , non che i coefficienti della equazione della retta.

Quest' ultimo geometra , nella determinazione di tali coefficienti, dovendo introdurre lo sviluppo delle coordinate eliocentriche in funzione del tempo , non oltrepassò i termini moltiplicati pei quadrati di questo. Il nostro socio ritenendo il lavoro dello *Challis*, in vece di arrestarsi a questi termini , ha voluto tener conto eziandio di quelli moltiplicati per le terze potenze dei tempi. Questa semplice ed opportuna modifica lodevolmente condotta , doveva menare , ed ha menato in fatti ad una maggiore esattezza ; e l'esempio numerico col quale l'autore chiude il suo lavoro ne porge una pruova irrepugnabile. Tutto ciò forma l'obbietto della 1^a Memoria.

La 2^a Memoria versa intorno alla pronta riduzione in numeri di una formola data nella 1^a. L'autore, per via di opportune trasformazioni, aveva in questa ottenuto una equazione della retta innanzi menzionata, della medesima forma di quella trovata dallo *Challis*, ma più esatta, per aver ritenuti, come dicemmo, i termini moltiplicati per le terze potenze del tempo. Or, questa equazione appunto ha egli ridotta in acconce tavole numeriche a doppia entrata; le quali rendono spedito il computo della distanza di un'astro dalla terra (1); e quel che è più, con quella approssimazione che risulta dal tener conto non solo delle 3^e potenze del tempo nelle serie esprimenti le coordinate eliocentriche, ma anche delle 4^e. Posto ciò, la commissione, non dubitando punto dell'utilità che tutto il lavoro in parola sarà per arrecare alla pratica astronomica, propone all'Accademia che le due surriferite memorie venissero inserite nei suoi Atti.

cav. CAPOCCI.

F. BRUNO

N. TRUDI

A. NOBILE *Relatore*.

Letto tal parere dalla Classe, nella tornata del 21 agosto; l'Accademia vi aderiva pienamente.

(1) L'autore, per un semplice saggio di tali Tavole ne consegnava al segretario perpetuo quella corrispondente all'esempio di cui è parola nella Memoria stessa.

Aveva il socio corrispondente sig. *G. Battaglini*, nella tornata del 24 luglio, letta all'Accademia una sua Memoria: *Sulla partizione de' numeri*, che veniva commessa pel corrispondente esame a' soci *Tucci* e *Trudi*, i quali ne avevano pronto l'avviso favorevole a leggere all'Accademia, fin dalla prima tornata dell'agosto; ma che per le altre occupazioni di questa non poterono eseguirlo, che nell'ultima riunione del settembre seguente. Ed esso era così concepito.

RELAZIONE ACCADEMICA

SIGNORI

Le quistioni di analisi indeterminata, risguardanti la partizione dei numeri, hanno richiamato a' nostri giorni l'attenzione dei più valenti analisti, poichè da esse dipendono moltissime delle nuove teorie di analisi, come sono quelle de' discriminanti, degl' invarianti, dei covarianti, *ecc.*; ed in generale di tutto ciò che concerne teorie di forme.

Eulero, il di cui nome sembra destinato a rimaner collegato con la maggior parte delle teorie matematiche, fu il primo ad occuparsi dei problemi più semplici sulla partizione dei numeri; ma più tardi l'illustre italiano Pietro Paoli trattò queste ricerche in modo più generale, e pervenne a risultamenti, che, in mancanza di altri titoli, sarebbero stati bastevoli essi soli a formare la riputazione della quale l'onorarono i dotti contemporanei, e di cui tuttavia l'onorarono i posteri.

Tra i teoremi del Paoli ve n' ha uno che riflette la più importante delle quistioni sulla partizione dei numeri. Con questo teorema è stabilito che il numero delle maniere di comporre un dato numero n per mezzo di numeri interi accordati, è espresso dal coefficiente di x^n nello sviluppo di una certa funzione fratta; ma questo coefficiente non fu trovato nè da Paoli nè da altri, ed ha formato un de-

siderio degli analisti fino al mirabile teorema del Sylvester, che ha dato l'ultima mano alla risoluzione di questa interessante quistione. Ma il Sylvester, seguendo il suo costume pubblicava questo gran teorema nel *Quartely Journal* pel 1855, senza dimostrazione, e senza esporre l'analisi che ad esso il guidava. L'illustre Cayley emulo ed amico del Sylvester, nelle *Transazioni* di Londra pel 1856, pubblicava quindi delle ricerche su tale argomento; e più tardi l'italiano Brioschi dava una dimostrazione del teorema del Sylvester, nel fascicolo degli *Annali* di Tortolini per gennajo dell'anno corrente; ma questa dimostrazione del Brioschi, elegante come tutte le cose di questo egregio italiano, è tale tuttavia da far ancora rimanere l'argomento nel campo dei dotti, imperciocchè dipendente da teorie elevate ed assai poco comuni, come sono quella dei *rest* del Cauchy, e l'integrazione delle equazioni a differenze finite; e d'altra parte questo argomento è tale, che importa ormai di metterlo alla portata dei più, e specialmente della gioventù studiosa.

Ora una dimostrazione assai più elementare del teorema in quistione è venuto a darci il nostro socio corrispondente sig. Battaglini, con la Memoria ch'ei leggeva non ha guari a quest'Accademia, e che venne affidata al nostro esame. Adempiendo a siffatto incarico dobbiamo affermarvi, che con vivo compiacimento abbiain veduto a qual grado di semplicità il nostro valente geometra abbia ridotto una ricerca importante di Analisi, collocata finora ad un punto di vista così elevato. Con questo lavoro egli rende alla scienza un vero servizio, imperciocchè mette a portata comune delle teorie, che finora poteano raggirarsi nella sfera de' dotti; e quindi siam di parere che la Memoria del sig. Battaglini possa meritare la vostra approvazione, ed essere inserita nei nostri Atti.

P. P. TUCCI
N. TRUDI *Relatore*.

L'Accademia udito tal favorevole parere de' Commissari ne deliberava, a pieni voti, l'inserimento negli Atti.

Nella 2^a tornata del settembre ritornava il cav. de *Gasperis* con due Memorie, da lui accennate nelle precedenti del giugno, e di già approvate, come è stato detto (*pag. LX e LXI*). La prima di esse esponeva le : *Formole e Tavole per trovare la distanza di un pianeta, o di una cometa dalla Terra, con quattro osservazioni mancanti delle latitudini estreme.*

L'altra era di : *Formole per la determinazione delle orbite relative delle stelle doppie.*

Queste due Memorie venivano del pari inviate alla solita commissione de' soci cav. *Capocci* ed *A. Nobile*, i quali ne presentarono all'Accademia, nella 1^a tornata del novembre la relazione, che uditala passava ad approvarle unanimamente pe' suoi Atti.

RELAZIONE ACCADEMICA

Per le Memorie del cav. DE GASPERIS.

Il socio ordinario cav. de *Gasperis* presentò a questa nostra Accademia, nella tornata del 17 settembre 1857 due Memorie.

La prima di esse porta per titolo. « *Sul modo di evitare le latitudini estreme, nella determinazione del movimento di un pianeta intorno al Sole, con quattro osservazioni* ».

La seconda ha quello « *Sulle Stelle doppie, e determinazione dei loro movimenti* ».

La Commissione incaricata dell'esame di tali memorie, sottomette all'Accademia il seguente parere.

MEMORIA 1^a.

L'argomento della 1^a Memoria formò il soggetto di altro importante lavoro del medesimo autore; poichè in due altre precedenti

Memorie egli trattò di : *Formole e tavole, per la determinazione della distanza di un corpo celeste dalla Terra per via di tre osservazioni.* In tale lavoro vi ha di notevole che lo sviluppo delle coordinate eliocentriche , in vece di entrare fino ai termini moltiplicati per le 2^e potenze dei tempi , come innanzi praticavasi , vi entra sino alle 3^e potenze ; e di più vi si trova ridotta in opportune tavole l' equazione della curva costante , e introdotti nel calcolo anche i termini di 1^o ordine.

Nel trattare ora il medesimo problema , l' autore, in vece di tre osservazioni compiute , ne impiega quattro , mancanti delle latitudini estreme ; e mostra con opportuni svolgimenti di formole, che il problema può venir risoluto mediante l' uso delle tavole suddette , e tenendo conto dei termini moltiplicati per le 1^e potenze dei tempi nello sviluppo delle coordinate eliocentriche.

Un tal metodo è generale, ed applicabile a tutti i casi ; e, quel che è più, applicabile a quello in cui l' astro muovesi presso il piano dell' eclittica, o in questo piano medesimo.

Tutti i metodi sono in difetto in quest' ultimo caso, salvo un solo de' metodi di *Gauss* ; e però un metodo generale il quale comprenda tutti i casi d' inclinazioni di orbite sull' eclittica , e spinga l' approssimazione molto innanzi per via di acconce tavole , deve tornare di non poca utilità agli astronomi che intendono ai calcoli di orbite planetarie.

Per tali ragioni la Commissione propone che la memoria di che è parola venga inserita nei nostri Atti.

MEMORIA 2.^a

Le osservazioni del 1^o *Herschel* han fatto conoscere nelle stelle doppie tali movimenti relativi apparenti, da far supporre che essi fossero il prodotto di movimenti reali, i quali venissero governati dalla medesima legge *Newtoniana*, che regola i movimenti dei corpi del nostro sistema.

Il *Savary*, partendo da tal supposizione, diede la prima soluzione del problema della determinazione delle orbite delle stelle doppie, impiegando quattro osservazioni eseguite in epoche diverse; e questa soluzione venne seguita da un'altra di *Encke* di più facile applicazione.

Nondimeno, i due dati che determinano la posizione relativa apparente delle due stelle sono di tal natura, che un errore in essi, benchè di un' ordine piccolissimo ed inevitabile a' più grandi osservatori, può ben menare ad errori nei risultati, quando son poche le osservazioni, quantunque matematicamente sufficienti a darne un' orbita; e però possono farne conseguire elementi diversi della stessa orbita, da diverse combinazioni di dati. Un tale inconveniente determinò gli astronomi ad appigliarsi a quei metodi i quali fan concorrere tutte le osservazioni che si hanno intorno ad un sistema binario di stelle, per determinare l' orbita. Questo metodo, impiegato dal II° *Herschel*, e recentemente usato dal *Villareean* mediante l' uso delle derivate, ha mestieri di lunga e penosa caleolazione, tuttavia, nello stato presente della pratica astronomica, è da preferirsi a quei metodi che impiegano lo stretto numero di osservazioni che addimanda la soluzione analitica del problema.

Il nostro socio, nella seconda Memoria di che qui è parola, ha voluto dare un suo metodo per determinare le orbite delle stelle doppie. Avendo egli dato varii metodi per la determinazione di orbite planetarie, ha voluto applicare, ed adattare alcune sue equazioni al caso delle orbite di stelle doppie. Nel suo metodo, come in quello di *Klinkerfues*, vengono adoperate tre osservazioni compiute, nel mentre il problema par che strettamente ne richieda una quarta, o, almeno uno dei due dati che questa quarta somministra; ma ciò potè farsi perchè la costante di *Gauss* pel sistema binario che si considera, entra come fattore comune, e però è eliminabile.

Il sig. *de Gasparis* ben conosceva quanto riescono, in generale, mal sicuri i caleoli di tal genere basati su di un ristretto numero di osservazioni, e quanto siano da preferire quelli nei quali, come dicemmo, si adopera un maggior numero di osservazioni. Ma egli ha in parte cansato questo inconveniente, facendo concorrere 5 osservazioni compiute, combinandole 3 a 3, ed escludendo quelle combinazioni in cui entrano unite la prima e l' ultima osservazione.

Il sig. *de Gasparis* ha escluso queste ultime combinazioni, perchè ha voluto evitare, che le sue formole, le quali sono esatte fino ai termini di quarto ordine, riuscissero non soddisfacenti nel caso di osservazioni troppo lontane.

Il nostro socio combinando in quel modo 5 osservazioni, assoggettandole alle sue belle formole, ed usando ingegnossissimi ripieghi per cogliere la maggiore esattezza possibile nei risultati finali, non solo impiega sufficiente numero di osservazioni, ma ancora, evita in massima parte, le lunghissime calcolazioni che fan mestieri, quando si vuole il concorso di numerose osservazioni.

In conseguenza di tutto ciò la Commissione propone all' Accademia, che questa 2^a Memoria venga, come la prima, inserita nei nostri Atti.

Cav. E. CAPOCCI

Cav. F. PADULA

ANTONIO NOBILE *Relatore.*

ALTRI LAVORI DELLA CLASSE MATEMATICA

NELL' ANNO 1857.

La classe matematica, in tutto il periodo de' due triennii dal 1852 al 1857, a' quali riferisconsi i due volumi delle Memorie approvate in tal tempo, si è mostrata sempre laboriosa, sicchè da essa l' Accademia ebbe nel 1852 quattro Memorie; nel 53 ne riceveva tre, nel 54 dieci. Nel 2.^o triennio n'ebbe sette pel 1855, con due dissertazioni; nel 1856 ne riceveva 3, e due dissertazioni inserite nelle *Notizie preliminari*, e nel *Rendiconto*: e crescendo in diligenza, nel corso dell' anno 1857, ne offriva 7, senza tener conto di quelle, che presentate dopo le ferie autunnali, non vi fu tempo a discuterle, per la brevità del periodo in cui succedevansi le tornate del novembre e dicembre, e per le altre

ordinarie occupazioni che in tal tempo dimanda il nostro Statuto (*). Inoltre una ben lunga dissertazione del socio *Flauti*, che vedrassi inserita qui appresso.

Ma oltre a ciò altra importante e difficile occupazione gli ebbe data l'occorrenza del programma pel premio, che a lei ricadeva proporre per la fine di questo triennio.

Venivano avvertiti tutt' i socii, anco corrispondenti dimoranti in Napoli, come vuole lo Statuto, di presentarsi nella 1^a sessione del gennajo con le schede, in cui fossero notati que' quesiti di Matematiche da essi stimati degni di esser proposti al premio di duc. 300, e questi letti dal segretario perpetuo, e prefisso a ciascuno un numero, come il easo portava, furono i seguenti.

Num. 1.

Esporre i progressi fatti dall'analisi differenziale ed integrale dal principio del presente secolo, indicando i perfezionamenti arrecati alle teoriche già conosciute, le nuove stabilite da moderni analisti, e le fonti in cui si trovano esposti: generalmente dare un' idea compiuta dello stato attuale della scienza, principalmente considerandola ne' seguenti aspetti.

(*) L'illustre matematico *Lagrange* scriveva al d'*Alembert*, al proposito de' progressi fatti fino a'loro tempi nella scienza da essi eminentemente coltivata e prodotta, e da altri contemporanei « Il me semble, que la mine est déjà trop profonde, ce qu'à moins qu'on ne découvre des nouveaux filons, il faudra tôt ou tard l'abandonner. La Chimie et la Physique offrent maintenant des richesses plus brillantes et d'une exploitation plus facile. Aussi le goût du siècle parait il entièrement tourné de ce côté-là. Il n'est pas impossible que les places de Géométrie dans les Académies, deviennent un jour ce que sont actuellement les chaires d'arabe dans les Universités ».

Una tal predizione non si è verificata, appunto perchè essi, ed altri loro contemporanei, o da loro prodotti ebbero scoperti que'nuovi filoni; e se dovesse starsi al sessennio di cui qui ragionasi, si sarebbe per la nostra Accademia avverato il contrario.

- 1.° Classificazione e proprietà delle trascendenti.
- 2.° Sviluppo delle funzioni.
- 3.° Determinazione d' integrali definiti tra limiti speciali.
- 4.° Integrazioni delle equazioni differenziali.
- 5.° Calcolo delle Variazioni.
- 6.° Calcolo delle Differenze finite.

Di ciascuna teorica si farà conoscere l'origine e lo stato alla fine dello scorso secolo ; indi si esporrà il punto di vista più generale nel quale sia stata considerata in prosieguo ; i perfezionamenti fatti in essa , e ciò che resta ancora a desiderare : si accenneranno il suo legame con altre ; e le sue applicazioni : s'indicheranno finalmente i principali scrittori che si sono occupati di essa , e le opere in cui sono esposte le loro ricerche.

Num. 2.

Ritrovare , con metodo diretto e generale , qual sia la minima superficie continua , che abbia per termine un dato poligono storto.

Num. 3.

Esporre i varii metodi finora conosciuti per applicare l'Algebra alla Geometria , notando i vantaggi propri di ciascun metodo ; e cercando , per quanto più è possibile , d'indicare per quali casi un dato metodo sia da preferirsi agli altri.

Num. 4.

È riconosciuta in diverse ricerche analitiche di alta importanza , la necessità della determinazione delle derivate de' diversi ordini , specialmente per le funzioni implicite , e per le funzioni inverse. Ciò posto si richiede con metodo generale la teoria di simili ricerche , cercando specialmente di dimostrare la legge de' coefficienti , che si presentano nelle serie , e farne quindi l'applicazione sia nella soluzione di equazioni trascendenti , sia nello sviluppo in serie delle funzioni implicite secondo una data legge.

Num. 5.

Esporre le varie esperienze finora fatte sulle ruote idrauliche, e le formole pratiche adottate per calcolarne gli effetti: e siccome tutte le formole finora conosciute non corrispondono ai risultamenti delle sperienze, cercare di stabilire una teorica per le ruote idrauliche che corrisponda a' fatti finora osservati.

Num. 6.

Dopo una livellazione anche barometrica di tutte le colline che circondano Napoli, fare un progetto per riunire le acque, le quali scendono dalle medesime, in un recipiente tale da poterle distribuire nelle contrade che ne mancano.

Num. 7.

Dopo la descrizione delle acque isolate, che sono in vari luoghi della città di Napoli, fare un progetto per la comunicazione di queste acque ad oggetto di distribuirle ne' diversi quartieri di Napoli, soprattutto per quelli che ne mancano.

Num. 8.

Fare un progetto per la migliore distribuzione delle acque di Napoli, soprattutto perchè potessero esser portate a livello degli appartamenti di tutti, o più quartini. (*)

Num. 9.

Noi conosciamo la lunghezza teorica del pendolo oscillante a secondi in Napoli, secondo la latitudine della nostra Città. Eseguire una serie di lavori, e di calcolazioni per la lunghezza pratica del pendolo oscillante a secondi, alla latitudine dell' Osservatorio astronomico di Miradois.

(*) I tre quesiti n. 6, 7, 8 formavano una sola scheda.

Num. 10.

Presentare un lavoro compiuto dello scoprimento de' fluidi per mezzo di tubi aggiunti ne' vasi che li contengono, sotto la temperatura, e la pressione media atmosferica di Napoli.

Num. 11.

L'Architettura fu in tutti i tempi riguardata sotto tre aspetti. Primo e principalissimo quello della solidità degli edifizj; e questa dipendendo dalla Meccanica, debbono per essa prevalere senza dubbio i moderni, se riguardisi il conciliare quella condizione essenziale con l'economia della spesa; poichè certamente, e l'atto il dimostra, gli antichi ebbero costruiti edifizj sì solidi, da aver retto al potere distruttivo de' secoli, ed i cui avanzi formano la nostra ammirazione. Ma in eseguirli essi non poterono mirare ad ottenerli col minimo impiego de' materiali che adoperavano, e quindi con la minima spesa.

Segue per secondo articolo importante la bellezza degli edifizj, principalmente quelli destinati ad uso pubblico, ne' quali gli antichi mostraronsi sempre grandiosi, ed ammirandi.

Ha il terzo luogo finalmente la distribuzione degli edifizj, per l'uso cui sono addetti.

Mancava però alle tre qualità architettoniche anzidette, ed ancor manca una quarta essenzialissima, cioè quella della salubrità degli edifizj, principalmente per le abitazioni private, e per le nostre Chiese, ove convengono giornalmente gran numero di persone, che pel modo come sono costruite riescono per le più malsane, e perniciose.

Questa qualità vien costituita dalla quantità di luce solare, che penetra in tali edifizj pe' loro vani, ossia finestre, pel sito, ampiezza, e proiezione di esse.

Non v'ha dubbio, che *Vitruvio*, solo maestro di tale arte, che abbiamo dagli antichi, a ciò intendeva riguardare, quando voleva gli architetti istruiti nell'*Ottica*, perchè *in aedificiis ab certis rationibus coeli lumina recte ducantur*; e che tra' moderni allo stesso scopo mirarono i detti di *Leon Battista Alberti* « deesi ancora avvertire quali

« soli debbano entrar nelle case , e secondo diverse comodità far le « finestre più larghe o più strette ». Ma ciò non era che un parlar vago, da destar l'attenzione dell'architetto , senza somministrar principii e regole certe per ben riuscire ; nè queste potevansi ottenere con la scienza de' loro tempi.

Ciò posto sarebbe argomento di non lieve importanza, e degno de' coltivatori delle Matematiche a' nostri tempi , la risoluzione del seguente.

P R O B L E M A

Determinare la quantità di luce, che in un dato giorno penetri in un dato edificio pe' suoi vani , qualunque sia la grandezza di questi , la loro posizione , e quella co' circoli della sfera mondana , la condizione del loro aspetto , e la legge di fulgidità de' raggi solari.

Da tali ricerche saprà poi sagace architetto , come gliene impone il dovere la di lui arte , regolare i lumi degli edifizi nuovi, e stimar la luce de' già costruiti.

Ed invero i templi della così detta gotica architettura, di che abbonda la nostra Italia, per antiche costruzioni , e che or n'è rinato da qualche tempo il gusto , sebbene malinteso ed impuro , essendo in proporzione assai più alti che larghi , danno breve corso a' raggi solari , che vi entrano pe' lumi laterali , e prosciuganvi poc' aria in sublime , lasciando la parte bassa , agli adoratori di Dio destinata, come una valle umida, ed oscura , o almeno ingombra di un umido stagnante. E quantunque ne' templi, e negli altri edifizi di moderna architettura non ravvisansi coteste sproporzioni incommode, e nocive , pur nondimeno gli obici , che oppongonsi a' lumi loro dall'esterna parte de' medesimi edifizi , o dentro di essi , ne annorzano sovente la luce solare, ed i benefici di lei effetti.

E perchè non si creda, che tale considerazione non avesse mai meritata l'attenzione de' geometri, giova qui ricordare, che il sommo geometra inglese *E. Halley* imprese a geometricamente speculare qual calore ne' diversi climi di nostra Terra ne ridondasse dal sole in ogni gior-

no. E quanto ei rinvenne su questo argomento videsi inserito nelle *Transazioni filosofiche* della Società R. di Londra, ed altrove, nè la presente ricerca, ridotta come al particolare, deve aversi da meno di quella del sommo geometra inglese, se riguardisi la sua maggiore difficoltà, e l'utilità maggiore; perchè in questa concorronvi a ben disimpegnarla la Geometria de' siti, i metodi d'integrare, e non poche astronomiche teorie.

In eseguire la presente ricerca si vuole.

1.° Stabiliti i principii teoretici su' quali deve essa venir fondata.

2.° Risolti i problemi corrispondenti ad essa, distinguendoli ne' loro casi cioè:

1.° Caso.

Se il lume di un edificio, che considerisi, riguardi un aperto, e libero orizzonte.

2.° Caso.

Col tener anche conto della dispersione de' raggi solari nel loro cammino per l'atmosfera.

3.° Caso.

Che alle finestre di un edificio dato si opponga un obice di data posizione, data benanche quella del parallelo diurno, e di quel verticale ove ne stia la finestra.

4.° Caso.

Ed ancor quando l'obice dato non sia parallelo a quella finestra.

Finalmente a tutte le precedenti ricerche dimandate, e ad altre che saprà escogitare l'acume di chi intraprenderà a trattare tale argomento, si vuole aggiunta:

La costruzione di uno strumento da poter saggiare, se in dato giorno dell'anno entri in una data stanza la luce diretta dal Sole, e per qual tempo, che potrà denominarsi *Compasso Eliometrico*, o *Fotometrico*, descrivendone la costruzione e'l modo di usarne.

Vuole il nostro Statuto, che la Classe cui riguarda il programma si occupasse a semplicemente classificare i quesiti, ordinandoli con numero progressivo; e però il segretario perpetuo gli passava ad essa, e non v' interveniva per le altre sue occupazioni accademiche; e questa, nella tornata appresso (22 gennajo) leggeva all' Accademia la seguente relazione compilata dal socio *N. Trudi*, che veniva accompagnata, quesito per quesito, dalla rilettura, che faceva di ciascun di questi il segretario perpetuo.

RELAZIONE ACCADEMICA

Napoli 22 gennajo 1857.

SIGNORI

La Classe Matematica, adempiendo alle prescrizioni dello statuto, si è fatta a classificare gli undici quesiti pel programma al premio triennale del 1857, proposti nella precedente tornata.

Degli undici quesiti quattro appartengono alla categoria delle Matematiche pure, e gli altri sette sono nel campo di loro applicazioni.

In quanto ai primi la classe, avendo ponderato la loro relativa importanza, ha creduto di presentarli a voi nell'ordine seguente.

1°. *Esporre i progressi fatti dall'Analisi differenziale, ed integrale, ee. ee.*

2°. *Esporre i vari metodi, finora conosciuti, per applicare l'Algebra alla Geometria, ee. ee.*

3°. *Ritrovare con metodo diretto, e generale qual sia la minima superficie, ee. ee.*

4°. *È riconosciuta in diverse ricerche analitiche di alta importanza, la necessità della determinazione delle derivate di diversi ordini, ee. ee.*

In quanto all'ultimo la classe ha l'obbligo di farvi riflettere, che

sono a sua notizia recentissimi lavori risguardanti addirittura la questione che si propone, e pei quali essa può dirsi già interamente risolta.

Per ciò che concerne i quesiti relativi ad applicazioni, la classe non ha creduto di assoggettarsi ad un ordine di precedenza, non già che mancassero d'interesse, che anzi quasi tutti ne hanno grandissimo; ma ha dovuto por mente alle gravi difficoltà che li circondano, per la parte sperimentale alla quale sono necessariamente subordinati, e che certamente renderebbero frustranea la proposta del programma. Essa quindi non fa che rammentarvi nell'ordine stesso nel quale dal segretario le venivano inviati.

1°. *Esporre le varie sperienze, ee.*

2°. *Dopo una livellazione, ee.*

3°. *Dopo la descrizione, ee.*

4°. *Fare un progetto, ee.*

5°. *Noi conosciamo la lunghezza, ee.*

6°. *Presentare un lavoro compiuto, ee.*

7°. *L'Architettura fu in tutt' i tempi, ee.*

F. BRUNO

F. P. TUCCI

F. PADULA

E. CAPOCCI

N. TRUDI *Relatore.*

In seguito di tale lettura, che dava luogo a lunga discussione su' quesiti, de' quali alcuno sembrava a qualche socio di troppo grande estensione, da non potervisi adempiere nel limitato tempo che prescriveasi per le risposte al Programma, altri per la loro specialità limitati a' soli napoletani, mentre lo Statuto invita a rispondervi gli scienziati di ogni nazione; finalmente si venne a votare sopra ciascuno di essi.

Quindi imprendeva il segretario perpetuo a rileggerli

un per uno , per la terza volta , che veniva poi messo a' voti segreti, dal quale atto non essendone risultato alcuno col numero di voti voluto per renderlo approvato, cioè di uno di più sulla metà de' votanti, l'Accademia deliberava di rinviare alla Classe que' quattro, che più si erano approssimati a tal numero, incaricandola di distintamente informarla sul merito relativo di essi ; a che questa adempiva con la seguente:

RELAZIONE

SIGNOR PRESIDENTE, SIGNORI

Nella tornata precedente la classe di matematica riceveva l'incarico di dare il suo parere intorno a' quattro programmi, che ebbero nello squittino maggior numero di voti, e classificarli ; affinchè poi , dopo il rapporto della classe , avesse potuto l'Accademia passare di nuovo a' voti su ciascuno.

Di questi programmi, come voi tutti, onorevoli colleghi, ricordate, due ebbero nove voti, e due otto : nessuno fu per conseguenza approvato, potrebbe dir taluno, che niuno di essi fu quindi creduto degno di esser proposto; opera inutile e perduta n'è per conseguenza la classificazione. Mal si apporrebbe chi così pensasse, e si mostrerebbe ad un tempo troppo corrivo nel giudicare, ed ignaro affatto delle cose accademiche. Il voto dato dall'Accademia ad unanimità sulla proposta fatta dal Presidente di sentire di nuovo il parere della classe, mostra chiaramente, che l'Accademia tutta conobbe all'istante che quel risultato aveva origine dalla predilezione , giusta per altro , che ciascuna sezione aveva per quel quesito, che maggior relazione presentava co' propri studi; epperò bramava di ritornar di nuovo sulla quistione. Ed in vero se il poco numero di suffragi, che ciascun quesito raccolse fosse stato per disapprovazione, dovendo l'Accademia esser conseguente a se stessa, non avrebbe potuto accogliere più di nove voti la proposta fatta dal Presidente.

Ciò premesso, nel venire all'esame de'succennati quesiti, tralasciando la parte che forma lo sviluppo di ciascuno, gioverà rammentarne brevemente gli enunciati:

1°. Esporre i progressi fatti dall'analisi differenziale ed integrale dal principio del presente secolo, indicando i perfezionamenti arrecati alle teorie già conosciute, e le nuove stabilite da moderni analisti— *Questo riportò otto voti.*

2°. Esporre i varî metodi finora conosciuti per applicare l'Algebra alla Geometria, notando i vantaggi propri di ciascun metodo, e cercando, per quanto più è possibile, d'indicare per quali casi un dato metodo sia da preferirsi agli altri — *Questo ebbe nove voti.*

3°. Eseguire una serie di lavori, e di calcolazioni per la lunghezza pratica del pendolo oscillante a secondi alla latitudine dell'Osservatorio astronomico di Miradois. — (*otto voti*).

4°. Determinare la quantità di luce, che in un dato giorno penetra in un dato edificio pe' suoi vani, qualunque sia la grandezza di questi, la loro posizione, e quella con i circoli della sfera mondana, la condizione del loro aspetto, e la legge di fulgidità de' raggi solari — (*nove voti*).

Il primo di questi quesiti, e che fu dalla classe posto in primo luogo, è di somma utilità pel progresso delle Matematiche: imperocchè nello stato attuale della scienza, particolarmente per ciò che riguarda il Calcolo Integrale si ha tale quantità di lavori, tra i quali molti importantissimi, che difficilissimo si rende di seguirne il progresso. D'altra parte manca un trattato completo di Calcolo Integrale nel quale fossero raccolte tutte le nuove scoperte. *Le grand Traité de Lacroix a vicilli, et n' est pas encore rempluë,* scriveva il Moigno nel 1844, e prometteva dare un trattato di Calcolo, che a' nostri giorni avesse potuto sostituire il lavoro fatto da Lacroix; ma si è arrestato al primo volume, e pare che voglia lasciar l'opera incompleta: nè è da maravigliarne, dappoichè arditissimo e d' immensa difficoltà era il lavoro intrapreso: e giova quì per far ben comprendere lo stato della scienza riportare le parole stesse del Moigno « Pendant que le Calcul
« différentiel restait stationnaire, le Calcul intégral faisoit d'immenses
« progrès et caugenit presque de face, à tel point que j' ai conservé
« quelques feuilles à peine de manuscrit auquel je travaillais depuis

« plusieurs années , et dont l'impression aurait pu s'achever en quelques mois. Une ère nouvelle semblait s'ouvrir: des difficultés jusqu'à là inabordables , trouvaient une solution faciles : les limites devant les quelles *Euler*, *Lagrange*, *Laplace*, *Legendre*, . . . avaient été forcés de s'arreter , étaient recules bien loin. Un grand nombre de géomètres, MM. *Cauchy*, *Liouville*, *Sturm*, *Binet*, *Lamé*, *Catalan*, *Blanchet*, *Rertrand* en France ; MM. *Gauss* , *Jacoby* , *Lejeune-Dirichlet*, *Richelet* en Allemagne; M. *Lobatto* dans les Pays-Bas; MM. *Ostrograndsky* et *Bouniakowsky* en Russie; M. *Tortolini* à Rome, rivalisaient d'activité et de bonheur. Les recueils scientifiques, si multipliés aujourd'hui m'apportaient chaque semaine plusieurs Mémoires à étudier, des théories plus générales et plus simples à exposer , des applications heureuses à développer , etc: c'était toujours me conclamer à de nouvelles études, et m'imposer une rédaction nouvelle. M. *Cauchy* a publié à lui seul sans intervalli , dal 40 al 44 plus de quatre-vingts Notes ou Mémoires sur le calcul intégral, que j'ai dû analyser au moins dans ces Leçons. »

Risulta da quanto abbiain detto che un lavoro il quale potesse servir di guida alla compilazione di un trattato di Calcolo deve riputarsi ad un tempo di grande difficoltà e di sommo interesse : e la classe nel porre in primo luogo quel programma mirava unicamente all'utile della scienza ; e non che giudicarlo facile, temeva piuttosto non avesse a restare senza soluzione.

Il secondo quesito ha un interesse uguale al precedente, in quanto al progresso di un altro importantissimo ramo delle Matematiche ; e se presenta minori difficoltà pel minor numero de' lavori che bisogna consultare , richiede maggior forza d'ingegno : imperocchè trattasi di paragonare fra loro varî metodi che non basta solo avere studiato, ma bisogna saperne usare, per decidere dell'importanza e dell'uso di ciascuno ; e questo non è dato a tutti di fare. Riguardando lo stato della scienza trent'anni or sono, l'applicazione dell'Algebra alla Geometria riducevasi al metodo detto Cartesiano , o all'analisi a due e a tre coordinate : ma nel programma non s'intende parlar solo de'progressi fatti da questi metodi, bensì dell'esame di essi paragonati agli altri metodi proposti , quali sono : il metodo baricentrico del *Mobius* ; i metodi di trasformazione delle figure ; il metodo delle co-

ordinate trilineari nel piano ; quello delle coordinate curvilinee nel piano e nello spazio , cui sono dovuti tanti lavori fatti intorno alla Fisica matematica da Lamì, e col quale mezzo Iacobi pervenne a determinare la linea geodesica sopra un ellissoide a tre assi , difficile problema , che per lo innanzi non aveva potuto risolversi : i metodi usati da *Chasles*; il metodo delle coordinate tangenziali di cui ha fatto tante belle applicazioni il *Plücker* ; il metodo delle equipollenze proposto da Bellavitis; ed altri che non è qui necessario di rammentare.

Una chiara esposizione di siffatti metodi , ed un esame critico de' medesimi dal quale possa vedersi quale sia il vero loro scopo , quale la parte nuova di ciascuno ; e soprattutto perchè un dato metodo riesca semplicissimo per una data classe di quistioni , e per altre quasi inapplicabile , è un lavoro utilissimo al progresso della scienza, e di grande aiuto per poter in seguito compilare un trattato di Algebra applicata alla Geometria, che soddisfaccia a presenti bisogni della scienza.

Il terzo quesito , che riguarda la determinazione della lunghezza del pendolo oscillante a secondi alla latitudine del Real Osservatorio astronomico di Miradois è senza dubbio utilissimo per la sua applicazione alla determinazione della gravità e della figura della Terra ; e richiede un astronomo sperimentato e calcolatore : ma la classe lo ha considerato di un interesse subordinato di molto a' due precedenti.

1°. Perchè esso è piuttosto un soggetto, che il Real Governo, l'Accademia dovrebbe affidare ad una commissione di dotti speciali nazionali , i quali avendo tutti i mezzi per un sistema di operazioni e di calcolazioni dovrebbero impiegare un tempo certamente non corto , e forse di anni per giungere ad una determinazione accettabile :

2°. Perchè la serie delle sperienze e delle calcolazioni che riguarda questa ricerca è tutta speciale pel nostro regno, anzi per la latitudine dell' Osservatorio di Miradois , nè riguarda la scienza in generale, nè contiene novità scientifica, tranne tutt'al più una novità di mezzi per la più esatta e più pronta determinazione del pendolo oscillante a secondi.

Epperò questo problema non potrebbe proporsi che a' soli matematici napoletani; giacchè non potrebbe supporre, che matematici stranieri si portassero in Napoli, con la sola speranza di aver 300 ducati, per eseguire una ricerca, che i matematici napoletani avendo i mezzi necessari saprebbero compiere con ogni perfezione.

Resta finalmente a parlare del quarto quesito : esso riguarda una quistione molto utile e difficile, e richiede, come è detto nella dichiarazione annessa al medesimo il concorso della Geometria di sito , de' metodi d'integrazione, e di non poche astronomiche teorie; ma appunto perciò la nostra classe crede, che esso resterebbe facilmente senza essere risoluto.

Questo, o Signori, è il nostro parere intorno a' quattro programmi in quistione, del quale risulta che la classe sceglierebbe uno de' primi due in vista della loro importanza e convenienza scientifica , spetta ora a voi la decisione definitiva.

Napoli 20 marzo 1857.

F. DE LECA

F. P. TUCCI

N. TRUDI

F. BRUNO.

F. PADULA *Relatore.*

Passatosi quindi a novella votazione su tali quattro quesiti, il 1.° di essi conseguì il maggior numero di voti; e però risultò approvato, da doversi proporre con apposito programma.

Rincresceva al segretario perpetuo il veder trascurato in questa occorrenza il 4.° quesito, che otteneva nel 1.° scrutinio , quando non vi era alcuna prevenzione su' quesiti , un maggior numero di voti che in questo 2.°, nè trovando valida la ragione di ricusarlo per la sua difficoltà , giudicandola anco minore al paragone del 1.° prescelto , per la vastità di esso , pe' giudizi paralleli su' lavori di analisti distintissimi de' nostri tempi, pel nesso e derivazione dal già fatto da coloro che gli ebbero preceduti , ed anco per lo spoglio che converrebbe fare di Atti di Accademie , giornali di Matematiche, ed opere di moderni analisti, de' quali taluni viventi. E però conoscendo d'altra parte l'utilità di quel quarto quesito , sì per la pratica dell'Architettura, che pe' vantaggi, che potrebbe forse ritrarne l'Analisi sublime,

nelle ricerche a fare , offriva all' Accademia di proporlo per 2.^o quesito , con premio pari al 1.^o , da soddisfarlo egli con proprio denaro ; e questa avendo gentilmente accolta tale dimanda , veniva risoluto pubblicarsi l' uno , e l' altro quesito , come venne effettuato.

Per tal modo chiudevansi i lavori accademici dell' anno 1857 , e davasi compimento alla pubblicazione delle Memorie rimaste abbandonate dal 1852 al 1856 , a che deve attribuirsi un certo abbandono de' soci, e la renitenza a presentarne. Ed or che vedesi non solamente eseguita la stampa delle Memorie a tutto il 1856 , come era regolare; ma ancora di quelle del corrente anno 1857, non vi ha alcun dubbio , che dal nuovo anno 1858 in poi l' Accademia non adempia alla promessa di dar fuori in fine di ogni anno un volume di Memorie , pubblicandole di bimestre in bimestre , come fu detto nel 1.^o *Manifesto*.

Accorda lo statuto nostro un anno di tempo per le risposte al programina, e, supponendolo pubblicato pel febbrajo di un dato anno, vuole, che quelle sieno presentate per tutto tal mese dell' anno seguente, e che , per la prima sessione del giugno , al più tardi , l' Accademia, sulla relazione che gli presenterebbe la Classe del merito delle Memorie presentate, dasse definitivamente il suo giudizio di preferenza per colui, che sarà stimato meritevole del premio , e di coloro che il venissero giudicati per l' *accessit*. Ma questa volta essa aderiva alla proposizione del segretario perpetuo di prolungare il tempo per la presentazione delle Memorie , sia avuto riguardo alla tardanza in dar

fuori il Programma , sia principalmente in considerazione della grandissima estensione, e difficoltà del quesito giudicato meritevole di proporsi; e però venne differita la consegna delle Memorie in risposta al programma, fino al settembre del p. v. anno 1858. Giova sperare , che in tal periodo di tempo vi sia un tanto uomo che valga a rendere siffatto importante servizio alla scienza analitica de' moderni, ormai sì estesa , non in vista del tenuissimo compenso a tanta fatica durata in percorrere campo sì vasto , ma pel merito grande, e l'immortalità del nome che gliene deriverebbe , al qual premio di valore infinito , che concede la posterità, nessuno ha osato finora tentare

Finalmente nella tornata del 20 novembre il socio *Flauti* , leggeva la seguente dissertazione

SULL'ARCHIMEDE E L'APOLLONIO

DI MAUROLICO

OSSERVAZIONI STORICO-CRITICHE

di V. FLAUTI.

Lette all' Accademia nella 1^a tornata del novembre 1857.

CHIARISSIMI COLLEGGII.

Nel tempo delle vacanze autunnali del p. p. ottobre, a sollevarmi da' severi lavori della scienza da me coltivata, e professata per ben 60 anni (senza deviarne, nè per politici cambiamenti, nè per convulsioni di Stato, dalle quali ho sempre aborrito, com'è dovere di chi coltiva le scienze, ed in ispecialità le Matematiche), di più a divertir anco alquanto dalle fatiche accademiche, principalmente per la stampa di que' vostri lavori, che giacevano abbandonati dal 1852, e che mi gode l'animo di potervi presentare tutti pubblicati, con poter l'Accademia nostra, nel prossimo venturo anno, dar fuori i suoi Atti, anco di bimestre in bimestre, come ebbe promesso. Finalmente per dar qualche sollievo al mio animo dispiaciuto in veder corrispondere al mio zelo, al mio disinteresse, ed alle mie non lievi fatiche per l'Accademia, con le più false e sciocche denunzie di talun *Tersite* tra' scienziati nostri. Per un diversivo dunque da tutte queste cose, mi posi a scrivere un articolo nazionale, interessante per la storia delle Matematiche, da nessuno mai avvertito, relativamente al quale i più dotti storici di esse ebbero preso non pochi, nè piccoli equivoci. L'è esso anco un aneddoto bibliografico da interessare i coltivatori di quest'arte.

Trattasi di due lavori di *Francesco Maurolico*, distinto geometra messinese, ed uno de' più valenti dotti del XVI^o secolo, l'uno sulle opere di *Archimede*, l'altro su' *Conici* di *Apollonio Pergeo*, di non lieve difficoltà all'epoca in cui gli ebbe fatti. Ma prima che di essi vi ragioni, l'è bene che qualche cosa dichiari del di lui singolare merito, non riconosciuto dal dotto astronomo *Delambre*, già segretario perpetuo dell'illustre Accademia delle scienze di Parigi, al quale molto deve l'Astronomia per la parte scientifica, e per la storia di essa.

Il *Maurolico* nato in nobile famiglia, dotto nelle lingue latina, greca ed araba, sebben coltivasse con preferenza le Matematiche, fu anco versatissimo in altri studi, come le molte sue opere che ci sono pervenute il dimostrano, e ci fanno desiderare le perdute (1). Giovò egli non poco all'intelligenza de' geometri antichi, e molto si adoperò all'avanzamento delle Matematiche. Ciò il rese rispettatissimo dai suoi contemporanei, tra' quali il *Commandini*, che nella dedica al cardinale *Alessandro Farnese*, del suo libro *de centro gravitatis solidorum* esprimevasi nel seguente modo: *Cum autem ad hoc scribendum aggressus essem, allatus est ad me liber Francisci Maurolyei messanensis, in quo vir ille doctissimus, et in iis disciplinis exercitissimus affirmabat, se de centro gravitatis corporum solidorum conscripsisse. Cum hoc intellexerim sustinui me paulisper, tacitusque expectavi dum opus clarissimi viri, quem semper honoris causa nomina in lucem proferretur. Mihi enim exploratissimum erat, Franciscum Maurolycum, multo doctius et exquisitius hoc disciplinarum genus scriptis suis traditurum.* E questo passo del *Commandini* vale anche a mostrare, che fino al 1565, data dell'opera di costui, quel trattato del *Maurolico* non era stato pubblicato. E ciò annulla la congettura dell'*ab. Scinà*, che *Maurolico* avesse potuto dare a stampa questi suoi trattati di *Archimede* dal 1550 al 1560; ed avrebbe ben potuto protrarre tal tempo fino il 1575 epoca della morte del *Maurolico*: Ma quante altre opere di costui, ed ancor l'*Apollonio* di cui più gloriavasi, non rimasero inedite!

(1) Di esse può leggersene il catalogo, nell'elogio del *Maurolico* scritto dall'*ab. Scinà*.

Il *Montucla* nel n.º 2. p. III, lib. III. della sua *Histoire de Mathématiques*, dopo aver accennato di varii traduttori di geometri antichi, e più specialmente, come n'era dovere, del *Commandini*, così continua: — *L'abbé Maurolico ou Marullo* (piuttosto *Mauroli* o *Maroli*, secondo il modo di pronunziarsi taluni cognomi da' siciliani), *de Messine se distingueoit dans le même temps, non seulement comme géomètre original, ainsi qu'on le verra dans la suite, mais aussi par les éditions de divers géomètres anciens*, che passa ad indicare; e poco appresso ripete: *Maurolicus de Messine mérite d'être regardé comme le premier des géomètres ses contemporains: personne de son temps ne fut plus versé que lui dans la Géométrie transcendante*. E dopo aver accennato de' suoi lavori in riprodurre le opere di geometri greci, tra' quali quelle di *Archimede* ed *Apollonio*, gli attribuisce una maniera ingegnosa, e, come egli si esprime, *d'un élégance ravissante*, in considerar le sezioni coniche nel cono stesso, e dimostrarne così diverse proprietà, dandogli per imitatore il *de la Hire*, il che ci convien confessare non vero; come nè tampoco di aver egli data una versione del testo de' primi quattro libri de' *Conici*, con note, avendo la versione piuttosto forma di parafrasi, ed appena incontrandovisi aggiunto qualche corollario, o scolio, e talun lemma poco importante. S'ingannò pure in dire la restituzione del lib. V. divisa in due libri, forse equivocando col VIº, che quello ebbe anco restituito, non esistendo a' suoi tempi. Nè so persuadermi, come avesse potuto asserire, che *Viviani* ne avesse dato un compendio nella sua egregia *divinazione* di tal libro, da aver anco superato il geometro di Perga, il cui libro originale, rinvenuto contemporaneamente dal *Borelli*, fu con la costui assistenza tradotto dall'Arabo, da *Abramo Eechelense* maronita; mentre esso *Viviani* appena accenna del *Maurolico* per tal sua restituzione, verso il fine della prefazione, a solo oggetto di mostrar l'importanza, e la difficoltà del lavoro da lui intrapreso, dicendo: *Non viles animas, sed mentes nobiliores, atque eminentissimi nominis, compertaeque auctoritatis in geometrico pulvere exauit. Ex his abbas Maurolicus messanensis, duobus libris, quintum, et sextum Apollonii tunc irreptos supplere, ipsorumque argumenta divinare conatus est (quo autem felici eventu equidem nescio)*: E parmi difficile, che costui non avesse potuto avere alle mani un'opera

già pubblicata in Messina da ben cinque anni, da *Paolo Maurolico*, e non forse dal *Borelli*, come sospettò di *Montucla*: ed è da credere, che il ripiego preso ed espresso in parentesi dal Viviani, avesse avuto per iscopo di non censurare il lavoro di un geometra di tanta stima, che aveva il primo avuto l'ardimento di restituire opera perduta di un geometra greco, sebbene ne avesse equivocato l'argomento.

Dopo siffatte testimonianze del valor geometrico del *Maurolico*, non so intendere come il *Delambre*, nella sua *Histoire de l'Astronomie du moyen age*, avesse potuto dire: *Ce qui a fait vivre le nom de Maurolycus est, qu'il passe pour avoir le premier introduit dans les calculs trigonométriques l'usage des sécantes, dont il fit imprimer une table dans le volume, dont voici le titre en entier.* Il *Delambre* ignorava dunque ciò che n'ebbe scritto lo stesso *Maurolico* ne' suoi *Sphaericorum*, da che vedesi essere egli stato l'inventore di tal calcolo fin dal 1550.

Ma sia fin qui abbastanza detto del merito del *Maurolico*, come geometra; ed è ben dovere, che io ritorni all'oggetto, che mi ho proposto in questo articolo, riguardante il di lui lavoro sopra *Archimede*, e la storia di tal pubblicazione.

Costumava il *Maurolico* segnare, in fine di ogni suo lavoro, il luogo ove ebbe dimorato facendolo, l'anno, il mese, e talvolta anche il giorno e l'ora in cui l'ebbe finito; che però vedesi, che il primo de' trattati di *Archimede*, di cui occupossi fu quello de' *Momentis aequalibus*, da lui ripartito in quattro libri, in fine dell'ultimo de' quali vi notava: *Panormi 23 Januarii 1518*. Il geometra siracusano l'ebbe diviso in due, che secondo la versione pubblicata dall' *Ervagio* in Basilea nel 1544 hanno per epigrafe *Planorum aequiponderantium inventa*, e nell'altra del *Torelli*: *de Planorum aequilibriis, sive eorumdem gravitatum centris*. La diversità de' titoli di tal trattato di *Archimede*, e la diversa ripartizione de' libri secondo il *Maurolico*, mostrano abbastanza, che costui nella sua parafrasi, si dovè allontanare dal testo, del quale ne espose la materia ne' primi suoi tre libri, aggiugnendovi il quarto di proprio conio, intorno a' centri di gravità de' solidi; ed è a questo che accennava il *Commandini* nel luogo di sopra recato.

Il *Maurolico* dal non aver trovato tra le opere di *Archimede* trattato l'argomento testè indicato, sebben vi si vegga annunziato, ne conchiuse, che non se ne fosse occupato, così dicendo: *quem ab Archimede omissum non parum admiror*. Sul qual proposito fu più accorto il *Commandini* con dire: *Animadverti dubitari non posse, quin Archimedes vel de hac materia scripsisset, vel aliorum mathematicorum scripta perlegisset. Nam in iis libris, (de iis quae vehuntur in aqua) tum alia nonnulla, tum maxime illam propositionem, ut evidentem et alias probatam assumit, Centrum gravitatis in portionibus Conoidis rectanguli axem ita dividere, ut pars quae ad verticem terminatur, alterius partis quae ad basim dupla sit.*

In fine del trattato *de Circuli dimensione*, *Maurolico* vi appose la data *19 augusti 1535*, ed a' due libri de' *Sphaera et Cylindro* quella di *Messanae 10 Septembris VIII. Indictionis 1534*, e per l'altro *de quadratura parabolae* vi segnava la data: *Messanae in freto Siculo 23 Julii 1534*. Da che vedesi, che questi tre trattati furono da lui compiti nello stesso anno 1534, dall'agosto al settembre. Finalmente il libro *de Lincis spiralibus*, ha nel fine: *Castellobono hora terlia noctis diei 18 octobris VIII. Indictionis 1549*.

Avvenuta la morte del *Maurolico*, in età di 81 anni (ben grave per un uomo, che non sortì da Natura una valida costituzione, ed aveva sostenuti grandi e difficili lavori) l'*Apollonio*, e l'*Archimede* da lui esposti rimasero, insieme a molti altri suoi trattati, abbandonati presso i suoi parenti ed eredi, finchè quel suo discendente *Paolo Maurolico* non ebbe, come si è precedentemente accennato, impreso a stampare nel 1654 l'*Apollonio*, spintovi, dal Senato di Messina, che non ebbe mai dimenticata la memoria del suo illustre concittadino, concorrendo all'edizione con suo denaro. Ma a tale epoca eran già pubblicati in Bologna, da ben 88 anni, i primi quattro libri de' *Coniei* di *Apollonio*, co'lemmi di *Pappo*, e co' commentarii di *Eutocio Ascalonita*, aggiuntivi quelli di *Federico Commandini*, che ne fu il traduttore dal greco, e l'editore, lavoro ben a ragione preferito a quello di *Maurolico*. E sebbene costui vi avesse aggiunti i due libri V. e VI, pure l'essersivi equivocato l'argomento del geometra greco pel lib. V, e la divinazione del *Viviani* pubblicata nel 1659, seguita dalla versione

di questo libro , e de' due seguenti dall' *Ecchellense* , assistito dal *Borelli* , come poco innanzi è stato detto , fecero a dirittura dimenticare il faticoso lavoro del *Maurolico*.

L'*Archimede* rimase per altri anni non curato, finchè nel 1670 il Ms. di esso, insieme ad altri lavori del *Maurolico*, poi infelicemente perduti, come diremo , furono dal marchese di Campotondo , discendente dal *Maurolico* , dati in isconto di medicine ad un dotto farmacista di Messina, per nome *Tomaso di Lorenzo*, o *Lorenzo di Tomaso* (poichè nell'un modo e nell'altro vien denominato nella lettera premessa alla pubblicazione fattane in Palermo) forse a consiglio del napoletano, *Gian-Alfonso Borelli* , e non messinese, come equivoca il *Montucla*, il quale allora ivi dimorava. Or avendo esso di *Lorenzo* ottenuto da quel Senato un soccorso di 100 onze, con l'ajuto del *Borelli* ne intraprese l'edizione , che continuò fino al 1672 , alla quale epoca costretto costui a fuggir da *Messina* per calunniose imputazioni (1) , ricoverandosi in Roma, quella stampa rimase imperfetta, ed abbandonata (dovevano però esservi già terminati que'sei principali trattati , che più sopra indicammo). E poco dopo avendo anche dovuto evadere da Messina quel *di Lorenzo*, andatosene pur esso in Roma, ove con riputazione ebbe esercitata la professione di medico, tutte le costui suppellettili, e tra esse i MSS. *Mauroliciani*, e le stampe già dette dell'*Archimede* , confiscate dal nuovo governo, vennero imbarcate con altre robe di altri , e spedite a Palermo , per ivi venderse. Soffrì la nave in mare orribile tempesta , e fu perduta la più gran parte del carico e però le stampe dell'*Archimede*, delle quali a gran fortuna ne giunsero in Palermo due esemplari, che furono comprati da un certo *Cillenio Esperio*, il quale dopo varie indagini relative a queste stampe, finalmente pose mano a riprodurle, aggiugnendo ai trattati di *Archimede* esposti dal *Maurolico* , quelli che mancavano , de' quali l' *Arenario*

(1) Nella risposta , che il sig. *Francesco Atlas* dava al signor *Cillenio Esperio* , che gli aveva chieste notizie su questo lavoro del *Maurolico* , vi si dice : *Cum exitiali Superum fato , publicaeque rei exitio , Borellius , quamvis vitae integer omnisque sceleris purus , paulo ante urbis illius rumores , exulare nonnullorum delationibus cogitur*. Di questa pessima genia non vi fu mai penuria.

glie' ebbe inviato da Roma il *Borelli*, sia da lui fatto tradurre dall'arabo, con la sua assistenza, sia che l'avesse tratto da altri rivendendolo.

Da tale esposizione ben rilevasi l'equivoco del *Montucla* in aver creduto, senza fondamento alcuno, che *Maurolico* l'avesse già pubblicato nel 1570.

Ma è qui che cade l'aneddoto bibliografico, del quale ho accennato, e che dilucida ancor alcun altro equivoco preso dal *Montucla*.

Questa pubblicazione dell'*Archimede* del *Maurolico* si vede descritta nel frontispizio, in caratteri rossi e neri, nel seguente modo :

ADMIRANDI

ARCHIMEDIS

SIRACUSANI

MONUMENTA OMNIA MATHEMATICA QUAE EXTANT

QUORUMQUE CATALOGUM INVERSA PAGINA DEMONSTRAT

EX TRADITIONE DOCTISSIMI VIRI

FRANCISCI MAUROLICI

NOBILIS SICULI, ABBATIS SANCTAE MARIAE A PARTU

OPUS PRAECLARISSIMUM NON PRIUS TYPIS COMMISSUM

A MATHESEOS VERO STUDIOIS ENIXE DESIDERATUM

TANDEMQUE A FULIGINE TEMPORUM ACCURATE EXCUSSUM

EC. EC.

Ed in piedi

PANORMI APUD D. CYLLENUM HESPERIUM
CUM LICENTIA SUPERIORUM MDCLXXXV

Sumptibus Antonini Giardinae bibliopolae panormitani

La dedica dell'editore *Cillenio Esperio* al cav. *Rondinelli* l'è in carattere detto da' tipografi *Silvio*, ed ora *Santagostino* tondo, in due pagine, con la data nel fine — *Panormi Kal. Novembr. 1684*: e nell'ultima pagina del volume, dopo il *Registrum* vi si ripete — *Sumptibus Antonini Giardinae Bibliopolae Panormitani, 1685*.

Acquistata che ebbi da parecchi anni tale opera, distratto da molteplici occupazioni, trattandosi di una parafrasi, non vi posi molta attenzione; mi faceva però qualche impressione la clausola appostavi nel frontespizio di *Opus non prius typis commissum*. Ma non molto dopo crebbe la mia sorpresa, quando mi venne alle mani un altro esemplare di questo libro, col seguente frontespizio tutto in nero

SEX

ARCHIMEDIS

DESIDERATI TRACTATUS

I. DE CIRCULI DIMENSIONE. II. DE SPHAERA ET CYLINDRO

III. DE MOMENTIS AEQUALIBUS, IV. DE QUADRATURA PARABOLAE

V. DE SPIRALIBUS LINEIS, VI. DE CONOIDIBUS ET SPHAEROIDIBUS FIGURIS

EX TRADITIONE DOCTISSIMI VIRI

D. FRANCISCI MAUROLYCI

EC. EC.

Ed in piedi

PANORMI APUD D. CILLENUM HESPERIUM MDCLXXXIV
SUMPTIBUS ANTONINI GIARDINAE

La dedica è nella sola terza pagina in carattere italico. Porta però sempre la data — *Panormi kalendis aprilis 1684*. Tutto il resto della stampa è identico, anche per la carta, all'edizione precedentemente descritta, se non che vi sono molte carte mss., come da pag. 17 a

40 , la pag. 71 , da 129 a 136 , da 177 a 184 , da 241 a 248 , da 285 a 288.

Senza l'alterazione del frontespizio , e della data in esso , le molte carte mss. mi avrebbero fatto credere , che colui il quale fu primo a possedere tale esemplare , ne avesse raccolti i fogli nell'atto della stampa , e mancandogliene alcuni , nè volendo fare l'acquisto di altro esemplare compiuto , si fosse contentato della non piccola fatica di copiarli ; o pure che resasi rara siffatta unica pubblicazione di questo principale lavoro del *Maurolico* tanto desiderato , e che dopo tante vicende era finalmente venuto al termine della pubblicazione , ed avutone un esemplare mutilato vi avesse supplite le mancanze trascrivendole. Mi poneva però in forte dubbio di ciò quel frontespizio cambiato , e la non necessaria clausola appestavi nell'edizione del 1685 , di *Opus non prius typis commissum , a Matheseos vero studiosis enixe desideratum , tandemque a fuligine temporum excussum*. Postomi quindi a considerare attentamente l'esemplare con la data del 1684 , con carte mss. , ravvisai la pag. 71 ms. ed incollata alla 72 , il che removeva il sospetto di mancanze supplite ; e traguardata tal carta contro lume osservai , che la pag. 71 a stampa , che era coperta dall'incollata mss. , aveva per errore tipografico ripetuta più che la metà della pagina precedente , con le corrispondenti figure ; da che mi indussi a giudicare , e fu così sicuramente , che tale edizione dell'*Archimede* del *Maurolico* venne effettivamente eseguita nel 1684 , come il comprovano anco le due approvazioni censorie , che portano la data , l'ecclesiastica del dì 3 gennaio 1684 , e quella del Luogotenente del Tribunale della R. C. , e che terminatasi la stampa nel 1685 , ed accortisi delle enormi diffatte dello stampatore , e di chi lo ebbe assistito , si fu costretti a rifarne non meno di carte 26 ; che però ad annullare ogni memoria di quella erratissima , con la data del 1684 , si rifece il frontespizio , e con esso la dedica , e vi si aggiunse la clausola riportata di sopra.

Dopo aver cercato fin qui di dileguar gli errori , dirò storici , per la pubblicazione dell'*Archimede* del *Maurolico* , e di deciferare un aneddoto bibliografico , fissando la vera epoca della prima edizione di tale opera , mi rimane ad aggiugnere un articolo importante per gli

Elementi geometrici, da alcuno finora non avvertito, e nemmen da me, da che mi riuscì acquistare un esemplare dell' *Archimede* del *Maurolico*, che mi sarebbe stato di giovamento, come ora ha avuto luogo. L'articolo è il seguente.

L'accuratissimo *Euclide*, per dimostrare la prop. 18 *Elemento XII* assunse di poter un solido qualunque venir rappresentato, cioè trasformato in una sfera; ed è da notarsi, ch'egli potendo dimostrare la 2 di tal libro, la 10, la 11 e la 12 prevalendosi dello stesso principio, assumendo cioè, che ogni superficie piana fosse riducibile in cerchio, ed ogni solido in cilindro, o in cono, si astenne dal farlo, preferendo lunghissimo ragionamento ad una via breve ed uniforme.

Or io, nel compiere la prima volta le istituzioni geometriche ad uso delle P. I. del regno, ordinatemi con decreto nel 1808, rinnovato seguentemente ben due altre volte, con più ardimento ebbi adottato lo stesso principio *Euclideo*, per le altre indicate proposizioni del lib. XII, e pe' teoremi di *Archimede sulla sfera ed il cilindro*, che ne formano il compimento, rendendone le dimostrazioni con tale uniformità, che i giovani appresane una erano in grado di compiere da loro medesimi le altre; il che poteva loro valere anche di un buono esercizio geometrico. Mi rimaneva però sempre nell'animo un sentimento di durezza per quel principio adottato, sebben vero, e tale che senza difficoltà fu sempre riconosciuto da' geometri rigorosi della scuola greca, e dopo il rinascimento della Geometria, per quella 18^a del lib. XII di *Euclide*; e però dalla sesta edizione de' miei *Elementi* mi decisi a ritornare ad *Euclide* pel libro XII, ritenendo quel modo di dimostrare pe' soli teoremi di *Archimede sulla sfera e sul cilindro*; e così la cosa ebbe proceduto fino alla 22^a edizione. Giunto ora al termine di questa, ho voluto dare un'occhiata sulla parafrasi del *Maurolico*, da me precedentemente trascurata, come ho detto, ed avendovi ravvisata una lunga *Praeparatio ad Archimedis opera*, premessa a' due libri *de Sphaera et Cylindro*, ed a quello *de Circuli quadratura*, avvertii che il *Maurolico* ebbe adottato lo stesso principio *Euclideo*, di cui mi era io prevaluto come poc'anzi ho detto, non senza aver egli avvertita la stessa durezza del medesimo, dichiarandola nel seguente modo nella prefazione: *In libello de Sphaera et Cylindro usus sum faciliiori via; in quo, ne quis arbitretur, me inconcessibilia principia postulasse, si cui-*

libet superfiei aliquam sphaericam aut conicam, aut sphaericæ portionis superficiem æqualem esse supponam, aut conicam sive cylindricam sub data celsitudine. Demonstrabimus et hic ipsa principia. Item datis duabus superficiebus superficiem esse uni datorum similem, et alteri æqualem. Datisque duobus solidis, aliquid solidum esse uni datorum simile, et alteri æquale. Ad quod, cum necessaria sit duarum mediarum proportionalium inventio, id ipsum problema, ex Veterum Philosophorum traditione tractabimus.

Da queste considerazioni del *Maurolico* mi vidi indotto a convalidare que' principii da lui indicati precedentemente, de' quali io, nulla conoscendo da esso fatto, mi era prevalso, premettendovi questa volta come lemmi le ricerche da mostrarne la genuinità. E poichè per talune di esse richiedevasi necessariamente l'invenzione delle due medie proporzionali, che il *Maurolico* ebbe apertamente recata nella sua *Praeparatio ad Archimedis opera*, per nulla incaricandosi, che la natura di tal problema il rendeva improprio in fronte di dottrine elementari; che però per lui l'era men difetto in un'opera classica, mentre l'era assolutamente un errore gravissimo in un libro di prima istituzione, per coloro che introduconsi allo studio della Geometria, ho cercato di ovviare a tale sconcio convertendo in teorema la soluzione meccanica di tal problema, che ne diede *Filone Bizantino*; lo che soddisfaceva al mio intento, poichè il mio bisogno non è quello dell'effettiva esibizione delle due medie proporzionali, ma semplicemente la loro possibilità.

Or nell'eseguire tal mio proponimento, essendomi avveduto che con una semplicissima modificazione del modo usato da *Euclide*, nella prop. 18 *Elem.* XII, si poteva, senza il bisogno di tali lemmi, riuscire in dimostrare le prop. 2, 10, 11, 12 ed anche la 18, in modo semplice, ed uniforme a' ragionamenti da tener poi ne' teoremi di *Archimede*, sicchè questi due libri, de' quali il secondo è compimento del primo, rendevansi brevi, uniformi, e di facile comprendimento, senza disturbare il testo *Euclideo* nel lib. XII, l'ho riportato rifatto a mio modo nelle *Note*, accrescendolo anco di altre verità, che meritavano prendervi parte, lasciando la libertà a coloro, che debbono o vogliono istituire i giovani di loro scuole su' miei *Elementi geometrici*, ad avvalersi del libro XII, come il diede *Euclide*, o pure di quello da me rifatto; lasciando il giudizio di tal mio lavoro nuovo elementare a' coltivatori dell'antica Geometria, de' quali ora non ne mancano di un merito distinto.

SCIENZE NATURALI

Questa classe non offriva in tutto l'anno 1857, che una Memoria del socio ordinario *O. G. Costa*, intitolata — *Genere Frondicularia d' Orb.*, letta nella tornata del 19 giugno, ed approvata in quella del 26, inteso il seguente

R A P P O R T O

Il nostro socio ordinario sig. Costa, che più volte ha presentati all' Accademia i risultamenti delle sue ricerche sulle minutissime conchiglie della classe dei foraminiferi, nell' adunanza del 19 giugno leggeva una novella memoria il cui principale scopo si è di definire con maggiore esattezza i caratteri del genere *Frondicularia* fondato dal D' Orbigny. La qual cosa è sopra tutto necessaria per non confondere le specie che al medesimo genere si riferiscono, con quelle che appartengono all' altro genere affine delle *Cristellarie*. Indi egli propone una sistematica distribuzione delle *Frondicularie* dalla quale meglio apparisce tutta l' estensione di questo genere multiforme, e nel tempo stesso si rende assai spedita la descrizione dei caratteri di ciascuna specie.

L' autore dopo aver dato una minuziosa descrizione dei caratteri microscopici interni delle frondicularie, dà questi stessi caratteri esterni ed osservabili con semplice lente d' ingrandimento, i quali ritiene essere i seguenti. 1.° La presenza di un prolungamento peduncolare. 2.° Un rigonfiamento o bottone che immediatamente succede al breve peduncolo, ed è costantemente guernito di pieghe longitudinali rilevate. 3.° Una rachide longitudinale prominente dalla quale partono in direzione opposta due serie di cavità.

Dalle cavità poi così ordinate in due serie sopra i lati opposti della rachide avviene, che quelle di una serie talvolta sono eguali a quelle della serie contraria, e sì le une che le altre sono similmente inclinate alla rachide; altre volte quelle di una serie sono assai più brevi delle opposte, ed inclinate con angolo meno acuto, o quasi perpendicolari alla rachide. Nel primo caso le frondicularie sono equilaterali, quali sono state definite dal D'Orbigny; nel secondo caso risultano inequilaterali, e giudicando dalla forma si crederebbe di leggerli doversi riferire alle Cristellarie.

Estendendo dunque il sig. Costa il genere delle frondicularie, perchè vi comprende non poche forme inequilaterali, ne ripartisce tutte le specie in quattro sezioni. Quelle della prima che chiama *bilaterali* sono di forma rombica o a ferro di lancia, ed in esse le cavità si prolungano ugualmente da entrambi i lati della rachide. Denomina *unilaterali* quelle della seconda sezione, le quali sono di forma falcata, ed hanno le cavità di un lato più brevi di quelle del lato opposto. Nelle specie della terza sezione le cavità di un lato si succedono alternamente con quelle del lato opposto, e però son denominate *alternanti*. Ed in ultimo luogo sono riportate le specie nelle quali le cavità di ciascuna serie sono brevi e perpendicolari alla rachide, e per la loro forma bislunga sono dette *lanceolari*.

A queste vedute generali del genere *Frondeularia* segue poi la descrizione delle specie di ciascuna delle quattro sezioni, le quali sono con molta precisione figurate.

Avendo noi ricevuto l'incarico di esaminare la memoria del sig. Costa, e darne giudizio; non possiamo disconvenire della giustezza delle cose dal medesimo proposte, secondo la esposizione compendiate che ne abbiamo fatta, e però proponiamo all'Accademia di approvare la memoria per pubblicarsi negli atti.

MICHELE TENORE

GIOVANNI GUSSONE

A. SCACCHI *Relatore*.

A questi lavori per gli Atti , il socio *A. de Martino* , nell'anzidetta tornata , aggiungeva pel *Rendiconto* la seguente

N O T A

SULL' ANATOMIA PATOLOGICA DEL *DIABETE*

Nella dottrina del diabete, la fisiologia sperimentale è andata di gran lunga innanzi alla patologia clinica, in quanto alla ricerca delle *sedi*, e della *natura* delle lesioni organiche da cui dipende l'aumento della formazione di zucchero, e la sua emissione per le urine.

Un fisiologo moderno , dotato al pari del nostro Spallanzani del genio della scoperta, dopo aver disvelata nella economia animale una novella funzione, la produzione incessante dello zucchero, che nei processi dell'assimilazione organica, e della calorificazione assume parte importante, e dopo averne disascosa nel parenchima del fegato la fabbricazione , era poi indotto ad eccitare col mezzo di lieve puntura il pavimento del quarto ventricolo, ed in corrispondenza dell'origine dell'ottavo paio de' nervi , per esaminare se mai da tale eccitamento la formazione fisiologica dello zucchero nel fegato per avventura aumentasse. L'esame delle urine, qualche ora dopo, gli rivelava ch'ei produceva così un *diabete artificiale*. Questa scoperta colpiva vivamente l'attenzione di tutti i fisiologi contemporanei. Ma è meraviglia, come sinora l'anatomia clinica di uomini diabetici, non possenga che una sola osservazione, che col mezzo della sezione abbia manifestamente rinvenuta in tal centro l'alterazione morbosa. Magendie, nell'autossia di un diabetico , verificava l'esistenza di *due punti lesi* nel pavimento del 4° ventricolo, proprio nello spazio alla cui puntura conseguita un diabete artificiale.

Egli è vero, che da Frank sino a Goolden i grandi clinici avevano intraveduto un rapporto del diabete colle lesioni del sistema nervoso, e sinanco delle cause le quali, siccome gli *animi patemata*, operano direttamente sui centri di questo sistema. Sul quale rapporto etio-

logico si meritano una particolare menzione le investigazioni di Ramaglia, il quale in tutt'i casi di diabete per lui esaminati ha sempre rinvenuto un preliminare distinto della innervazione cerebro-spinale, per *cause morali*, cui ha tenuto dietro la glucosuria. Il professore Prudente nelle sue importanti ricerche sul diabete intravedeva un nesso tra le affezioni del cervello e la glucosuria; ed il sig. M. de Sanctis comunicava alla nostra accademia di medicina la storia di un caso di *diabete, dipendente da dismenorrea e da isterismo*, e curato con successo mediante un trattamento diretto contro siffatta nervosi (1).

Il sig. Goolden, dell'ospedale di S. Tommaso in Londra, ha pubblicata una serie di osservazioni, piene d'importanza, intorno a' rapporti del diabete colle affezioni del cervello (2).

Infine il sig. Leudit, in quattro osservazioni di glucosuria, seguiva la filiazione del diabete dalla lesione cerebrale, e la comunicava all' accademia delle scienze di Parigi nella sessione dei 2 marzo di quest' anno.

Ma in tutte queste cliniche osservazioni vuolsi riflettere, che primamente si tratta di malattie nervose cospicue, e definite per la loro forma, dolorosa, spasmodica, convulsiva o paralitica, in cui il fatto del passaggio di zucchero nelle urine, diviene un sintoma secondario, e non un sintoma primario e patognomonico, anzi il sintoma costitutivo e caratteristico della malattia, siccome nel diabete essenziale; e per secondo, in quelli stessi casi, ed in questi soprattutto desideri l' esame anatomico-patologico della sede e della natura della lesione nervosa: di guisa che l' autossia di Magendie si rimaneva ancora unico e prezioso documento patologico in conferma della scoperta di fisiologia sperimentale. Per la qual cosa stimiamo comunicare all' accademi la seguente osservazione da noi testè raccolta.

Marianna Esposito di Napoli, di anni 38, di temperamento linfatico, ricamatrice, era ricevuta, per diabete, nel nostro ospedale degl' Incurabili, in aprile di quest' anno, al letto n. 6 della 5^a sala, il cui servizio medico è a noi affidato. La quantità di urina ch'ella emet-

(1) Ved. Rend. dell' accademia medico-chirurgica.

(2) Ved. Gibb. *Memoire sur l'assimilation du sucre* - *An. des sciences natur.* t. IV, 1835.

teva nelle 24 ore, era di circa 15 litri, contenente l'1 0/10 di zucchero.

Un disordine d'innervazione per potente causa morale dava in lei origine al diabete. A tal proposito ella narrava, essere più volte contagiata da diverse forme di sifillide, ma senza alcuna manifestazione di lue. Intanto, mentre un giovedì di ottobre del 1856, stando sana, recavasi in casa alcuni suoi parenti, incontravasi in alcuni ubbriachi armati, uno de' quali dipartitosi dagli altri davasi ad inseguirla. Smarrita per un tal fatto, e compresa di spavento, se la dava a gambe, e non prima che fosse giunta in sua casa e rassicurata dell'allontanamento di tal uomo, riprendeva sua calma. Risentiva però generale alteramento dei nervi dal quale col sonno il dì appresso sembrava del tutto affrancata.

Ma, dopo una settimana dall'avvenimento, ella cominciava a patire nella regione delle reni un certo senso penoso di slombamento, di cui non sarebbesi addata punto, se non avesse veduto coincidere con esso un *aumento duraturo di urine*, con progressivo e crescente dimagrarsi del corpo, quantunque l'appetito si facesse sempre più imperioso. Da quel tempo la mestruazione non più appariva, nei successivi periodi mensuali. Dopo aver taciuto e trascurato un tanto male per oltre a 5 mesi, emaciata e debole della persona chiedeva finalmente l'ammissione all'ospedale.

Verificati tutt'i fatti del diabete genuino, prescrivemmo il seguente trattamento esternamente. Ripetuti vescicanti sulla *nuca* e sul *fegato*, ed internamente *assa fetida* ed *acetato di morfina*. L'alimentazione ordinaria e sana dell'ospedale.

In due settimane anche in questo caso, siccome in altri, verificavamo notevole diminuzione della glicosuria.

Ma una sfrenata diarrea mucosa (di cui non manca nel diabete qualche altro esempio per noi osservato), dai 10 ai 19 di maggio, la toglieva di vita.

Autopsia 14 ore dopo la morte. — Nostro unico proposito si fu quello di esaminare lo stato della midolla allungata. La quale realmente era sede di due sorte di alterazioni.

1.° Tutta l'aja del pavimento del 4° ventricolo presentava la sostanza nervea di color roseo alquanto plumbeo e *rammollita al primo grado*. Però l'esame microscopico dei fasci ce ne faceva scorgere di-

stinte le fibre varicose sottili, integre e non a frammenti, siccome osservavamo normali i corpuscoli ganglionari della sostanza grigia; cioè, in mezzo ad incipiente rammollimento, gli elementi istologici della parete inferiore del 4° ventricolo conservavano l'integrità delle loro forme.

2° Nell'aja medesima del pavimento del quarto ventricolo esistevano *cinque piccoli fuochi sanguigni*, che in lunghezza si estendevano da 1-2 millimetri e di circa 1 millimetro si profondavano. Di essi, tre eran compresi nello spazio interposto tra i tubercoli di Wenzel e l'origine dei nervi dell' 8.° paio, appunto in quello spazio alle cui punture conseguita il diabete artificiale; degli altri due, uno vedevasi esattamente sottostante al fascetto radicolare del sinistro nervo dell' 8.° paio, e l'altro 1½ millimetro più indietro del fascetto radicolare destro, ambidue circa 1 mm. discosti dal solco mediano superiore.

Le fasi di colorito de' piccoli fuochi sanguigni, mostravano la data dei punti lesi superiori all'origine dell' 8.° paio alquanto più remota di quella dei punti lesi sottostanti: l'origine di tutti però posteriore al fatto della congestione e del rammollimento; questa lesione consecutiva alla violenta impressione morale, e la glucosuria dipendente da quelle lesioni della midolla allungata.

La pia madre di questo centro encefalico presentava iniezione capillare flogistica, ed era sparsa di molte e cospicue granulazioni.

Lo stesso socio nell'ultima tornata del novembre leggeva la seguente altra Nota

SULLA DISTINZIONE ORGANICA

DEL SENSO DELLA TEMPERATURA DEL SENSO DEL TATTO

N O T A

per A. DE MARTINI

Le particolarità anatomiche ultimamente scoperte nelle papille del tatto, e le differenti sensazioni che le impressioni della cute possono provocare, mi hanno indotto a fare una serie di esperienze sulla distinzione organica del senso termico dal senso del tatto.

Ogni organo di senso è un apparecchio di speciale struttura posto innanzi ad un nervo fornito di irritabilità specifica.

A questa legge organica han formata sinora eccezione i piccoli organi di tatto della nostra cute. Ma nel 1852 i sig. Wagner e Meissner hanno scoperto, in ciascuna papilla cutanea di tatto, un particolare corpuscolo, formato di struttura e di proprietà speciali, col quale la fibra nervosa tattile viene in particolare rapporto. La struttura del *corpuseolo del tatto*, ed il suo *rapporto* colla fibra nervosa sono stati meglio illustrati e rappresentati dal D. Oehl nell'opera presentata dal nostro segretario perpetuo all'accademia nella passata adunanza.

Dall'altra parte tutti sappiamo, che mediante il senso cutaneo noi abbiamo, non soltanto le varie sensazioni di tatto, ma pure le sensazioni di temperatura.

Di qui sorge naturalmente il quesito: il senso della temperatura è organicamente distinto dal senso tattile?

Prima che si scoprissero i *corpuscula tactus*, il celebre Enrico Weber aveva fatta l'esperienza, che un corpo freddo applicato immediatamente sui tronchi de' nervi cutanei non produce la sensazione del freddo. Conchiudeva da ciò: che per sentire il caldo ed il freddo, son sue parole, è necessario che il dilatamento ed il restringimento prodotto dal caldo e dal freddo *operino innanzi tutto sugli organi microscopici del tatto situati nel derma, a noi per verità tuttora ignoti, e per mezzo di essi sulle estremità de' nervi del tatto.*

Ora io richiamo l'attenzione dell'accademia sopra un fatto sperimentale che ho osservato in questi giorni facendo al proposito una serie di ricerche sul senso del tatto.

Si sa, che le scottature di 3° e 4° grado, secondo la distinzione Dupuitren, distruggono le prime imperfettamente, e le altre perfettamente, il corpo papillare del derma, ed in conseguenza portan via quel delicato apparecchio delle papille tattili, il cui ufficio si desidera conoscere. Allorchè dunque la superficie di una scottatura di quei gradi è già da tempo risaldata, quale cangiamento o perdita di facoltà ne soffre il senso del tatto?

In un giovanotto, che presenta nella regione superiore del dorso una estesa e cicatrizzata scottatura, di 3° grado nella periferia, e di 4° grado nella parte centrale, assistito dal solerte alunno D.^r Fabiani, abbian saggiato lo stato della sensibilità tattile col noto metodo di due impressioni fatte sulla superficie della scottatura colle punte del branche divaricate di un compasso. Il giovanotto dalle due impressioni alla distanza di poco più di 2 poll. ha percipite due distinte sensazioni. Ripetuto sui diversi punti di tutta quella superficie il medesimo saggio, abbiamo avuto costantemente lo stesso risultato; onde ci è sembrato, che il senso tattile generale si fosse conservato in quel derma mancante di papille.

Siamo quindi passati a saggiare lo stato della *sensibilità termica*: e questo saggio abbiamo fatto mercè l'applicazione del ghiaccio, di spugna imbevuta di acqua a circa 65 R., e infine col far cadere su quella superficie stille di cera liquefatta.

Dall'applicazione del ghiaccio a larga superficie, (mi servo delle parole del giovanotto), provo leggera sensazione di *fresco*, ma non di *freddo* come sulla cute sana del dorso. Il calore dell'acqua della

spugna lo sento come quello della lena; e così pure il caldo delle stilette di cera liquefatta.

Queste stesse sensazioni poi divenivano anche più deboli sulla superficie scottata a 4. grado, dove cioè i piccoli apparecchi papillari erano per intero distrutti.

Conoscendo la necessità e la importanza di continuare questo genere di ricerche sopra altri punti della cute, ove la sensibilità tattile e termica sono più ricche, allorchè si offrano occasioni opportune, ci sembra che i risultamenti che per ora abbiamo avuto l'onore di comunicare all'Accademia porgano già alcun dato sperimentale intorno all'organica distinzione del *senso termico* dal *senso tattile*.

CONTINUAZIONE DE' LAVORI PER LA CLASSE DI SCIENZE NATURALI
NEL NOVEMBRE E DICEMBRE DEL 1857.

Sembrava terminato affatto il periodo de' lavori accademici della classe delle Scienze Naturali al prendersi le vacanze autunnali; e però nel corso di queste compivasi la stampa per la parte, che le riguardava, sì per le Memorie, che per ciò che si appartiene alla storia di esse; ma nella prima tornata del novembre (18 di tal mese) il socio sig. *A. Nobile*, quantunque si appartenesse alla classe di Matematiche, e pe' suoi studi, e per la sua professione, presentavasi con due Memorie riguardanti il nuovo principio dell' *Induzione elettrostatica* posto in veduta dal fu nostro illustre socio cav. *Melloni*, e presentato all'Accademia alla vigilia di sua morte, che l'ebbe, dopo questa, giudicato meritevole dell'inserimento ne' suoi Atti; ma divisasi poscia le opinioni tra' fisici illustri dei nostri tempi, ritrovava quello un valido sostenitore nella persona dell'infat-

ticabile segretario dell'Accademia de' Lincei di Roma sig. *Paolo Volpicelli*, come pure nell'illustre *de la Rive*, e nel nostro socio *Nobile*, il quale dopo aver dato all'Accademia un suo lavoro, che intitolava: *Sul teorema fondamentale dell' induzione elettrostatica*, che vedesi inserito in queste notizie preliminari da pag. xxiv a xli (pel *Rendic.* da 63, 70) presentavasi ora con due Memorie, l'una: *Intorno ai fenomeni della elettricità indotti nei conduttori non isolati, o isolati, dopo aver per poco comunicato col suolo*; l'altra: *Dell'influenza dei conduttori isolati e non isolati su i conduttori indotti ed isolati, e su lo stato elettrico di questi ultimi*; e queste venivano rimesse all'esame de' soci *Palmieri*, *de Martini* e *de Gasperis*, che facendovi da relatore il primo di essi, nella tornata del 18 dicembre, con la quale chiudevasi il nostro anno accademico, presentavano il seguente

R A P P O R T O

Le leggi della elettricità d'influsso che pareano già da lungo tempo fermate, furono in parte rivate in dubbio dal Melloni, il quale con alcune sue sperienze stimò dimostrato che la elettricità contraria a quella del corpo attuante sia sempre dissimulata, cioè priva di tensione. Nel riferirvi noi le sperienze dell'illustre accademico dopo ch'era già morto, prevedemmo le dispute, che sarebbero surte tra seguitatori ed avversari della nuova dottrina, e ci dolemmo che la morte avesse impedito al Melloni di escogitare nuovi modi per propugnare la propria sentenza. E senza dichiararci in favore o contro l'anzidetta dottrina, proponemmo di porre a stampa ne' nostri atti la memoria del defunto nostro socio, appunto perchè la medesima offriva a' fisici nuovo campo d'investigazioni (*) in un argomento che pareva per lo innanzi piena-

(*) Ved. il *Rendiconto* pel bimestre di settembre ed ottobre 1834.

mente rischiarato. L' accademia approvando le conclusioni del nostro rapporto non rimase mallevadrice della verità della legge messa innanzi dal Melloni , e però resta libera nel giudicare di lavori che le possono venire presentati sul medesimo tema tanto favorevoli, quanto contrari alla sentenza del suo illustre socio. Anzi siamo di credere che il voto accademico in generale non importi la piena adesione a quanto si contiene in una memoria , ma l' approvazione delle conclusioni del rapporto le quali in generale dichiarano la memoria meritevoli di esser pubblicato negli atti. (*)

Ciò posto pel lavoro del Melloni avvenne quello, che la commissione avea preveduto : alcuni con nuove sperienze procurarono di riformare la legge dal nostro socio annunziata , ed altri credettero con sottili investigazioni sperimentali d' impugnarla.

Tra i primi stà il nostro socio ed egregio astronomo signor Antonio Nobile (**), il quale discende ora per la seconda volta nell'arena per difendere la dottrina del Melloni. Il medesimo ora in due memorie espone le esperienze per lui praticate in favore della dottrina che difende , non che la interpretazione di alcuni fatti messi innanzi dagli avversari. Noi lasciando all' autore la cura di riassumere i suoi lavori per uso del rendiconto vogliamo notare come egli non abbia mancato di mettere in disamina un' esperienza, che sembra formidabile contro la dottrina del Melloni. Se un cilindretto metallico verticale isolato o non isolato termini nella parte inferiore in due pendolini , accostando a questi un corpo elettrizzato i pendolini si vedranno divergere. Il nostro socio accostando a' detti pendolini un conduttore in comunicazione col suolo , non solamente non ha scorto attrazione tra questo ed i pendolini come avrebbesi aspettato , ma ha visto in questi scemare la divergenza , la quale si è assicurato non derivare da dissimulazione parziale dell' attuante, quindi ha fatto ricorso ad una ingegnosa spiegazione derivata dalle atmosfere elettriche. Noi senza ricusare l' anzi detta spiegazione , facciamo notare che quello scemare di divergenza non è perdita di tensione ma ripulsione tra il corpo ed i pendolini , perocchè se questo corpo sia un filo metallico introdotto tra i pendoli-

(*) Un tal ragionamento deve aversi come un modo di pensar proprio del *relatore*, ma non dell' Accademia.

(**) Si noti che il Nobile firmò ancor egli quell'antico rapporto.

ni anzidetti ne accresce di molto la divergenza. Per la qual cosa i fautori della vecchia dottrina diranno che cotesta ripulsione deriva dal trovarsi i pendolini ed il conduttore che ad essi si approssima sotto il medesimo influsso, e però nelle medesime condizioni di elettricità. E siccome tra le dottrine della dissimulazione assoluta e della tensione assoluta sta quella della tensione relativa intraveduta già dal nostro socio nel suo precedente lavoro, e sapientemente formolata dal Volpicelli, così potrebbe la citata esperienza venire comodamente spiegata in questa dottrina di conciliazione. Comunque sia senza pretendere che la questione sia del tutto terminata, noi crediamo che le memorie del Nobile sieno meritevoli di esser pubblicate ne' nostri atti.

MICHELE TENORE

ANTONIO DE MARTINO

ANNIBALE DE GASPARIS

LUIGI PALMIERI *Relatore.*

L'Accademia in vista di tal rapporto ebbe approvato unanimamente le due Memorie del socio *Nobile*, deliberandone l'inserimento nel volume II di tale sua pubblicazione, prossimo ad uscire alla luce.

Nella stessa tornata il socio *Scacchi*, ricordando l'incarico ricevuto dall'Accademia fin dal 5 agosto 1857, su di una Memoria del *prof. Guiscardi* data in quella tornata, riguardante un *Minerale del monte Somma* (*) pre-

(*) Con questa occasione l'è necessario avvertire, che ebbe il *Guiscardi* nel 1855 presentata altra Memoria sulla *Gargania Brocchi*, che gli venne approvata, e veniva annunziata nelle notizie preliminari, a pag. XLIII, e però auco nel *Rendiconto* come l'ultima per la Classe delle Scienze Naturali, nel 1856; ma nel punto che doveva porsi sotto il torchio, l'autore, che aveva seco gli oggetti, ed il disegno di essi, trovandosi lontano da Napoli, bisognò sospenderne la stampa, rimettendone ad ora la pubblicazione insieme a quest'altra sua.

sentava in di lui nome, e de' suoi colleghi *O. G. Costa* e *Luigi Palmieri* il seguente

RAPPORTO

per la memoria del Sig. Guiscardi sulla Guarinite.

Nell'adunanza del dì 5 Agosto il sig. Guiscardi presentò all'Accademia una memoria sopra una novella specie di minerale del Monte Somma, sulla quale chiamati a dare il nostro giudizio, sommettiamo agli onorevoli nostri colleghi le seguenti considerazioni. L'antico Vesuvio, oggi propriamente distinto col nome di Monte di Somma è ammirevole tra gli altri vulcani pel gran numero di specie ortognostiche appartenenti ai suoi incendi antistorici, talune delle quali non si son mai rinvenute in altra parte della superficie terrestre. Fra queste specie da gran tempo si conosceva trovarsi lo sfeno, sorta di minerale che s'incontra pure in altre contrade vulcaniche ed in molte rocce cristalline più antiche che non sono i vulcani. Esso si compone di silice, acido titanico e calce, i suoi cristalli si riferiscono al sistema monoclinoadrico, ed i cristalli del M. Somma sono notevoli per la loro abituale piccolezza e pel loro colore ch'è sempre giallo. Intanto i minuti cristalli gialli del M. Somma appartengono a due specie ben distinte sin ora confuse col nome di sfeno; ma la cui forma trimetrica monoclina, e la somiglianza delle misure goniometriche dimostrano facilmente la sua identità col vero sfeno; e l'altra i cui cristalli non potendosi riferire al medesimo sistema, devesi avere come distinta dalla prima. Dell'esame di questa seconda qualità di cristalli essendosi occupato il Sig. Guiscardi ha riconosciuto, con qualche difficoltà è vero, ma con piena certezza, che essi debbono riportarsi al sistema dimetrico ortogonale, ha determinato il rapporto delle lunghezze degli assi con soddisfacente esattezza, ed ha dato le figure delle loro forme più frequenti. Assicurata in tal guisa la differenza specifica tra i cristallini dimetrici ortogonali e gli altri trimetrici monoclini di sfeno, nè permettendo il rapporto rinvenuto negli assi di avvicinarli ad altre specie del medesimo sistema cristallografico, è

piaciuto all'Autore denominarli *Guarinite* per fare omaggio alla memoria del nostro socio di cui deploriamo la recente perdita.

Rimaneva poi a definire la chimica composizione della *Guarinite*, cosa assai difficile a potersi eseguire per la estrema piccolezza dei cristalli, i quali nemmeno incontra trovarli molto abbondanti. Nondimeno il sig. Guiscardi eseguendone l'analisi sopra una quantità poco minore di un terzo di grammo, ha trovato che la *Guarinite* si compone al pari dello sfeno di silice, acido titanico e calce; e quel che rende più importante i risultamenti della sua analisi è la proporzione dei menzionati elementi, la quale è molto prossima a quella da altri chimici trovata nello sfeno. Quindi è che, se non ancora con tutta evidenza, almeno con molta probabilità, lo sfeno e la *Guarinite* costituiscono un novello esempio di dimorfismo.

Non abbiamo mancato da parte nostra di verificare i caratteri cristallografici della *Guarinite* che abbiain trovato conforme alla descrizione datane dall'autore, ed abbiain pure ripetuto quei saggi che ci è stato possibile eseguire sopra piccolissima quantità della medesima sostanza. E non rimanendoci alcun dubbio che essa meriti un posto distinto tra le specie minerali, proponiamo all'Accademia di approvare la memoria del sig. Guiscardi per essere inserita negli atti.

MICHELE TENORE

O. G. COSTA

A. SCACCHI *Relatore*

LUIGI PALMIERI.

Nella 1^a tornata del dicembre, il socio corrispondente *A. Costa*, presentavasi all'Accademia, per farle verbalmente conoscere, di aver trovato, nel *Wiener Entomologische Monatschrift*, cominciato a pubblicarsi in Vienna nel 2^o semestre del corrente anno, in un articolo del sig. *Loew*, descritto e figurato un nuovo genere di Ditteri, denominato *Pithogaster*, da costui istituito per un Acrocerideo della Spagna, che specificamente denomina *P. inflatus*, il

quale corrisponde per l'appunto all'*Opsebius* descritto nella sua Memoria intitolata : *De quibusdam insectorum generibus descriptis , iconibusque illustratis* , che ebbe presentata all' Accademia, e delle quali egli medesimo n' ebbe pur dato un esteso sunto nel fascicolo del *Rendiconto* pel semestre di gennajo e febbrajo 1856.

Con ciò egli protesta di non intendere già intaccare di plagio il ditterologo alemanno ; ma solamente documentare l' identità dei due generi, e che egli precedè in data di tempo, col suo *Opsebius*, il *Pithogaster* del *Loew*, con aggiugnere sembrargli però tali insetti diversi nella specie, e ne adduce le ragioni , che possonsi leggere in una lettera da lui diretta, a quest' oggetto, al sig. *Camillo Rondoni* entomologo di Parma , e resa già pubblica con le stampe in un nostro giornale. Conchiude egli dell' acquisto che ha fatto l' *Entomologia* , dal 1855 al 1857 di due specie nel nuovo genere di *Enopidei* , l' una napoletana , l' altra spagnuola ; e di esso passa a darne la monografia.

Or noi convalidando tutto quello , che dal nostro socio si è asserito per la data della Memoria e del sunto, dobbiamo solamente osservare , che la difficoltà per le trasmissioni all' estero, delle pubblicazioni della nostra Accademia, non ci ebbe fatto ricever da quelle di Vienna la notizia di aver ricevuto il fascicolo del *Rendiconto* di sopra accennato prima di pochi mesi sono.

SCIENZE MORALI

Avendo ottenuto la nomina di socio onorario un dei nostri riputati economisti, il cav. *Giovanni Cenni*, già intendente della provincia di Calabria Ultra 2.^a, distinguendosi nella sua categoria di socio, nel prender possesso del suo posto, presentava all'Accademia diversi suoi lavori a stampa, ed annunziavagli per la tornata prossima la seguente dissertazione

RIFLESSIONI

SUL LUSSO, E SULLA SUA MORALE E NOTEVOLE INFLUENZA.

Pressochè tutti i pubblicisti i quali, di proposito o incidentalmente, ragionarono delle cose economiche, fino al cadere del passato secolo, credettero importante cosa di tener parola del lusso; e chi riprovalo, come dissipatore delle private e delle pubbliche sostanze, chi qual corruttore dei costumi, e chi per contro innocuo ed anche utile reputollo, come promotore di civiltà, d'industria, di arti, di commercio, e come livellatore delle private fortune mal ripartite, pel fatto delle leggi, o per altre cagioni; nè mancarono in fine di quelli che, talvolta utile, talvolta nocivo lo qualificarono, arguendo più dagli accidenti esterni, che dalla essenza intima del fatto economico che prendevano in disame. Ciascuno di tali scrittori imprese a definire in che il lusso consistesse, ma secondo il punto di vista in cui si erano collocati nelle loro meditazioni, ed il giudizio che ne avevan formato, le definizioni rispettivamente date esser dovevano, e necessariamente furono, dissimili, incomplete e sempre inesatte, di modo che, lungi dall'illustrare la materia, la resero più dubbiosa ed incerta.

La parola lusso racchiude un' idea di rapporto, talmente elastica, talmente complessa, da escludere la possibilità di una soddisfacente definizione; non però l' universalità degli uomini, come per molte cose suol succedere, allorchè usa di quella voce, sa più o meno quel che intende, nella varietà delle condizioni sociali di stato e di fortuna, e sa pure, che quel che per talune di esse sarebbe lusso, per altre nol sarebbe, ma invece l' opposto. Per una famiglia povera un calesse, o quella specie di coechio che il frasario spiritoso ed inventivo dei francesi chiamò *demie-fortune*, sarebbe lusso, non sarebbe che comodo per altra mezzanamente provveduta, parsimonia per una ricca, e grettezza per una doviziosa, nel grado di mantenere, senza dissesarsi, non una, ma più bighe, per le proprie esigenze, e pei godimenti della vita; e quel che vale pel coechio, vale similmente per la casa, per le suppellettili, per gli abiti, per la tavola, teatri, casine, ed altre tali cose che lungo e fastidioso sarebbe enumerare, perchè cosa non v'ha la quale, diversamente usata, e nella indefinita gradazione delle classi sociali, divenir non possa oggetto di lussosa consumazione e viceversa.

Gli economisti più recenti però non hanno stimato fare nelle loro pagine al lusso gli onori di speciale trattazione, e solo per incidente ne han talvolta parlato, o meglio, usato del vocabolo, lo che a noi pare più logicamente inteso. Ed in vero, dopo i progressi della scienza i quali ne hanno allargate le basi, classificando i fatti, la mercè di analisi accurate de' fenomeni economici, cioè produzione, distribuzione e consumazione delle ricchezze; e determinata la essenza del valore, della proprietà, dei capitali, dell' industria, delle mercedi, dei profitti, degl' interessi, rendita ed altro che ne formino la materia; dopo di essersi chiarito e dimostrato non essere il consumo l' efficiente della produzione, ma il capitale, poichè senza capitali nulla si può produrre, e senza produrre nulla si può consumare, onde a misura che più si produce, più si consuma, non era più possibile, cadere in errore sulla vera indole della consumazione di lusso e sulle sue conseguenze, come non era possibile farsi illusione sulla utilità della circolazione del danaro, sulla bannale, ma non ancora spenta credenza, che le prodigalità del ricco alimentino il povero ed assorbano la esuberanza dei prodotti eccessivi, quasi che la circolazione della mo-

neta fosse causa e non effetto delle civili transazioni, quasi che il lavoro momentaneo pagato dalla profusione non costituisse un fatto anormale, e potesse a perpetuità sostenersi, tuttochè esaurita la sorgente da cui venivan precapite le mercedi, e la intermittenza del lavoro e la miseria comune non fosse il risultamento indeclinabile di ogni dissipazione; e quasi che in fine la potenza di produrre fosse di necessità circoscritta a determinati prodotti, anzi che nell' indefinito campo si aggirasse dell' inventiva dell' uomo e dei godimenti di cui è capace, la qual cosa rende impossibile il voluto eccesso, meno in determinati articoli di produzione, e fornisce ad un tempo, colla permutazione, più ampia mercede alle classi laboriose, offre a tutti mezzi di abbondante, agiato, e confortevole vivere, mercede di sempre più larga e svariata consumazione di oggetti necessari, o gradevoli. E che sia così basterà per poco dare uno sguardo retrospettivo al passato, per vedere la serie innumerevole di tanti diversi oggetti di novella produzione che i nostri antenati non solo non conobbero, ma neppur presentarono, e dei quali la generazione presente profitta e gode, aggiungendo all' antica nuova e larga massa di ricchezza, e però di permutazioni, di mercedi, di profitti e di godimenti.

Due sono le categorie in cui la scienza divide e classifica la consumazione dei prodotti di qualsiasi branca dell' industria umana, a cominciare dai più rozzi della caccia e della pesca, ed a terminare ai più delicati e complessi portati delle arti sussidiate dalle tecniche e fisiche conoscenze, 1.° cioè, la consumazione produttiva la quale, segregando, cambiando e modificando le materie su di cui rivolge la propria potenza fisica ed intellettuale, riproduce quel che assorbe in novelli e più ampi valori: 2.° la consumazione improduttiva, o sia quella che è intesa alla soddisfazione immediata dei bisogni dell' uomo, o a procacciarsi comodi e godimenti, la quale seconda consumazione non accresce, ma diminuisce incessantemente la massa delle ricchezze che, convertite in capitali e congiunte al lavoro, dar potrebbero origine a nuova e più larga produzione, ma costituisce nondimeno il fine estremo dell' attività dell' uomo il quale non per altro si sottopone alla fatica ed al risparmio, se non per sussistere e procacciarsi mezzi di vita più agiata, civile e confortevole, e soddisfare in pari tempo alle morali esigenze, secondo le svariate sue condizioni e tendenze nell' ordine sociale.

Tali cose premesse, parlar di lusso, e se utile o dannoso, della convenienza o inutilità delle così dette leggi suntuarie, figlie più della intolleranza e delle gelosie delle classi privilegiate, che dell'errore, sembra ormai futile discettazione, da che questa specie di consumazione, rientrando evidentemente nella seconda delle due categorie, non può essere giammai cagione di ricchezza per la società, ma per contro di danno e di rovina, qualora in modo permanente assortisse valori al di là di quelli che l'altra categoria di consumi riproduce, come nelle singole famiglie, ove la spesa abituale eccedesse i mezzi rispettivi, cosa per altro affatto impossibile in modo indefinito, dappoi- ché, dato fondo al capitale della ricchezza, la economia o la miseria sarebbero presto o tardi la conseguenza di tale illogico e pazzo modo di consumare. Che perciò sempre che l'uomo e la società consuma pei suoi bisogni e pei suoi godimenti meno di quel che produce colla sua industria e coi suoi capitali, e sia pure nel modo più largo, nè preterisce i doveri di giustizia e di umanità che dominar denno qualunque atto della umana volontà, il lusso, conseguenza e non cagione di cresciuta e di crescente produzione, non offende nè la privata, nè la pubblica fortuna, appresta il modo di più ampiamente godere dei beni largiti dal Creatore, senza diminuire il capitale, pietra angolare del benessere sociale e di qualsiasi industriale progresso, e senza perciò toccare il fondo delle mercedi delle classi laboriose che una tal consumazione, siffattamente regolata, rispetta ed accresce.

In quanto poi agli effetti del lusso in rapporto della morale e dei costumi, verso i quali taluni scrittori, e molti che nol sono, attribuiscono al medesimo un influenza malefica e corruttrice, è d'uopo osservare, che costoro confondono cose fra loro affatto diverse, cioè il largo e confortevole vivere, colla profusione, colla prodigalità, colla dissipazione, collo stravizzo che ne sono la degenerazione; e siccome nell'ordine fisico un corpo per gradualì insensibili modificazioni d'impasto e di struttura, passa, come le rocce di transizione, da una specie all'altra, secondo la preponderanza e la disposizione degli elementi che le compongono, così nell'ordine morale un fatto innocuo ed anche virtuoso può, per oltranza, divenire malefico e condannevole; l'economia, la sobrietà possono trascendere in parsimonia, in avarizia, come la generosità, la splendidezza, il lusso, in prodigalità, in

dissipazione, in crapola; ma non perciò chiameremo sordida avarizia la saggia economia delle proprie sostanze, o prodigalità e dissipazione il vivere semplicemente lussoso, stranamente scambiando il senso delle parole e di concetti affatto diversi, o sia l'uso legittimo delle ricchezze, coll'abuso delle medesime, la quale confusione ha ingenerate nelle opinioni le discrepanze che han resa astrusa e controversa l'indole di un fatto economico-morale, la quale esaminata a fondo, e ben determinata, è chiara ed evidente.

E qui siam chiamati ad una osservazione di non minore importanza sugli effetti morali della consumazione lussuosa.

È innegabile che la grettezza, la parsimonia, l'avarizia rendono l'uomo meschino, crudele insensibile ai suoi bisogni personali e di quelli che lo circondano, non esclusa la famiglia; e più ancora a quelli degli altri, spegnendo in esso il sentimento della carità, della beneficenza, mentre al contrario il largo, decoroso e splendido vivere nobilita questi sentimenti, sostiene e rialza la coscienza della propria dignità, rendendo l'uomo medesimo più facile alle espansioni verso il simile, su di se riportando le altrui sofferenze, e però più umano, compassionevole e benefico, perciocchè gl'interessi morali della società sono dal lusso, anzichè dalla grettezza favoriti.

Conchiudiamo adunque, riassumendoci,

1.° che il lusso, come consumazione improduttiva, per se medesimo diminuisce e non accresce la massa delle ricchezze;

2.° che quando questa consumazione equipara, o è minore della produzione, non reca danno veruno, e tende alla più larga soddisfazione dei bisogni e dei godimenti della vita;

3.° che può bene il lusso degenerare in fatti di altro genere, e di natura malefica e corruttrice, ma allora non è più lusso, bensì prodigalità, dissipazione, crapola, dei quali vizii niuno imprenderà giammai a fare la giustificazione e l'apologia.

Da queste riflessioni del *cav. Cenni*, prendeva le mosse il socio ordinario sig. *Masdea*, di leggere, nella tornata del 24 luglio, una 1.^a Memoria intitolata *Critica filosofica sul lusso*, che inviata per esame a' soci *duca di Ventignano*,

e cav. IV. Rocco , meritava da essi la seguente ampia relazione, che letta all' Accademia, dava luogo all' approvazione per l' inserimento negli Atti

RELAZIONE ACCADEMICA.

La *Critica Filosofica del Lusso* , letta nella nostra tornata del 24 luglio or decorso, è tal lavoro, che onora altamente il suo autore signor Giorgio Masdea.

Incaricati di esaminar la Memoria, e dirne all' Accademia il nostro qualsiasi parere , confessiamo di avere troppo leggermente assunto l' incarico , tanta è l' altezza e l' importanza del soggetto : ad ogni modo adempiremo al mandato con ogni solerzia ed imparzialità.

Il chiaro autore incomincia dal giustificare la intitolazione del suo discorso osservando che l' Etica , la Politica e l' Economia potrebbero egualmente interloquire sulla materia , ma ciascuna delle tre scienze nel suo special modo; in guisa che le conclusioni dell'una potrebbero in ultimo riuscir divergenti da quelle delle altre. E però gli è sembrato opportuno il risalire alla comune radice delle tre scienze per discutere senza perplessità ed incertezza.

Sua prima cura è stata il combattere la dottrina de' così detti Economisti, i quali vorrebbero redimere il Lusso da ogni imputazione, dicendolo piuttosto un bene gradevole nella privata , desiderabile nella pubblica vita.

Prosegue proponendone la definizione. La sua radice , egli scrive, è ne' bisogni umani del Vitto , del Ricovero e del Vestito, i quali possono essere soddisfatti con progressive gradazioni di necessità , di comodità , e di eccesso. Quindi il Lusso è tutto ciò, che in riguardo al Vitto , al Ricovero , al Vestito sorpassa i limiti delle necessità e delle comodità. E sviluppando anche meglio la data definizione , soggiugne che il Lusso è il bisogno della ostentazione, della ricercatezza e delle superfluità : le molle che il muovono, sono la Vanità e l' Ambizione: e da queste premesse desume tre verità.

La prima è che la consumazione lussuosa non fomenta che la lussuosa

produzione in danno delle produzioni di necessità e di comodità; perchè divorando le sostanze de' consumatori, li pone fuor misura di provvedere al necessario ed al comodo, per cui anche le arti corrispondenti languiscono e volgono a decadenza.

La seconda verità è questa: che per fatti storici e per dati Statistici lo sciupo, la gaiezza e lo scialo sempre van congiunti alla penuria, alla doglia ed allo squallore del popolo. Lusso esorbitante e lurida miseria sono consorti inseparabili.

E la terza: che i lavori di Lusso minacciano sempre i produttori d'ingombro di magazzini, di attrasso di rimborsi, di mancanza di commissioni e di traffichi. E ciò senza porre a calcolo gli effetti di nuove scoperte chimiche, meccaniche, tecniche, donde fogge novelle, per le quali le precedenti divengono antiquate e rimangono invendute.

Le produzioni Lussuose, egli prosegue, pongono ad egual rischio e i produttori ed i consumatori: i primi per le eventualità sì frequenti cagionate da' capricci della moda: i secondi per lo sciupo delle proprie risorse, donde le conseguenti scioperatezze, immoralità e prostituzioni.

Occasioni di Lusso? s'incontrano nelle grandi città frequenti di ricchi, di nobili e di potenti. Ivi lo stimolo alla ostentazione è maggiore per le gare di onoranze esterne, donde la ricchezza reale o apparente vien sostituita alla nobile emulazione. Da ciò quello spirito di ricercatezza che invade anche il lavoro, trabalzandolo al di là dei limiti eterni impostigli dalla Divina Provvidenza; e l'irrefrenato desiderio di quelle superfluità che valgano ad abbagliar lo sguardo eccitando l'invidia altrui.

E qui l'Autore sapientemente avverte come non abbiasi a confondere la pubblica con la privata ricchezza: la prima delle quali deve esser sempre fomentata con provide Leggi, onde la prosperità dello stato ne venga progressivamente accresciuta, mentre la seconda non sarà mai refrenata abbastanza.

Indi, sempre ordinatamente procedendo nello svolgimento delle sue idee, egli trascorre alla indagine de'rimedi applicabili alla deplorata infermità. Ricorda di volo le sanguinose conseguenze patite da Atene e da Roma per la inopportuna promulgazione delle Leggi agrarie e ferocce applicazione delle medesime. Accenna l'inefficacia delle leggi suntuarie sempre violate, e le quali, ove pur valessero a raffrenare le

sregolatezze de' ricchi, nulla varrebbero a mitigar la miseria compagna indivisibile del lusso.

Accenna in ultimo a quei provvedimenti ch'egli intitola *rassettamenti civili*; ma convinto che questi non potrebbero essere che locali e temporanei per la necessaria analogia che debbono avere con le leggi, con i costumi e con le condizioni fisiche ed economiche di ogni paese e di ogni gente, si astiene con modesta sobrietà dal particoleggiare l'uno o l'altro provvedimento e li distingue soltanto in due serie, l'una delle quali intenderebbe a svelle, l'altra a palliare la infermità, mentre altronde alcuni preferiscono le morali, altri le materiali discipline.

Chiude finalmente il nostro Autore la sua dotta memoria dicendo, come gli Economisti, occupandosi soltanto di produzione e consumazione, non sarebbero competenti a por modo agli straripamenti del Lusso; e che a buon dritto i soli Etici e Politici bene riuscir potrebbero nell'ardua intrapresa.

Riassunto rapidamente fin qui ne' sommi suoi capi il bel lavoro del nostro chiaro Sig. Masdea, diremo brevissime parole intorno al merito letterario e scientifico della sua operetta.

All'importanza della materia ben risponde la gravità dello stile; l'acconcia elezione delle voci, la lucidità dell'ordine con che seppe svolgere la catena de' suoi pensieri, ed infine la logica severa che lo ha fedelmente assistito nel corso de' suoi ragionari.

Ed in quanto alla parte scientifica, egli si è mostrato bene adentro nelle dottrine economiche, giustificando ogni sua proposizione con copiose autorità di scrittori classici, antichi e moderni, con che fa pruova di sterminata erudizione.

Ma perchè chiamati non già a tessere un elogio, ma a far uso ancora di una critica pacata ed imparziale, dovrà permettere l'illustre scrittore che osserviamo come egli abbia troppo severamente giudicato un frammento del padre della storia inglese Hume, dichiarandolo partigiano del lusso.

Ed invero questo classico scrittore dopo aver deplorato i tempi anteriori ad Enrico VII, allorchè i Grandi d'Inghilterra tenevan a loro stipendio gente di mal' affare per servire in tempo di guerra ed anche di sollevazioni, soggiugne soltanto.

« Il progresso delle arti e del Lusso raffrenò più efficacemente
« quell'uso pernicioso che la severità delle Leggi. I gran Signori ces-
« sarono dal disputarsi il vantaggio di quella maniera di fasto, tosto-
« chè le nuove ricerche nello splendore e nella eleganza degli equi-
« paggi, de'palazzi e de'conviti offerirono loro altre materie di emula-
« zione più dilettevoli. Le turbe oziose ch'essi già tenevano al loro
« soldo, non rimasero più in una molle indolenza. Furono obbligate
« a rendersi capaci di qualche professione, di qualche impiego utile a
« sè stessi ed allo Stato. Fa d'uopo convenire a malgrado di coloro,
« i quali tanto declamano contro il raffinamento delle arti dilettevoli,
« o contro ciò che lor piace di nominar Lusso, che un artigiano, o
« un commerciante industrioso è nel tempo medesimo un uomo più
« stimabile, ed un miglior cittadino che non erano quegli oziosi
« egoisti ».

Ben riflettendovi, è chiaro abbastanza che lo storico d'Inghilterra non volle già scrivere un panegirico del Lusso, ma affermar soltanto che un artigiano o un mercatante valgano assai meglio di uno sgherro o di un *bravo*.

Chiuderemo il nostro dire, forse già troppo lungo, con una non inutile osservazione. Nella prima metà del secolo XIX la società si è radicalmente trasformata in Europa in ogni sua ramificazione, e paragonando nel suo generalissimo aspetto ciò ch'era con quello che ora è, raggiugniamo a colpo d'occhio il principio supremo della immensa avvenuta mutazione, cioè, che all'accumulamento, alla concentrazione, al monopolio, al privilegio è succeduta la suddivisione, la diffusione, l'agguagliamento, la libertà civile. Fino a qual punto queste condizioni dell'Era novella hanno influito sulle passioni, sulle opinioni, sui pubblici costumi? E di questi il Lusso ha conseguito pur esso una trasformazione essenziale? Ecco un nuovo argomento degno di speciale e matura discussione.

Quindi siamo di parere che la Memoria del nostro socio sig. Masdea ben meriti di essere accolta ad inserirsi negli Atti dell'Accademia.

NICOLA ROCCO

DUCA DI VENTIGNANO *Relatore.*

Terminavasi l'ultima tornata dell'anno, con la lettura del socio *cav. N. Rocco*, del parere su di una dissertazione, da più tempo presentata all'Accademia, dal sig. *Giuseppe Mastriani*: intitolata: *Prime linee di una nuova teorica intorno alla probabilità e colpabilità degli atti imputabili*. Un tal parere era il seguente

SIGNORI ACCADEMICI

Il sig. Giuseppe Mastriani ha sottoposto all'esame della Reale Accademia delle scienze una sua memoria intitolata — *Prime linee di una nuova teorica intorno alla probabilità e colpabilità degli atti imputabili* — Studiando l'autore nelle scienze fisiologiche e psicologiche, e nella necessaria colleganza dell'une con l'altre, ha in cotat suo lavoro escogitato una dottrina come andarne misurando la colpabilità degli atti imputabili, la quale ha fondata su la stessa natura umana, composta a un tempo d'un doppio elemento, spirituale l'uno, materiale l'altro. Ha rilevato per tanto in su la libera volontà le influenze dello stato organico del corpo, circoscrivendole per altro ne' giusti loro confini; e nella ricerca de' fenomeni morali truova pur necessaria l'indagine fisica. Muovendo da cosiffatto principio addomanda egli naturali que' sentimenti, e quelle passioni, e quegli atti umani, i quali più sien consuonanti allo stato fisico-morale, e alle concomitanze esteriori degl'individui. Epperò in ispecie stima più facile e più probabile quella virtù o quel vizio che proceda da passione o patimento naturale, e men probabile e più difficile quell'altra virtù o quell'altro vizio che da sentimento o passione men naturale isgorga. E per la ragione stessa ammette una forza di volontà più energica dove sia da superar la foga d'un natural sentimento che faccia contrasto, e riconosce una volontà men efficace dove questa pugna non s'incontri.

Conseguentemente dice esser un vizio soprammodo dannabile il furto nella donna, e il lenocinio nell'uomo, per contrastar sì l'uno che l'altro alla connaturata tendenza dell'individuo. E concludendo pone la probabilità in ragion inversa della colpabilità, reputando più probabile e men colpabile quell'atto ch'è secondo i naturali sentimenti dell'individuo, e men probabile e più colpabile quell'altro atto ch'esce fuor del natural sentimento dell'individuo.

Par che il sig. Mastriani fosse se non altro riuscito a ben formar una teorica per lo innanti non per anco determinata con sufficiente esattezza. Egli è altresì autor dell'opera data alle stampe, la quale ha per titolo. — *Notomia morale, ossia caleolo di probabilità de' sentimenti umani* — Tutti questi suoi studii son degni dell'approvazione e della considerazione dell'Accademia delle scienze.

Or questa aderendo a tal favorevole rapporto, non solamente accoglieva questo lavoro del *Mastriani*, per pubblicarlo in fine di quelli del 1857; ma in vista di un'antica sua deliberazione il nominava, con gran maggioranza di voti, a suo socio corrispondente, per la classe di scienze Morali.

CONCHIUSIONE

Qui terminava il cenno storico de' lavori de' soci, contenuti nel presente volume, cioè, quelli dal 1855 a tutto il 1857: ma per l'obbligo ingiunto al segretario perpetuo d'informar il pubblico delle occupazioni dell'Accademia in un'assemblea generale della Società Reale Borbonica, da tenersi nel 30 dicembre, per indi promulgarsi con le stampe una tal relazione, in fine del nostro *Rendiconto*, com'ebbe luogo fino al 1850; essendosi la stampa di questo arrestata a tale epoca, e poi ripigliata dal 1852 in avanti, in modo sì ristretto, pel numero di fogli, da non aver potuto dar luogo ad inserirvi quel ragguaglio annuale, colpitasi ora questa occasione da esso segretario perpetuo, ha stimato ripigliare, nel discorso di quest'anno, un'esposizione compiuta de' lavori dal 1852 fino al 1857, compresi ne'due volumi già pubblicati, e farla qui inserire, come un indice ragionato delle materie contenute in essi due volumi. Un tal sistema sarà per l'avvenire da lui seguito in fine delle *notizie preliminari* per ciascun volume, e nel *Rendiconto* corrispondente.

DISCORSO

PRONUNZIATO DAL SEGRETARIO PERPETUO

NELL'ASSEMBLEA PUBBLICA TENUTA DALLA S. R. B. PER RENDER CONTO DEI
LAVORI DI QUELLA NEL CORSO DELL'ANNO 1857.

Con faccia più serena di altre volte mi è dato presentarmi a Voi, nobilissimi ed eruditi ascoltatori, qui riuniti, per prender ragione di come abbia corrisposto l'Accademia delle scienze, nel periodo annuale del 1857, alle benefiche mire del Sovrano, ed a' doveri impostigli in onorare co' lavori de' suoi socii il nome napoletano, contribuendo la sua parte all'avanzamento delle scienze, ed a' progressi dello spirito umano.

Quante volte in queste solenni adunanze, ne' passati anni, ebbi io ad arrossire in mendicar ragioni, perchè da noi nulla si pubblicasse, e nutrir di speranza Voi, che dimandavate fatti e non vane parole! Questa volta però spariscono i rossori dal mio volto, mostrandovi adempiti i vostri ragionevoli desiderii, con presentarvi, nel breve periodo di men che l'anno e mezzo compiuti ben due grossi volumi di Memorie di que' soci, che fedeli all'obbligo contratto in appartenere all'Accademia, hanno cercato onorarla con loro lavori compresi in tali due volumi, stampati anche più decentemente che per l'addietro. E quante seuse poco fondate ebbi a mentire con le Società scientifiche straniere, che ci onorano di loro corrispondenza, e ci gratificano de' loro preziosi Atti come di ogni altra pubblicazione che gli appartenga.

Dopo che v'ebbi presentato nella fine dell'anno 1850 il volume VI° degli Atti, col quale doveva chiudersi la 1^a serie di essi, cominciata a publicarsi da ben più che il trentennio, per cominciarne un'altra più conveniente agli attuali tempi, per le condizioni tipografiche e calcografiche, una covata di ostacoli, sebben frivoli, pure insuperabili, impedirono affatto la novella intrapresa della stampa; e ragionevolmente anche i più operosi e ben intenzionati soci, vedendo i loro lavori abbandonati all'oblio, si ristettero dal presentarne, o presentatine, ed ottenutane l'approvazione gli pubblicarono da loro medesimi. Quindi avveniva, che le tornate accademiche si vedevano talvolta affatto prive di ciò, che costituisce il principale scopo di esse, la lettura, cioè, e le discussioni di lavori tendenti al progresso delle umane conoscenze, che per ogni branca di scibile osservansi in gran fermento, presso tutte le Società scientifiche di Europa, e del Nuovo Mondo.

A vista degli ostacoli, e delle ripulse, non mi perdei di animo; si trattava del decoro nazionale, di quello dell'Accademia, e del mio proprio; nè le Società straniere potevano ad altro attribuire il silenzio di più anni, che o alla inoperosità de' miei colleghi, o a mia più che criminosa negligenza; e però continuamente insistendo, ed ora proponendo un espediente, ora un altro, finalmente ebbi fortuna di ottenere, che la tenue rata destinata al nostro *Rendiconto*, unita alla ancor limitatissima per la stampa degli Atti venisse accordata ad aggiugnere, come continuazione di quello, la pubblicazione delle Memorie più importanti, dal 1852 in avanti, che ebbi ripartite ne' due volumi, che or presento. Contiene il 1° le Memorie del triennio dal 52 al 54, il 2° quelle del 55 al 57, che formano precisamente i periodi triennali delle due presidenze, che ebber luogo in tale sessennio.

Se altri ostacoli non si opporranno alla manifestazione fatta al pubblico, nel por mano a questa novella stampa, l'Accademia darà indubitabilmente in fine di ciascun anno le Memorie approvate nel corso di esso, che per porle con maggior diligenza a notizia del pubblico, gli verranno presentate a fascicoli bimestrali nel modo seguente, cioè, nel 1° di essi quelle per le Matematiche, nel 2° le altre per le Scienze Naturali, e nel terzo per le Scienze Morali: e lo stesso ordine ripigliandosi pel seguente semestre. Ed io avrò, se la vita non mi manca, o le già deboli e vacillanti forze non mi abbandonano, il piacere

di presentarvi al termine dell'anno 1858 un volume pari a ciascuno dei qui presenti ; mentre dal momento, che la pubblicazione delle Memorie fu stabilita , e puntualmente eseguita , l'operosità de' soci , in presentarne si è grandemente accresciuta, come il dimostrerà la fugace rassegna che or mi affretto a farne. E sebbene di quelle per gli anni dal 1852 al 1856 già ne fu da me accennato ne' corrispondenti discorsi, soffrirete pure che per serbare l'unità nell'argomento, e per supplire a' precedenti miei discorsi rimasti inediti, or rammenti solo i loro titoli, e l'oggetto , seguendo sempre l'ordine degli anni, e delle Classi.

ANNO 1852.

CLASSE DI MATEMATICHE

Rimanevano disponibili da tal classe solo quattro Memorie, l'una sulle *Concussioni*, che il socio *Flauti* ebbe ricavata da' Mss. del fu insigne *Fergola*; un'altra sua propria — *Sul modo come gli antichi geometri dovettero condursi per precisare la natura de' problemi*; la terza del socio corrispondente , ora ordinario *Fortunato Padula* : *sulle curve del 4° grado, che hanno tre punti di regresso di prima specie*. Finalmente dal socio ordinario *Tucci* si aveva un esteso lavoro di: *Congetture sulla minima superficie di un quadrilatero storto*.

Nulla vi era a pubblicare per le altre due Classi, e però passavasi immediatamente a por mano alle Memorie di Matematiche per l'

ANNO 1853.

CLASSE DI MATEMATICHE

Consistevano esse in due elaboratissime Memorie del prof. *Trudi*, divenuto nostro socio ordinario, di: *Ricerche riguardanti la moltiplicazione, e l'addizione geometrica delle funzioni ellittiche*, che nell'atto della stampa, la quale ebbe luogo ben quattro anni dopo, egli migliorava grandemente , e vi cambiava il titolo nell'altro proprio alle modificazioni fattevi , di : *Rappresentazione geometrica imme-*

diata dell'equazione fondamentale della teoria delle funzioni ellittiche.

Questo giudizioso e difficile lavoro del nostro socio ricordavami ciò, che in siffatto argomento, ebbe eseguito il *Fergola*, fin dal 1780, nelle sue *Istituzioni di Calcolo Integrale*, e però mi diedi a rinvenirlo ne' suoi Mss., e tuttochè non da lui perfezionato e compiuto, stimai ben fatto consegnarlo nelle *notizie preliminari al 1° Volume*.

Aveva ancor io, fin dal gennajo dell'anno precedente, presentata all'Accademia altra Memoria rinvenuta ne' Mss. suddetti, di: *Ricerche aerometriche su' vulcani*: ma essendosi questa disgraziatamente dispersa, nell'eseguirsene l'esame, mi credei nel dovere di recarne un sunto nelle notizie preliminari al volume, particolareggiandovi le ricerche da quel distinto geometra espotevi, da servir di norma, e di spinta ad altri, per trattare lo stesso argomento.

CLASSE DI SCIENZE NATURALI

In questo anno una tal classe concorreva ad arricchire i nostri Atti, con due Memorie del fu illustre socio cav. *Melloni*, involato alle scienze fisiche, eminentemente da lui coltivate, al meglio di sua carriera. L'argomento ch'egli si proponeva a trattare, di grande estensione, riguardava la *polarità magnetica delle lave vulcaniche, e rocce affini*; ed un primo lavoro in esso lo presentava nella tornata del 21 gennajo con dichiarare, in fine di esso di rimetterne ad altri la continuazione, *trattenuto dal timore d'ineorrere in ispece eccedenti i limiti, che mi sono prescritti dalle circostanze attuali*. L'Accademia avvertendo la necessità di offrirgli que' mezzi, che lo Statuto accorda in simili casi a' soci laboriosi, l'incoraggiava a proseguire, promettendogli i suoi ajuti: ed egli prestandovi tutta la fiducia, spingeva innanzi una seconda Memoria: *Sopra la calamitazione delle lave in virtù del calore*. Ma non vedendo adempite le promesse fattegli, si astenne dal continuare le sue diligenti osservazioni, e speculazioni conseguenti; nè altri si è finora presentato a continuarle.

Aggiugnere la sua opera per tal Classe, in questo anno, il *dott. Achille Costa*, con una Memoria di: *Ricerche su' Crostacei amfipodi del regno di Napoli*, che ebbe poi grandemente modificata ed accresciuta nell'atto di stamparsi, e che meritamente gli produsse l'ascrizione a nostro socio corrispondente.

ANNO 1854.

CLASSE DI MATEMATICHE

A compiere il volume rimanevano, come ho di sopra indicato, le Memorie pel 1854; e queste erano, per le Matematiche, due egregi lavori del già detto socio *N. Trudi*, l'uno: *Delle proprietà delle curve di second' ordine, circoscrivibili ad un quadrigono*; l'altro per la *Conica di area minima descrivibile per quattro punti*. Inoltre una serie di sette Memorie dell'illustre geometra ed astronomo *cav. de Gasperis*, per la *determinazione dell'orbita di un pianeta*. Esercitato com'egli è nelle ricerche difficili di Meccanica celeste, e sperimentato viaggiatore per le vie del Cielo, rese ormai meglio segnate, che prima non erano, dopo l'insigne intrapresa delle carte celesti dette *Ore*, che pubblicansi dall'Accademia delle scienze di Berlino.

D' altra parte conoscendo ben egli, e sapendo valutare gl' incomodi e le fatiche, che nelle diverse occorrenze era costretto a patire un astronomo osservatore, per la determinazione dell'orbita di un pianeta; e però percorrendo i diversi casi di questo problema generale, variando ne' dati, e nelle condizioni appostevi, il risolveva in sette casi diversi, che coloro i quali posson giudicare per iscienza, e non sulla lettera, in siffatte materie, ben riconoscendone la difficoltà, e l'utile, l'ebbero per altrettante Memorie distinte, e per tali glie le approvarono.

CLASSE DELLE SCIENZE NATURALI

Il cav. *Melloni* in questo anno, e poco prima che mancasse di vita, rivoltosi ad altro argomento, di due Memorie arricchiva i nostri Atti; l'una: *Sulla eguaglianza di velocità, che le correnti elettriche di varia tensione assumono nello stesso conduttore metallico*; l'altra: *Sulla induzione elettrostatica*, esponendo una sua novella dottrina, che lungamente discussa da' fisici, dopo la di lui morte, altri pienamente ricevendola, altri contraddicendola, rimane tuttavia dubbia e sospesa.

Lasciava lo stesso rispettabile socio, tra le sue carte, la descrizione di un *Elettroscopio* di sua escogitazione, che ebbe pur fatto costruire dal macchinista *Gargiulo*, sotto la sua direzione, e che intendeva presentare all'Accademia, nella 1^a tornata dell'agosto 1854, la quale essendo stata differita pel *Colera* che infieriva, di cui egli doveva essere una delle vittime, al certo la più distinta, ebbe la cura di presentarglielo il socio *sig. Nobile*, suo confidenziale amico. L'Accademia accoglieva con piacere tal presentazione, e ne deliberava, per uso de' suoi soci l'acquisto dalla vedova *Melloni*, nel caso che gli fosse piaciuto disfarsene, o pure la costruzione di altro simile, facendolo eseguire dallo stesso macchinista, come ebbe luogo; e trovasi consegnato all'archivista *sig. Masdea*.

VOLUME II.

Compivasi nell'anzidetto modo il volume I.^o delle Memorie pel triennio dal 1852 al 54; e contemporaneamente da me si poneva mano, presso altro tipografo, a quelle del vol. II.^o, gravandomi di una doppia fatica, tanto maggiore, in quanto che le Memorie approvate l'erano in gran disordine, per l'abbandono di tanti anni. Ad ogni modo aveva io rivolto l'animo a voler porre l'Accademia in corrente pe'suoi lavori, a tutto il 1857; e quantunque conoscessi tale intrapresa superiore alle mie forze, ed alla mia età, pure mi posi all'opera con fermo e tenace proponimento; ed il II.^o volume l'è stato ancor esso condotto al suo termine.

Un tal volume componesi, come l'ho precedentemente indicato, dalle Memorie per gli anni dal 55 al 57, delle quali eccone una sommaria notizia, distinta per Classi.

ANNO 1855.

CLASSE PER LE MATEMATICHE.

Ebbe questa dal socio *Flanti* un lavoro: *Sulla genuina nozione delle quantità negative*, diviso in cinque sezioni; di cui la 1^a, servendo d'introduzione alle altre, dichiarava il soggetto di esse, ed i motivi, che lo avevano indotto a trattare tale argomento; la II^a riguarda la determinazione, che tali quantità offrono, risultando da problemi aritmetici; con la III^a pone ad esame que' casi di risultamenti negativi, ottenuti dall'analisi

de' problemi geometrici, proposti dal *d'Alembert*, e ripetuti dal *Carnot*, mostrando gli equivoci presi da questi due sommi geometri. È la IV^a di ricerche sulla natura de' problemi di 2.^o grado, dalle quali ne trae nuovi argomenti in comprovamento del soggetto trattato nelle precedenti considerazioni. Finalmente indaga nella V^a donde prodotti gli equivoci del sommo *d'Alembert*, e le conseguenze antigeometriche del *Carnot*; non senza proporre i mezzi da evitarli, dando le regole per lo convenevole stabilimento dell' incognita nella soluzione algebrica de' problemi geometrici; conchiudendo con dare la genuina idea di *soluzione elegante*.

A questo lavoro del socio *Flauti* ne seguiva altra del socio corrispondente ab. *del Grosso* — *Di alcune rimarchevoli serie trascendenti*, ed un esteso lavoro di — *Tavole e misure micrometriche di 127 stelle doppie e triple del catalogo di Struve, calcolate negli anni 1852, 53, 54 e 55 dal barone Dombowski*, nel suo privato Osservatorio in *S. Giorgio a Cremano*, il qual lavoro l'ebbe presentato all'Accademia il socio *sig. Nobile*: ed essa accoltolo, dopo il regolare esame, ne disponeva l'inserimento in questo volume; e procedeva ad ascriverlo tra' soci corrispondenti.

Meritano di essere qui annoverate quattro dissertazioni, dal socio *Flauti* lette all'Accademia in diverse tornate di tale anno. Nella 1.^a delle quali davagli conto di un lavoro del cav. *E. Alberi* dotto editore di tutte le opere del *Galilei*, intitolato: *Esame della biografia del Galilei serita dall'Arago*. Nell'altra esponeva ragionatamente il contenuto in tre MSS. di *Lionardo Pisano*, rinvenuti dal principe *Boneompagni* romano nella Biblioteca Ambrosiana di Milano, e pubblicati in Firenze, intorno a' quali, importanti commenti veggonsi inseriti in giornali scientifici, da analisti distinti. La terza riguardava altro lavoro dell'*Alberi*, nel quale co' MSS. del *Galilei* alla mano il dimostra primo inventore dell'adattamento del pendolo all'orologio, ismentendo formalmente l'*Arago*, che non solo gliel'ebbe del tutto negato; ma che osò ancora rimproverare acerbamente gl'italiani di averne voluto spogliare l'*Ugenio*, per rivestirne il loro compatriota. Finalmente la quarta dissertazione veniva promossa dal dono, che il ministro di P. I. dell'impero francese inviava all'Accademia, della ristampa con addizionali, che dopo il secolo e mezzo facevasi in Parigi, del *Commercium epistolicum de Analysis promota ee.*, per la quale l'Accademia dimandava conoscere le ragioni, che ne avesser promossa, dopo sì lungo tem-

po , e quando non più si pensava alla quistione che diede luogo a quella pubblicazione , tale ristampa ; e di qual merito fossero le *addizioni* del nuovo editore *M. Lefort* , il quale in vista, di questa scrittura del *Flauti* , venne aseritto tra' corrispondenti.

CLASSE DI SCIENZE NATURALI

Tre Memorie ebbe in quest'anno presentate il socio *sig. O. Costa*, l'una contenente la *deserizione di alcuni pesci fossili del Libano*, per tali avendoli ricevuti ; le due altre riguardavano, la 1.^a i *Foraminiferi fossili delle marne blu del Vaticano*, l'altra quelli *delle marne terziarie di Messina*, per la quale immensa popolazione di animalucci, che la sola perfezione de' microscopii poteva rendere osservabili , egli ne prometteva , e n' ebbe già cominciato a dare, la continuazione.

ANNO 1856.

CLASSE DI MATEMATICHE.

Il *cav.de Gasperis* intento sempre ad agevolare gli astronomi nelle loro importanti calcolazioni, presentava all'Accademia un lavoro di *Formole e Tavole per la soluzione del problema di Keplero*, che venivagli subito approvato; ma già egli premurato a render note agli astronomi osservatori tali utili tavole le faceva pubblicare nelle *Astronomiche Nachrichten*, rimanendo pe' nostri Atti la parte teoretica per tali formole , e'l saggio di una delle tavole.

Questa circostanza ricordando al socio *Flauti* una soluzione di sì importante problema eseguita dal *Fergola*, e fortunatamente rinvenute de' brani tra' costui MSS. , li ricomponeva alla meglio , e dava-li a rivedere allo stesso *de Gasperis* , perchè ne giudicasse , se poteva ancor meritare di comparire in pubblico , dopo il corso di ben 50 anni da che l'ebbe colui fatta ; ed assicuratosi del merito di essa , prevalente tuttavia anche alle formole che n'ebbe date il *Lagrange* , per l'esattezza , oltre alla gran facilità nella calcolazione , presentavala all' Accademia , dalla quale veniva anco approvata. E poichè, impossessatosi di tal soluzione il di lui discepolo, *sig. G. Scorza*,

che fu pur nostro socio , n' ebbe accortamente prolungato il modo di vantaggiosamente usarne , come dallo stesso *de Gasparis* veniva assicurato il *Flauti* , fu anco questo lavoro dello *Scorza* destinato a continuare quello del *Fergola*. Ed a questi si veggono far seguito due Memorie del sig. *G. Battaglini* — *Sulla dipendenza scambievolmente delle figure*, che ben meritavangli l' ascrizione a nostro socio corrispondente, la quale scelta egli ha poi giustificata con nuovi ed importanti lavori.

Il socio corrispondente sig. *E. Fergola*, che onora co' suoi studi, e co' suoi lavori il nome di quel valente geometra, che seppe da se aprirsi la strada a divenir grande in ciascun ramo delle Matematiche, ed a fondare una Scuola non ultima tra le più distinte di Europa, ed il quale ebbe sempre mostrato il nobil desiderio di animo ben fatto, in veder perpetuate le Matematiche ne' suoi nipoti, e ben alcun tratto ne vide ne' due di essi *Gabriele* e *Francesco*, entrambi tolti nel più bello di loro carriera, e questo secondo in modo assai funesto , colpito da un fulmine, mentre era intento in Sicilia ad operazioni topografiche, che formavano la di lui professione. Ma quanto più avrebbe avuto motivo di esser contento, se avesse potuto antivedere il profitto , che la scienza può trarre da questo suo discendente attuale, che se verrà incoraggiato negli studi, che con tanto successo ei coltiva , non v' ha dubbio , che la scienza analitica de' moderni , già tanto innanzi prodotta , non ne abbia a trarre frutto grandissimo. Costui dunque ebbe date all' Accademia, in sul finir dell' anno , tre Memorie , la 1.^a *Sulle condizioni di possibilità per lo sviluppo di qualunque funzione in serie ordinata secondo le potenze ascendenti delle differenze della variabile sopra un valore costante*. La 2.^a conteneva la: *Ricerca dell' espressione di una derivata qualunque di una funzione, in termini delle derivate delle funzioni inverse*. La 3.^a l' era di *Ricerca per esprimere in serie le radici di una equazione qualunque*. Ma queste, avendo potuto appena leggerghele nel dicembre del 1856, venivano approvate nell' anno seguente : ciò non ostante , per aderire alle premure del socio autore , gli è stato dato luogo tra le Memorie dell' anno in cui furono presentate.

CLASSE DI SCIENZE NATURALI.

Mostrava il socio *Costa*, nel settembre di questo anno, il disegno al naturale di un gran pesce pietrificato, da lui rinvenuto in uno scavo fatto eseguire in Pietraroja, paese del Contado di Molise, che ne è ricca miniera, ed accompagnavalo con la corrispondente descrizione, denominandolo *Caeus*. L'Accademia, in vista della favorevole approvazione de' commissari destinati all'esame di tal Memoria, gliel'approvava per gli Atti.

Contemporaneamente il socio corrispondente *Guglielmo Gasparrini*, dal quale non pochi importanti lavori in Fisiologia botanica aveva l'Accademia ricevuti ripetutamente, e che con dispiacere se l'ha veduto sfuggire al momento, che da tutti veniva designato ad un posto di ordinario, nelle provviste a fare in tal Classe, invitato da S.M. Imperiale Austriaca a decorare la sua illustre Università di Pavia, ed erudirvi i suoi sudditi. Presentavale, in una volta, due lunghe ed elaboratissime Memorie, applicazione indefessa di più anni, l'una di: *Ricerche sugli organi assorbenti delle radici, e sulle loro eserezioni*, l'altra di: *Osservazioni sull'origine dell'embrione seminale nella Lemna minor*. Lieta essa di possedere tali lavori, ne commetteva il voluto esame, che non poteva non dar luogo al favorevole divisamento di venir inserite ne' nostri Atti. Ma la stampa di questi era stata per ben quattro anni sospesa, sicchè il *Gasparrini* dubitando del fato di queste sue elaboratissime ricerche, essendo stato da S.A.I. e R. *il Conte di Aquila* chiamato a regolare le sue Ville, col titolo di Botanico Onorario, caduto il discorso su questi suoi lavori, volle l'A. S. vederli, e dichiaratosene protettore, decise farglieli pubblicare a sue spese; da che si vide indotto il *Gasparrini* a ritirarli dall'Accademia: ed essi furono prontamente dati alle stampe, e pubblicati sotto gli auspici dell'A. S., alla quale egli, riconoscente del beneficio ricevuto, gl' intitolava.

A questi lavori uno aggiugnevasene presentato all'Accademia dal sig. *Guglielmo Guiseardi*, di: *Un nuovo genere di Molluschi testacei*, denominandolo *Gargania Brocehi*, dal luogo ove fu altra volta ritrovato, con l'epiteto che ne ricorda un illustre naturalista italiano, che fu in queste nostre regioni a perlustrarle, per ricerche di storia naturale, principalmente nel genere mineralogico.

CLASSE DI SCIENZE MORALI.

Fu fortunata questa volta l'Accademia in vedersi occupata con un lavoro presentatogli da un socio della classe di Scienze Morali, di cui n'era da gran tempo priva, e che bene compensava dell'aspettativa. Fu questa opera del socio *cav. Nicola Roeeo* divisa in quattro dissertazioni ben distinte tra loro, comprese però nell'argomento generale: *Come il vero e 'l falso indirizzo delle Scienze Metafisiche influisce sugli studii del Dritto*, che dopo avergliele lette in quattro successive tornate, venivano sul favorevole giudizio della classe, facendovi da relatore il socio *cav. Bozzelli*, approvato per publicarsi.

ANNO 1857.

12

Più abbondante messe ne dava a spigolare il seguente anno, che forma l'ultimo anello della raccolta, che compie il vol. II, delle nostre Memorie.

CLASSE DI MATEMATICHE.

I. L'occultazione di Giove dietro la Luna, avvenuta la sera del 2 gennaio porgeva al nostro socio *Nobile* l'occasione di una Memoria descrittiva del fenomeno, e di conseguenze a trarne sull'esistenza di un'atmosfera lunare, discettata in ogni tempo, e di non lieve difficoltà ad esser convenientemente stabilita; ed i commissari destinati ad esaminarla convenivano sulle osservazioni, e ragionamenti del *Nobile*. Vi è ben però da considerare, che in casi simili, ne quali l'illusione ottica può dar luogo ad equivoci, converrebbe che le osservazioni di uno venissero comprovate da quelle di altri; il che potrà, in seguito di questo primo passo dato dal *Nobile*, venir in altre circostanze praticato.

II. L'illustre socio *Padula* aggiungeva a precedenti suoi lavori, un'importante Memoria di: *Ricerche sulle superficie curve*, esponendovi, e compiendo non solo la teorica generale per esse; ma ancora soddisfacendo a' desiderii dell'insigne geometra dell'Accademia di Berlino *sig. Steiner*, per talune difficili ricerche intorno ad esse, da lui rimaste solo accennate.

III. Mirando sempre il *cav. de Gasperis* ad agevolare le calcolazioni agli astronomi osservatori, due Memorie ebbe ad un tempo presentate; l'una di: *Un'equazione di grande importanza nella teoria de' movimenti de' pianeti*; l'altra di: *Formole e Tavole per trovar la distanza di un corpo celeste dalla Terra*; alle quali poco dopo ne aggiugnava due altre, l'una di: *Formole e Tavole per trovar la distanza di un Pianeta, o di una Cometa dalla Terra, con quattro osservazioni mancanti delle latitudini estreme*. L'altra: *Sulle stelle doppie, e la determinazione de' loro movimenti*.

La sola enunciazione di tutte queste Memorie, ne mostra la loro grande utilità; ed il parere de' commissari poneva l'Accademia nel dovere di approvarle per la stampa.

IV. Il socio corrispondente *E. Fergola* concorreva a' lavori della Classe, con la seguente memoria:

Sopra lo sviluppo della funzione $\frac{1}{e^x - 1}$; e sopra una nuova espressione de' numeri di Giac. Bernoulli

V. L'altro ottimo socio corrispondente *G. Battaglini* imprendeva a perfezionare l'argomento *della partizione de' numeri*, già considerato dal sommo *Eulero*, proseguito da analisti posteriori; ma che altro ancora vi rimaneva desiderato.

Da questa sommaria esposizione, o piuttosto semplice elenco delle Memorie presentate da' soci della classe matematica, ed approvate per gli Atti, può facilmente ognuno rilevare, di quanta utilità essa sia stata, co' lavori di questo anno, al perfezionamento de' metodi di Analisi sublime, ed a quelli della Meccanica celeste.

Ma nemmeno era qui che arrestavansi i suoi lavori. Un altro non di lieve difficoltà gliene imponeva lo Statuto, cioè, la scelta di un quesito da prenuarne chi il risolvesse, con una medaglia di duc. 300, e con l'onorevole titolo di socio corrispondente.

Nello stato attuale di un immenso sviluppo per ogni ramo delle Matematiche, non è facile la scelta di un quesito che racchiuda le condizioni di novità, utilità, ed al quale si possa soddisfare coattivamente in un tempo ben limitato. Con tutto ciò undici ne furono presentati nella prima tornata del gennajo 1837, tutti più o meno importanti, più o meno trattabili: e dee ragionevolmente credersi, che

tutti provenissero da' soci della classe matematica. La discussione di tali quesiti richiedè molto tempo, come può rilevarsi dall' esposizione fattane nel *Rendiconto*; sicchè non prima dell' aprile si fu nel caso di definitivamente stabilire il quesito da proporre, che fu il seguente:

Esporre i progressi fatti dall' Analisi differenziale ed integrale, dal principio del presente secolo, indicando i perfezionamenti arrecati alle teorie già conosciute, le nuove stabilite da' moderni analisti, e le fonti in cui si trovano esposte. Generalmente dare un' idea compiuta dello stato attuale della scienza, principalmente considerandola ne' seguenti aspetti.

1.° *Classificazione, e proprietà delle trascendenti.*

2.° *Sviluppo delle funzioni.*

3.° *Determinazione d' integrali definiti tra limiti speciali.*

4.° *Integrazioni delle equazioni differenziali.*

5.° *Calcolo delle Variazioni.*

6.° *Calcolo delle differenze finite.*

« Di ciascuna teorica si farà conoscere lo stato alla fine dello scorso secolo; indi si esporrà il punto di vista più generale nel quale sia stata considerata in prosieguo; i perfezionamenti fatti in essa, e ciò che resta ancora a desiderare: si accennerà il suo legame con altre; e se ne indicheranno le sue applicazioni. S' indicheranno finalmente i principali scrittori, che sonosi occupati di esse, e le opere in cui sono esposte le loro ricerche ».

L'estensione di tal quesito, la difficoltà di esso, e'l ritardo in pubblicarlo, fecero risolvere l'Accademia a differirne le risposte fino al settembre 1858, invece del 1857, come prescrive lo Statuto; e però al dicembre di quell' anno la pubblicazione de' premiati, sia con la medaglia di duc. 300, sia con l' *Aceessit*, in quella solenne tornata generale.

Or avvegnachè, nel primo scrutinio de' quesiti, ebbe ottenuto il massimo de' punti il seguente altro:

Determinare la quantità di luce, che in un dato giorno penetra in un dato edificio pe' suoi vani, qualunque sia la grandezza di questi, la loro posizione, e quella co' circoli della sfera mondana, la condizione del loro aspetto, e le leggi di fulgidità de' raggi solari.

Sembrando al segretario perpetuo un tal quesito degno dell' at-

tenzione, e delle meditazioni de' coltivatori delle Matematiche, sì per l'utilità pubblica, e sì per la concorrenza in risolverlo della Geometria de' siti, de' metodi d' integrare, e di dottrine astronomiche, proponeva all' Accademia di concedergli, che venisse ancor questo proposto a premio uguale, da soddisfarsi con danaro, ch' egli, nel tempo assegnato alla presentazione delle Memorie, risparmierebbe su' suoi averi; ed avendo essa acconsentito, veniva proposto ancor questo.

Finalmente chiudeva il socio *Flauti* l'anno accademico leggendo nella tornata del 20 novembre una sua dissertazione di: *Osservazioni storico-critiche sull'Archimede, e l'Apollonio di Maurolico*.

CLASSE DELLE SCIENZE NATURALI

Questa dava nel corso dell'anno una Memoria del socio *O. Costa*: *Sul genere Frondicularia di Ober.*, e due Memorie del *Nobile* in conferma del principio dell' *induzione elettrostatica del Meltoni*. Finalmente una Memoria del dott. *Guiscardi* — *Su di un minerale del Monte Somma*, che gli piacque denominare *Guarinite*, in onore del fu nostro rispettabile socio *Giovanni Guarini*, di cui l'Accademia soffrì la perdita nel febbrajo di questo anno.

CLASSE DI SCIENZE MORALI

Anco in questo anno, come nel precedente, una tal classe si distinse con due dissertazioni sul *Lusso*. La prima di esse gli veniva presentata dal nuovo suo socio onorario *cav. Cenni*, che vedesi inserita nel *Rendiconto*, e nelle *Notizie preliminari* al vol. II. delle Memorie; ed essa fu di spinta al socio *sig. Masdea*, per comporne altra che intitolava *Critica del Lusso*, promettendo continuarla; e questa sulla favorelissima approvazione de' commissari, veniva destinata agli Atti.

Finalmente l'Accademia, nell'ultima tornata del 1857, ebbe approvata per gli Atti la dissertazione fattale presentare dall'avvocato *G. Mastriani*, di *Prime linee di una nuova teorica intorno alla probabilità e colpabilità degli atti imputabili*; e conseguentemente l'ascriveva nel numero de' suoi soci corrispondenti.

MEMORIE MATEMATICHE

PRESENTATE

DA' SOCI ALL' ACCADEMIA NELL' ANNO 1855

E DA ESSA APPROVATE.

SULLA GENUINA NOZIONE
DELLE QUANTITÀ NEGATIVE

Considerazioni del socio ordinario

V. FLAUTI



SEZIONE PRIMA.

Da servir d'introduzione al presente argomento.

ILLUSTRI COLLEGGHI

Fin dall'epoca ben antica, che posso dire l'età dell'oro di mia vita; poichè, non ancora addentato da livore e bassa gelosia, vivevami spensierato, e solo intento a' miei lavori matematici, e ad erudirne i miei allievi dello studio privato, e della regia Università, nella quale attendeva a perfezionarli nella *teorica delle equazioni numeriche*, parte importantissima della moderna Analisi, e nelle applicazioni sue alla *Geometria*, nulla omettendo di quanto bisognava a far loro conoscere i diversi metodi per questa, così adempiendo, per quanto valevano i miei oneri, all'un degli obblighi di un professore di quel cospicuo antico Ateneo. Fin da quell'epoca, diceva, pervenutami alle mani la *Gèométrie de position*, lavoro di recente pubblicato dall'illustre *Carnot*, al quale questo valoroso geometra premetteva una lunga introduzione sulle *Quantità negative*, riproducendo le difficoltà sulla natura di queste già promosse dall'insigne d'*Alembert*, interpretandole anche al costui modo, ed altre di proprio conio aggiugnendone, mi presi tutto il pensiero di deciferarle alla gioventù che seguiva le mie lezioni, da che ebber luogo alcune di queste, nelle quali, dopo aver esposte le diverse opinioni d'illustri geometri in tale argomento, da servir come d'introduzione ad esso, passava ad esporre: 1°. le difficoltà proposte considerando le quantità negative risultanti da' problemi aritmetici, mostrandone il

concetto, e l'importanza in considerarle: 2°. di poi passando alle stesse considerazioni pe' risultamenti algebrici de' problemi geometrici, e deleguando le difficoltà promosse dal *d'Alembert*, ed accresciute dal *Carnot*: 3°. che poi con la guida della Geometria, e con ragionamenti analitici distruggeva interamente: 4°. finalmente, riassumendo tutto quello che aveva sparsamente detto, non tralasciava dichiarare la cagione di tali equivoci; da che risultavane la regola per convenientemente stabilire le incognite ne' problemi geometrici; ed altre osservazioni e regole importanti a convenevolmente fissare la loro natura.

Tutto ciò io faceva dal 1806 al 1812, per istruzione de' miei allievi; ma passato che fui, nella riforma del 1812, la più decorosa per la nostra Università degli studi di quante prima e dopo ne furono operate, abbandonai il pensiero di tal mio lavoro, distratto, come il sono stato, da altri incarichi fino al 1848, e da cure familiari, che specialmente da un tempo a questa parte mi hanno reso il vivere afflitto e dolente, non essendo bastato a procurarmi tranquillità l'aver beneficati con grandi sacrifici parenti da me non prima conosciuti, e l'essermi ritirato da ogni pubblico incarico, rinunziando anche al non tenue, e per me non indifferente beneficio che ne ritraeva, e ridotto a menar vita solitaria, e pressochè da misantropo. Aggiungo, che a quell'epoca del 1812 io ebbi chiuso lo studio privato, sì perchè consideravalo incompatibile co' miei incarichi di esaminatore pe' collegi civili e militari, e pe' corpi facoltativi; come ancora per lasciare ad altri il mezzo di sussistenza, che potevano ritrarre dalla sterile carriera dell'insegnamento in Matematiche; e solo mi valse delle mie escogitazioni in tale argomento, nel pubblicare le *Trigonometrie*, e l'*Analisi algebrica*. Nè più forse vi avrei avvertito, se per sorte non mi fosse ultimamente capitata alle mani la dotta biografia del *Carnot*, lavoro dell'illustre *Arago*, pubblicato dopo sua morte, dal quale avendo rilevato, che in siffatto argomento tuttavia disputavasi al modo stesso di allora, ritornatomi a memoria quel mio antico lavoro, e fortunatamente avendone rinvenuti, tra le mie carte, brani sufficienti a ricomporlo, mi sono affrettato a presentarlo. A ciò mi ha spinto ancora la considerazione di non aver io adempito per due anni successivi all'obbligo, che ha ogni socio della nostra Accademia di dare annualmente almeno una Memoria; ed il vedere, che per le prime tre

tornate di questo anno alcun lavoro non siasi presentato da formare l'occupazione principale di essa.

Che la scuola greca non avesse mai pur pensato a siffatte quantità, come osserva il *Carnot*, l'è pur troppo vero; non già però, com'ei asserisce, perchè le ebbero per inutili, sìvvero perchè la loro maniera di trattare i problemi geometrici non dava luogo a fargliele incontrare. Per essi la *determinazione* precedeva l'analisi, e dava luogo a distinguere preventivamente i casi de' problemi, e le diverse soluzioni di cui erano suscettivi, per la varia posizione rispettiva de'dati, e delle condizioni che legavangli al quesito; da che noi vediamo i due libri di *Apollonio de Sectione rationis*, e gli altri due *de Sectione spatii* dello stesso risultare da un solo problema suddiviso (1). Similmente pe' due altri, pur di *Apollonio: de Sectione determinata* (2). Ma senza di ciò un esempio elementare ne abbiamo nel lib. VI° della Geometria di *Euclide*, nelle prop. 28, e 29, che non sono se non un solo problema, il quale trattato con l'Analisi moderna, ben darebbe luogo ad una doppia radice, da farle corrispondere vicendevolmente a' due problemi Euclidei.

Da che posteriormente altri geometri, tra'quali anche *Vieta* avessero trascurati tali risultamenti, non è lecito conchiuderne, che ciò avesser fatto per averli considerati come *assolutamente inutili ed insignificanti*, ma piuttosto perchè non seppero costruirli; che certamente non potevano essi non conoscere, che nel modo asserito dal *Carnot* si veniva a contraddire la natura del problema dal quale derivavano; ed ai *trisegatori* si darebbe ben vinta la loro imperita pretensione.

Nè l'è men vero, che gli analisti posteriori, tra' quali il *Newton*, e pur l'*Eulero* l'ebbero dette *minori del zero*; ma tal proposizione non mai essi l'ebbero come assoluta, da potersi trascurare del pari che il *zero*, ne v'ha eziandio chi possa dare un'idea di cosa che del *zero* sia minore. Essi intesero bene per questa espressione, che a quelli pervenivasi per una serie continua di detrazioni da un numero posi-

(1) Veg. *Poppo* alla pref. del lib. VII, e l'*Halley* nella versione latina de' due primi libri dall'arabico, e nella restituzione de' due secondi.

(2) Veg. *Poppo* nel l. c., e la restituzione di tali libri datane da *Roberto Simson*.

tivo, anche dopo che questo fosse stato ridotto al *zero*, e però in contrapposizione delle positive. Di tal che, posto un numero, *p. e.* il 10, se da esso sottraggasi continuamente un' unità, giunto che si era finalmente a distruggere tutte le 10 dalle quali esso numero compone-si, sicchè si abbia per ultimo risultamento il *zero*, volendo ancora continuare la detrazione si veniva a passare ad uno stato opposto, che pe' numeri potremo dire di *credito* e *debito*: la qual sola considerazione ben dimostra, che esse non dovessero, ne potessero essere trascurabili come insignificanti, essendo un debito cosa ben meritevole di considerazione, ed una quantità solamente pel suo *stato* non già pel *valore* opposta ad un *credito*; e noi vedremo in appresso, che questi risultamenti negativi de' problemi aritmetici sieno tanto reali, da costituirne la determinazione, modificandone i dati o le condizioni.

Il *d'Alembert* volendo provare, che l' idea delle quantità negative minori del *zero*, oltre all'essere *oseura, riguardata metafisicamente*, vien contraddetta dal calcolo, assume la proporzione:

$$1 : -1 :: -1 : 1$$

ch'egli dà come reale (*), perchè il prodotto degli estremi pareggia quello de' termini medii; ed anche perchè $\frac{1}{-1} = -1$, come l'è pure $\frac{-1}{1}$; e così ragiona. Se le quantità negative fossero minori del zero, dovendo gli antecedenti di tal proporzione accordarsi in esser maggiori de'con-seguenti, siccome l'è $1 > -1$, dovrebbe essere $-1 > 1$; sicchè il -1 sarebbe or minore dell'1 ed or maggiore. Da che egli conchiude l'incoerenza di quella proposizione.

Il *Carnot* poi, partendo dalla stessa proposizione, ne deduce, che *una quantità assoluta negativa è un ente di ragione, e che quelle te quali incontransi nel calcolo non sono che semplici forme algebriche incapaci di rappresentare quantità reale*; e conchiude che niun conto debba tenersi delle radici negative de' problemi: proposizione non solamente distruttiva della natura di questi, ma che verrà col fatto smentita dalle considerazioni seguenti, e dall' analisi de' problemi si aritmetici, che geometrici, che in appresso recheremo.

(*) *Opuscules* vol. 1 — Memoria VI — Su' logaritmi delle quantità negative.

Or io, ponendo da banda le conseguenze diverse, che da quella proporzione deducono que' due distinti geometri, mi farò a mostrare l'insussistenza della proporzione stessa, che l'uno e l'altro danno per vera e reale, ragionando nel seguente modo. Siccome la supposizione del fatto è il principio fondamentale dell'analisi de' problemi, sia che adoperisi il metodo degli antichi, sia l'analisi de' moderni; e che dall'ultima conseguenza dell'analisi si riesca alla soluzione; così del pari pe' teoremi, a discernere la verità ed il modo di dimostrarla, dee partirsi dal supporre vera la proposizione di essa; e quando da ciò si pervenga ad una conseguenza già nota come vera; vero l'era altresì il teorema enunciato, ed il cammino inverso ne darebbe la dimostrazione; se falsa, falso era il teorema. Quindi se dal supporre vera la proporzione $1 : -1 :: -1 : 1$ si perviene a conseguenze assurde; l'illazione non deve essere quella del *d'Alembert*, e molto meno l'altre del *Carnot*, ma che quella proporzione sia assurda come l'è di fatto. Essa non ha luogo che indipendentemente da' segni, riducendosi a dire

$$1 : 1 :: 1 : 1$$

che nulla significa. E tra le tante altre ragioni, che confermano tale legittima conseguenza, piacemi solamente confermarla con la Geometria, la quale ne mostra essere una sola la media proporzionale tra due rette; mentre da quella proporzione data come reale ne seguirebbe, che tra due rette uguali e rappresentate dall'unità sarebbe media proporzionale tanto la retta 1, che la -1 . Quindi l'è forza conchiudere, che quella proporzione assunta dal *d'Alembert*, ritenuta dal *Carnot*, e che anche l'*Arago* ha come esatta, e di gran forza a sostenere l'opinione di esso *Carnot*, non abbia luogo. Ed è in questo senso, che ben sarebbe detto, secondo il *Leibnitz*, che l'ordinata negativa della parabola non sia media proporzionale tra il parametro e l'ascissa, proposizione che gli attribuisce il *d'Alembert*; sebben poi, egli medesimo, da accorto geometra, ripigli: *Ciò è che il segno — dell'espressione algebrica di questa ordinata, per nulla influisce sulla quantità di essa, ma sul sito; e non è, che per la sua quantità, che essa è media proporzionale tra il parametro e l'ascissa.* (1)

(1) *Mem. cit.* pag. 202.

Dopo il fin qui esposto, non credo necessario occuparmi delle conseguenze erronee, che da essa deduce il *d'Alembert*, per combattere una proposizione *relativa* da lui presa come *assoluta*; nè quelle del *Carnot*, per affatto annullare le quantità negative, delle quali spero far intendere la natura e l'importanza, non per mezzo di considerazioni astratte e metafisiche, che queste, non è il presente il solo caso che han dato luogo a dispute inutili, rendendo più difficile il soggetto che si pretendeva rischiarare, sìvvero da risultamenti effettivi di problemi aritmetici e geometrici, che passerò a trattare.

Conchiuderò questa mia breve introduzione all'argomento che mi ho proposto, con dire, che dalle considerazioni che stabilirò nel modo anzidetto, non solamente avrò adempito a' desideri del *d'Alembert*, che ne' trattati elementari venisse meglio rischiarata la teorica di queste quantità, distruggendo nello spirito dei principianti siffatte nozioni; ma che varrà ancora, il che è di maggior rilievo, a mostrare il modo più convenevole di stabilire l'incognita ne' problemi geometrici, da evitare gli equivoci ed i falsi concetti, derivanti dal modo vago come, in sostegno delle loro opinioni trovasi praticato nelle ricerche del *d'Alembert* e del *Carnot*. Finalmente per corona del presente lavoro non tralascierò di far conoscere, quanto pregiudizievole alla scienza geometrica sia la proposizione avventurata dall'*Arago*, in proposito de' risultamenti negativi da' problemi geometrici. « Comment arrive t'il
« maintenant, que des problemes étrangers se mêlent au problème
« unique, que la Géométrie voulait résoudre: que l'Algèbre répond, «
« avec une *deplorable fécondité* à des questions, que on ne lui a pas
« faites; que si on lui demande, par exemple, de déterminer toutes
« les ellipses qu' on peut faire passer par quatre points donnés celle
« dont la surface est un *maximum*, elle donne trois solutions, quan-
« d' évidemment il il n'y en a qu' une de *bonne, d'admissible, d'ap-
« plicable*. » E dalle considerazioni stabilite sul fatto di tal problema, e di altri, che ne aggiugnerò, vedrassi, che ben lungi dall'essere questa molteplicità di risultamenti, che l'Analisi algebrica offre, *une malheureuse fécondité*, sia il pregio maggiore che ha essa, applicata a ricerche geometriche; e che per tal qualità sopravvanzi l'Analisi degli antichi geometri.

SEZIONE SECONDA.

La genuinità delle Quantità negative rilevata dalla determinazione che esse ne offrono, risultando da problemi aritmetici.

L'illustre geometra *Simone Lhuilier*, che mentre visse onorò la nostra Accademia con la sua effettiva corrispondenza, e me di sua costante amicizia, in una lettera che dirigevami in data del 16 aprile 1819, da Ginevra sua patria, con la quale accompagnava una sua Memoria su di un problema geometrico così enunciato: *Couper un angle solide triangulaire donné par un plan, de maniere que la section soit donnée de grandeur et d'espèce*, (che come ben intendasi l'è quello della così detta *piramide triangolare*, che per più di un secolo aveva tanto occupato geometri distinti, dando luogo ad una vaghezza di risultamenti e di opinioni sulla natura di esso, e che finalmente ebbe il suo compimento e perfezione in nostra scuola) nell'introdursi al suo lavoro, non poté trattenersi dall'esclamare: *Faut-il donc, que même dans une science, dont l'évidence des principes, et la simplicité de son objet doivent garantir l'esprit humain de tout écart dans la route de la vérité, il doive encore conserver quelques doutes sur la certitude des résultats auxquels il parvient, et que cela ait lieu même dans un cas, où il n'y a qu'un petit nombre de chainous intermédiaires entre le principe et la dernière consequence, et qu'il reçoive ainsi une triste leçon d'humilité!* Nè fu egli il primo ed il solo a notare questa imperfezione dell'intendimento umano, in una scienza per eccellenza; ma ben altri avevan dovuto pur fare la stessa rinerescibile confessione, tra i quali mi basterà notare *Cristiano Wolff*, che in discernimento ed in esatta critica merita ben tener luogo distinto, il quale, nel suo trattato *de studio Algebrae*, non poté fare a meno di riconoscere, in questa sublime scienza de' moderni, ch'egli onorò della caratteristica di *apice dell'umano sapere*, non poche imperfezioni, da che fu indotto a dire: *Nullum est dubium quin plura irrepserint a veritate aliena, ita ut inventa recentiorum mathematicorum revisione quadam indigerent, et haud pauca firmitiori fundamento superstrui mererentur. Nee alia ratio est, cur inter re-*

centiores mathematicos agitentur controversiae, quales veteribus erant ignotae. Ed egli in ciò dire doveva aver presente la quistione che agitavasi allora, tra *Gotofredo Guglielmo Leibnitz* e *Giovanni Bernoulli*, su' *logaritmi delle quantità negative*, posteriormente rinnovata tra due soggetti di non minor calibro, l'*Eulero* e l'*d'Alembert*. E mentre il *Wolffio* propalava quel suo avviso, egli medesimo cadeva nell'equivoco madornale di negare, che risultasse reale il prodotto da due immaginari, così esprimendosi in tal proposito: *alias enim factores imaginarii efficerent productum reale, quod utique absurdum.* Nè so comprendere come, dopo emessa siffatta opinione erronea, avesse egli potuto progredire nell'Analisi algebrica.

Or io, nel trattare l'argomento che mi ho proposto, farò chiaramente conoscere, che lungi dall'attribuirsi le opinioni assurde emesse da sommi uomini sulle quantità negative a difetto della scienza, esse sieno conseguenze di poca avvertenza e di avventato giudizio di coloro che vi hanno disputato, discorrendola ciascuno a suo modo, e quasi ponendo da banda la natura del soggetto e della quistione che agitavano. Che se questo mio modo di vedere e considerare il presente argomento (potendo lo stesso estendersi ad altri casi) sarà da altri, giudicato esatto e rigoroso, avrei ad un tempo illustrato un punto importante nella scienza analitica de' moderni, e liberata questa da lacce malamente attribuitegli.

Nell'introduzione al presente lavoro è stato detto, che l'illustre *Cartesio* voleva a dirittura banditi i risultamenti negativi de' problemi, avendoli per *puri e veri enti di ragione, e forme algebriche insignificanti.* Or io mi accingo con pochi esempi, tra gl' infiniti che possono addursene che questi puri enti di ragione, e queste forme algebriche insignificanti, ne' problemi aritmetici, rendono degni della considerazione dell'analista, che ha risoluto il problema, offrendogli il modo da modificare le condizioni di questo, le quali contenevano qualche contraddizione.

Risolvendo il problema di due corpi distanti l'un dall'altro per un intervallo a , moventisi per una stessa direzione, con le velocità rispettive c , c' , i quali incontrinsi dopo uno stesso tempo, e cercandosi il punto del loro incontro, perviensi al risultamento

$$x = \frac{ca}{c - c'}$$

che per esser positivo deve esser $e > e'$; e se fosse $e < e'$ il risultamento negativo per la x indicherebbe, che il corpo dotato della velocità e non potrebbe affatto raggiungere l'altro con la velocità e' ; il che ne conduce a vedere esservi ne' dati del problema, o nella condizione sua una contraddizione da doversi correggere cambiandoli negli opposti, invertendo le velocità assegnate a que'corpi, o con convertire la condizione di muoversi essi pel verso stesso, facendoli muovere per direzioni contrarie. Da che vedesi, che questo risultamento negativo sia quello che ha data la vera soluzione del problema, determinandone i dati, o la condizione di esso.

Imprenderò ora ad esaminare un altro caso, nel quale l'analisi dà luogo alla così detta dal dotto Arago *deplorable fécondité*, ottenendosi un doppio risultamento, l'un positivo, l'altro negativo; l'è esso il seguente.

Posto che la luce la quale diffondesi da un corpo luminoso decresca d' intensità proporzionalmente al quadrato della distanza dal corpo che la diffonde: si vuol rinvenire quel punto nella distanza tra due corpi luminosi delle intensità rispettive m, n , ove le intensità di luce si uguagliano.

Il risultamento dell' analisi è

$$x = -\frac{na}{m-n} \pm \frac{a}{m-n} \sqrt{mn} \quad (\text{F. Anal. algeb. ediz. V.})$$

ed è chiaro, che supponendosi $m > n$, sarà $\sqrt{mn} > n$; e quindi l'una di quelle radici sarà *positiva* l'altra *negativa*. Per la positiva si comprende bene corrispondere ad un punto nella retta tra' due corpi luminosi, ove essi illuminano ugualmente: ma ve n' ha un altro nel prolungamento di tal retta, dalla parte del corpo d' intensità di luce minore ove avviene lo stesso; e questo l'è dinotato dalla radice negativa; che però l' analisi del problema doveva necessariamente offrirlo. E ciò si vedrebbe anche, se nel farne l'analisi si fosse proceduto in porre l'incognita per questo secondo punto; chè allora sarebbe risultato positivo il risultamento per questo, e negativo quello pel punto tra' due corpi luminosi.

Rilevasi da questa considerazione, che la radice negativa di tal problema non sia una pura forma algebrica, ma l'una delle sue ne-

cessarie soluzioni, quando si abbia l'avvedutezza di non considerarle che pel semplice valore, e non pel segno, che non ne forma parte integrante, ma vale solamente ad indicare il caso non considerato nell'eseguire l'analisi del problema, che per la sua natura deve dar luogo ad una doppia risoluzione.

A maggior comprovamento mi permetterò recarne altro problema, che sia quello di *rinvenire due numeri la differenza de' quali sia a e b² il prodotto*.

Prendendo per l'incognita x il minore di essi, si ha l'equazione

$$x^2 + ax = b^2$$

dalla quale risulta

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}$$

de' quali due valori, l'uno l'è positivo, l'altro negativo; ed il primo ben dinota soddisfare al quesito; non così però il secondo, che pur soddisfa all'equazione dalla quale è derivato. Per venire in chiaro di questa seconda radice, basta riflettere, che la supposizione di x pel minore de' numeri dati l'è arbitraria, mentre potevasi per essa dinotar anche il maggiore, nel qual caso l'equazione al problema sarebbe stata

$$x^2 - ax = b^2$$

le cui radici sono

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}$$

identiche alle precedenti, inversamente prese: da che apparisce, non essere il risultamento negativo nelle due risoluzioni, che una correzione della supposizione arbitraria fatta nell'intraprendere l'analisi del problema, indicando che si possa lo stabilimento dell'incognita cambiare in contrario, nel qual caso la radice positiva si trasmuta in negativa, e questa in quella; e però rendesi evidente, che i risultamenti negativi de' problemi aritmetici sien degni di tutta la considerazione, sì per compierne la soluzione, che per correggere la determinazione; che essi debbono esser considerati indipendentemente dal segno negativo che gli affetta, il quale è ad essi estrinseco, nè per loro indica quan-

tità minore del zero, che queste sono puramente enti immaginari, e di nessun concetto, se non nel modo come le ebbi considerate nell'introduzione al presente lavoro, vale a dire di uno stato contrario alle *positive* così dette. In somma, che debbono, come diceva, esser considerate pel valore che dinotano, indipendentemente dal segno. E piacemi qui ripetere un bel paragone, che grammaticalmente fa il valente analista *Couchy* delle quantità negative, dicendo, che esse possono esser paragonate a degli *aggettivi posti dopo i loro sostantivi* (1), val quanto dire, che dinotano *accidente, qualità*, e non *essenza* del soggetto che rappresentano nel loro valore indipendentemente dal segno.

E ciò basti per questi esempi aritmetici, proponendomi a dichiarare nella sezione seguente lo stesso soggetto pe'geometrici, e dileguare le difficoltà proposte dall'insigne *d'Alembert*, e ripigliate dal *Carnot* per siffatti casi.

(1) Nota 1 in fine dell' *Analyse algèbrique*.

SEZIONE TERZA.

Esame di alcuni casi di risultamenti negativi ottenuti dall'analisi de' problemi geometrici esposti dal d'Alembert, ripetuti dal Carnot; ed equivoci da essi presi.

Il sommo *d'Alembert*, dopo aver detto esser massima generale, che nella soluzione de' problemi geometrici, le quantità negative si prendan sempre dal lato opposto alle positive, avverte verificarsi una tal regola, presa nella sua generalità, per le sole ordinate delle curve, attribuendosi il merito di aver egli il primo ciò provato generalmente e con rigore, nell'articolo *Courbes* dell'Enciclopedia (1), aggiungendo, che per aver il corso completo di una curva algebrica, bisogna necessariamente supporre negative le x , dopo averle considerate come positive, e di nuovo dimostrandolo in questo luogo, col trasportare il principio delle x, y , a qualche punto dal sito delle x negative. Ripiglia poi con dire, che quel principio di opposizione tra le due specie di quantità risultanti da problemi non abbia sempre luogo, essendovi de' casi ne' quali risultamenti di opposto segno debbonsi prendere nel verso stesso, e dello stesso segno in opposte direzioni. È questo il soggetto ch'egli tratta nel § 11° della LVIII delle sue memorie, inserite nel vol. VIII de' suoi *Opuscoli*. L'illustre *Carnot*, non solamente adotta tal sentimento del *d'Alembert*, ma si sforza estenderlo, per avvalersene a provare l'assunto di cui è stato detto nella precedente introduzione.

Nell'art. *Negatif* dell'Enciclopedia aveva esso *d'Alembert* già accennato un primo caso nel quale egli credeva mostrare in difetto quella regola, ricavandolo dall'equazione della *polare* per una curva conica, rapportandola al vertice prossimo; ma nell'opuscolo qui sopra citato egli stimò meglio prenderla dal vertice remoto, e chiamando a il semiasse maggiore, e l'eccentricità r un ramo o raggio vettore, e z l'angolo di questo coll'asse verso il vertice remoto, l'equazione polare, che vi corrisponde è

$$r = \frac{a^2 - e^2}{a - e \cos. z}$$

(1) *Opuscoli* vol. VIII—*Sur les quantités négatives*.

Ciò posto egli così ragiona. Essendo e sempre più piccola di a , il valore di r risulta sempre positivo; nonpertanto il ramo che corrisponde a $z+180^\circ$ è in linea retta ed in senso contrario al raggio che corrisponde a z ; da che egli conchiude aversi due quantità, l'una positiva, l'altra negativa, o piuttosto due quantità in senso diametralmente opposto, mentre tutte due hanno un'espressione positiva: ed il contrario avvenire per l'iperbole, ove

$$r = \frac{e^2 - a^2}{e \cos. z - a}$$

se aumentasi z di 180° , nel qual caso il ramo r sarà negativo, ed intanto dovrà esser preso dal lato stesso di quello che corrisponde a z .

A dileguare tal difficoltà, ne offre il modo lo stesso *d'Alembert*, avvertendo non indicare il segno negativo, che la quantità cui esso affetta debba essere diametralmente opposta alla positiva, bastando che sia dal lato contrario a quello che si era supposto; soggiugnendo, che con un poco di attenzione vedrassi, che quando supponesi l'angolo z accresciuto di 180° , il ramo r dell'iperbole non debba esser preso, come supponesi, sulla linea che va dal fuoco all'estremità dell'arco $z+180^\circ$, ma su questa prolungata nel senso opposto. Al contrario nell'ellisse, il ramo r , che corrisponde a $z+180^\circ$, debbe esser preso, come supponesi, sulla linea stessa, che va dal fuoco all'estremità dell'arco $z+180^\circ$, e non come nell'iperbole. Del quale ripiego, mentre dovrò avvalermi nell'interpretare il vero senso de' risultamenti de' problemi proposti dal *d'Alembert*, ritenuti dal *Carnot*, e risolti nel modo da dar luogo alla loro proposizione, di non verificarsi sempre, che il segno — indichi opposizion di sito, converrà poi, che seguentemente faccia rilevare donde derivi tale improprietà, che ebbe indotti in equivoco matematici sì distinti; mentre debbo per ora rivolgere l'attenzione a' casi più imbarazzanti, secondo il *d'Alembert*, nella posizione delle quantità negative.

Il primo e principale, ch'egli ne presenta, il ricava dal seguente problemetto: *Inclinare da un punto dato fuori di un dato cerchio una secante a questo, in modo che la parte di essa che è corda del cerchio sia data.*

Egli pone l'intera secante centrale uguale a b , la parte esterna di questa uguale ad a , e chiama x la parte esterna della secante

cercata, f quella che deve costituir corda del cerchio; ed ha quindi immediatamente l'equazione

$$x^2 + fx = ab$$

le cui radici sono

$$x = -\frac{1}{2}f + \sqrt{\left(ab + \frac{1}{4}f^2\right)}$$

$$x = -\frac{1}{2}f - \sqrt{\left(ab + \frac{1}{4}f^2\right)}$$

delle quali l'una è evidentemente positiva, ch'egli dice rappresentare la x , nel modo come è stata stabilita, l'altra l'è negativa, da rappresentare l'intera segante. Ecco dunque, egli dice, due radici di segno contrario, sebbene nel fatto debbono stabilirsi in figura pel verso stesso. Ed a vieppiù corroborare il suo assunto, ne indica anche il caso, che il punto dato sia nel cerchio, nel qual caso l'equazione risulterebbe

$$fx - x^2 = ab$$

che darebbe due radici positive, mentre corrispondono in figura a parti contrarie.

A tale difficoltà non tralascia egli offrir ragioni per toglierla; e prima dice, che potrebbe ben aver luogo la radice negativa del problema proposto in senso direttamente opposto alla positiva, facendola corrispondere ad un altro cerchio, identico al dato, il cui centro si trovasse nel prolungamento della congiungente il centro di quello col punto dato, e distante da questo quanto tal congiungente. Egli poi rigetta tale spiegazione, con dire, che se le radici, che danno la soluzione fossero AE ed Af [fig. 1], l'una appartenente al cerchio considerato nell'intraprendere l'analisi del problema, l'altra al cerchio identico in grandezza e posizione descritto nel modo di sopra indicato, avrebbe l'analisi del problema dovuto dare anche le altre due radici AF ed Ae. Ma ognuno che è esercitato nella risoluzione algebrica de' problemi conosce abbastanza, non dover ciò aver luogo; poichè trattasi di una figura identica alla proposta, che solamente ne viene indicata dal risultamento della soluzione, pel modo come si è stabilita l'incognita, lasciando dubbio il verso per rispetto al punto A, dove trovavasi il cerchio. Aggiungo, che dovendosi per applicare la AE, o la AF, descrivere il cerchio dal centro A, col raggio l'una di esse,

questo ad un tempo veniva anche ad assegnare i punti e , f nella conseguente figura. Una tal congettura sarebbe dunque plausibile; ma non dà essa la vera spiega dell'enigma derivato dal modo vago di analisi del problema, perchè non applicabile al caso del punto che fosse dato al di dentro del cerchio.

Or prima di venire alla dilucidazione di questo dubbio osserveremo, che non possono le AE ed AF rappresentar le due radici dell'equazione, e le risolvienti il problema; poichè l'una è conseguenza dell'altra. Aggiungasi, che se il punto A passasse in B, il problema non cambierebbe di grado, mentre non avrebbe che una sola radice, ed una sola soluzione. Ma come mai ha potuto il *d'Alembert* trascurare assolutamente il semicerchio inferiore BE'D, e dimenticare la regola da lui data precedentemente, che l'opposizione non debba intendersi sempre in senso diretto; e non vedere, che la costruzione di ciascuna di quelle radici esigendo necessariamente la descrizione del cerchio dal centro A, questo dovendo intersegare tanto il semicerchio al di sopra del diametro BD, che quello al di sotto, dava per punti soddisfacenti al problema o E ed F', o F ed E', risultando l'opposizione delle due radici relativamente al diametro AD, ritrovandosene l'una al di sopra, l'altra al di sotto! E lo stesso ragionamento vale pel punto A se fosse dentro il cerchio.

Nè tralascierò in appresso di confermare il fin qui detto con nuovi argomenti desunti dalla Geometria, o da questa corredata dell'Analisi moderna; e per ora tralascierò ogni altro esame degli esempi recati dal *d'Alembert*; perchè quando avrò ben confermata la spiegazione già data; sarà ciò bastante a dileguare ogni altra difficoltà.

A tale scopo ripiglio la soluzione del problema ponendo la OC, [fig. 2] tra 'l centro e la perpendicolare EC uguale ad x , e per semplicità di calcolo supponendo, che tanto la AB, quanto la EF pareggino il raggio OB, si avrà per equazione al problema la seguente

$$x^2 - \frac{3}{4} ax = \frac{1}{16} a^2$$

dalla quale ottengonsi le due radici

$$x = + \frac{3}{8} a + \frac{1}{8} a \sqrt{13}$$

$$x = + \frac{3}{8} a - \frac{1}{8} a \sqrt{13}$$

di cui la prima positiva rappresenta le OC ; l'altra negativa la OC, in silo contrario alla OC, sulla stessa retta di posizione AOD , e dal medesimo punto O dato.

A costruire il problema bisognerà dunque tirare alla AD le perpendicolari ECE', FcF', che incontrando la circonferenza daranno i punti soddisfacenti ad esso. Questi però non possono ritrovarsi ad un tempo in una stessa semicirconferenza, come E, F, o E', F', perchè allora si darebbe al problema una sola soluzione, mentre deve averne due; e però conviene che sien presi l'uno in una semicirconferenza l'altro nell'altra, come, E, F', o F, E'. E ripeto quì ciò che ho precedentemente detto , che i punti E, F; o E', F' in riguardo al problema non danno che una sola soluzione, essendo l'una conseguenza necessaria dell'altra.

Procedendo innanzi, prendasi per incognita la perpendicolare OG, che dal centro si tira alla corda da applicarsi, condotta innanzi l'analisi del problema con gli stessi simboli , come precedentemente , si perviene all'equazione

$$x^2 = \frac{3}{4} a^2$$

le cui radici l'una positiva, l'altra negativa

$$x = \pm \sqrt{\frac{3}{4} a^2}$$

dinotano il raggio di quel cerchio descritto dal centro O , cui tirata la tangente si otterrebbe applicata nel cerchio proposto la corda che cercasi ; ed è noto che tali tangenti sien due, l' una nel semicerchio BED superiore al diametro AD, l'altra nell'inferiore BE'D. Da che rendesi evidente doversi le radici per tal problema costruir sempre l'una da una parte, l'altra dall'opposta rispetto al diametro.

E qui cade in acconcio rispondere ad un'altra difficoltà dal *Carnot*, elevata per provare , che le radici negative ne' problemi geometrici sieno insignificanti, e puri enti di ragione , dimandando egli , in caso analogo, cosa significhi un cerchio di raggio negativo, e come costruirlo. A che è facile rispondere , che basti prendere su di una qualunque retta tirata pel centro O, e da questo punto a parti opposte, le parti di essa uguali a quel raggio ; i due cerchi coincidenti , de-

scritti con l'uno e l'altro di tali raggi daranno la soluzione al problema. Ed in appresso farò conoscere da che avvenga questa superfluità, che può dirsi bizzarria geometrica; e ne trarrò argomento per la regolare condotta nell'analisi de' problemi, facendo conoscere chiaramente che un siffatto sconcio, e gli equivoci che ne derivano, lungi dall'attribuirsi alla Geometria, ed essere un difetto di essa, non sono che prodotti dall'analista, che non ha convenevolmente stabilita l'incognita.

Dovrei anche qui rispondere alle altre difficoltà promosse dal *Carnot*, in sostegno dell'opinione da lui presa come assoluta, mentre l'è relativa, che supponendo le quantità negative minori del *zero*, e da avere nel calcolo geometrico una rappresentazione reale ne seguirebbe, che in una curva la quale da un diametro risulti divisa in due parti identiche, come il cerchio, *p.e.*, l'intera ordinata composta dalle due semiordinate uguali ne' versi opposti, e però l'una negativa, l'altra positiva risulterebbe *zero*; ed altre conseguenze assurde di simil fatta, le quali ognun vede originate da' falsi principii supposti, e non meritare però alcuna considerazione.

SEZIONE QUARTA.

Ricerche sulla natura de' problemi di 2° grado, dalle quali poi traggonsi nuovi argomenti in comprovamento del soggetto trattato nelle presenti considerazioni.

Nella precedente sezione si è abbastanza dimostrato, sebbene indirettamente per mezzo dell'Analisi moderna, che le radici negative de' problemi geometrici, convenevolmente adoperate ne offrano la risoluzione del pari che le positive, compiendola; si è quindi estesa per essi la regola data dal *Cartesio*, secondo la mente del *d'Alembert*, e sonosi dileguati i dubbi da questo sommo geometra elevati per taluni casi, che il *Carnot* ripigliandoli aveva pensato essere i più momentosi. Di ciò sebbene non sia a mia notizia che altri siasene di proposito occupato, pure ciò ha potuto avvenire. Essendo però riuscita vana ogni mia più accurata ricerca per assicurarmi se alcuno avesse mai intrapreso a dimostrar direttamente siffatto assunto, invocando il soccorso della Geometria, che è la guida sovrana per riuscire dal laberioso dell'Analisi moderna, mi sono quindi a ciò rivolto, ed eccomi ad esporre le considerazioni da me fatte in tal proposito.

Chiunque è alquanto versato nella Geometria degli antichi non ignora, che i due problemi de' quali *Euclide* ebbe data la composizione nelle proposizioni XXVIII e XXIX Elemento VI, e stabilita l'analisi nelle LVIII e LIX del libro *de' Dati*, sono i cardini della riduzione di tutti i problemi, da' moderni detti di 2° grado; che essi meno generalmente considerati, come fece l'*Halley*, riescono a dividere, o produrre una data retta in modo, che il rettangolo delle sue parti tra gli estremi, e 'l punto richiesto risulti dato; e che generalmente corrispondono a *rinvenir due rette reciproche e due altre, aventi una data somma, o una data differenza*; che tradotti in linguaggio algebrico corrispondono, per la data somma, all'equazione

$$x^2 - ax + b^2 = 0$$

che ammette il caso impossibile, premesso però da *Euclide* alla XXVIII,

per la necessaria determinazione di esso; ed ha le due radici entrambe positive; e per la data differenza all'altra

$$x^2 + ax - b^2 = 0$$

di cui l'una radice l'è positiva l'altra negativa, da cui comincerò le mie considerazioni.

La retta M [*fig. 3*] dinoti la media proporzionale tra le due rette date, e la AB sia la differenza tra le due richieste. Con questa per asse descrivasi l'iperbole parilatera, i cui rami opposti sien dinotati dalle curve LAP, NBQ e tirato all'asse, da un qualunque punto R, la perpendicolare RT uguale ad M, e condotta per l'estremo T di questa la parallela GTK all'asse AB, da' punti G, K ove questa incontra i due rami opposti dell'iperbole si ordinino le GF, KE; saranno le AF, AE le due rette che hanno per differenza la data AB, e sono reciproche alle altre due date, il cui rettangolo veniva rappresentato dalla M². Imperocchè quel rettangolo di AF in AE, o di BF in FA, a cagion dell'iperbole parilatera LAP pareggia il quadrato della semiordinata GF, e quindi della RT, o M. Ed esse AF ed AE risultano evidentemente opposte tra loro, e prendendo positivamente l'una di esse, l'altra si è negativa; e però l'è questo il sito nel quale debbonsi prendere tali rette per soddisfare al problema.

Suppongasi ora dinotar AB [*fig. 4*] la somma data delle due rette ignote, il cui rettangolo pareggi M². Descritto su di essa il semicerchio AHB, ed elevato da un punto qualunque R del diametro AB la perpendicolare RT uguale ad M, conducasi per l'estremo T di questa la TH parallela al diametro AB, che dovrà incontrar la curva, ne' punti H, T, se il problema non sia impossibile (27 *El. VI.*), da' quali punti tirate le semiordinate HD, IC, le rette AD, AC saranno le richieste, come quelle che pareggiano, prese insieme, la data AB, ed il loro rettangolo adequa il quadrato di TR, o di M. Ma coteste due rette sono positive, procedenti dal punto A verso la stessa parte B. Laonde le due rette reciproche alle due altre date, ed aventi una data somma sono indistintamente soddisfacenti al problema.

Dopo aver recata una geometrica dimostrazione alla verità proposta, e resala esente da ogni dubbio, su di essa elevato, che dovrà

in qualunque caso , e per sottile che esso sia rigettarsi , come contraddittorio all' evidenza geometrica , ed aversi però come un prodotto delle sottigliezze di chi lo propone , voglio anche rassodarlo con un esempio tratto dagli *Elementi* stessi *Euclidei*, qual si è la proposizione 11^a del 11° libro , o la 30^a del VI°, cioè di *dividere la retta AB in modo, che il rettangolo di AB in BH pareggi AH² (fig. 5)*.

Fatta la costruzione Euclidea della 11^a *El.* 11°, che vedesi nella figura che ne reco , mi limito a dimostrare non esser soddisfacente al problema la sola AF , come n' ebbe fatto *Euclide*, ed in questa proposizione , e nella 30^a *El.* VI°, ma ancora la CF. Si prolunghi dunque la BA in R , sicchè la AR pareggi la CF, e da essa tronchisi AS uguale ad AH , e quindi alla AF ; sarà la rimanente LK uguale ad AB data. Ed essendo pel 1° caso dimostrato da *Euclide* $AB : AH :: AH : HB$; sarà per la 12 *El.* V. $BS : AB :: AB : AH$, e per la medesima 12 sarà eziandio $BR : BS :: BS : AB$, cioè $BR : RA :: RA : AB$. Da che risulta la soddisfazione della CF al problema, del pari che la AF ; e per tal modo gli si attribuisce il grado che gli è proprio.

Un tal problema risoluto con l'Analisi moderna, col porre le rette $AB = a$, ed il maggior segmento $AH = x$, avrebbe inmantinenti data l'equazione

$$x^2 + ax - a^2 = 0 ;$$

donde

$$x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{5}{4}a^2} ;$$

e però le due radici $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$, e $-\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ entrambe soddisfacenti al problema , i cui geometrici valori sono le rette AH ed AR. Nè valga il dire , che con la seconda di queste due radici siesi trascorso ad un soggetto non espresso nella condizione del problema , cioè di *produrre la retta AB per modo, che il rettangolo di tutta essa con la parte prodotta, nella retta data, pareggi il quadrato di quella parte* ; poichè questo problema maneggiato con l'Analisi moderna , conduce all'equazione

$$x^2 - ax + a^2 = 0$$

le cui radici

$$x = \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{5}{4} a^2}$$

ed

$$x = \frac{1}{2} a - \sqrt{\frac{5}{4} a^2}$$

sono precisamente le inverse delle precedenti. Che però l'è evidente non costituire que' due problemi che un solo, che trattato nell'un modo dà pure la soluzione dell'altro; il che deve avvenire necessariamente per la natura di esso problema, e di quelli in generale di questo grado, e di qualunque altro superiore, come faremo rilevare nella seguente sezione.

Dalle precedenti considerazioni si rileva chiaramente, ciò che era stato per congettura asserito dal d' *Alembert*, e ripetuto dal *Carnot*, e che nella sezione I. ebbi ancor detto, cioè, che i geometri greci non pensarono mai a grandezze negative, ed all'uso che di esse suol farsi. Di fatti nessun di essi dimostrò in alcun luogo, che delle due rette reciproche a due altre date, ed aventi data differenza, l'una soluzione sia soddisfacente al problema, nel suo proprio sito, l'altra nel sito opposto; e nè anche *Euclide*, che aveva risoluto il rapportato problema in due luoghi degli *Elementi*, cioè nella 11 del 11°, per mostrare l'uso euristico delle verità dimostrate per le potenze della retta divisa, e servirsene poi per la soluzione del problema di costituire un triangolo isoscele con ciascun degli angoli alla base doppio del verticale, che l'era di lemma alla descrizione del pentagono regolare nel cerchio, e nella 30ª del lib. VI° per recarne un congruo esempio di quella riduzione de' problemi di 2° grado a' due problemi cardinali, de' quali aveva trattato nelle proposizioni XXVIII e XXIX, si rivolse a contemplare la retta CF ovvero la AR, che è la seconda retta a quel problema soddisfacente. Che anzi reca gran meraviglia, che essendosi a tal verità grandemente avvicinato nella 5 dell' *El. XIII* non l'avesse avvertita: perchè quivi si attenne alla sola prima delle indicate proporzioni, senza avvertir l'altra, che aveva innanzi gli occhi. Ma nè tampoco come io diceva, fu tale verità avvertita da' moderni analisti, che altrimenti non avrebbero essi proposti o almeno tollerati que' dubbi sulle grandezze negative di cui abbiamo fatto parola nella precedente sezione, e che ora per compimento faremo anche più chiaramente rilevare, con l'aiuto della verità precedentemente stabilita.

Imperocchè essendo le due rette ignote AE, AF [fig. 1] reciproche alle date AD, AB, ed avendo per loro differenza la data EF, la prima di esse EA dovrà essere, nel suo proprio sito, soddisfacente al problema, mentre l'altra AF dovrà esserlo in un sito opposto.

Quindi l'espressione positiva $-\frac{1}{2}f + \sqrt{\left(ab + \frac{1}{4}f^2\right)}$ dovrà designarne l'incidente AE [fig. 2], e la negativa $-\frac{1}{2}f - \sqrt{\left(ab + \frac{1}{4}f^2\right)}$ dovrà rappresentarne l'incidente in sito opposto, se non diametralmente, a causa del modo come si è stabilita l'incognita, pur però dall'altra parte del diametro AB, cioè nell'altro semicerchio BE'D; e per conseguenza essere la AF', e non già la AF: e ritorno qui ad avvertire non essere soddisfacente al problema i punti E, F, sìvero E, F'; perciocchè da questi si posson condurre le due corde FE, FE' uguali alla f , convergenti al medesimo punto A; laddove pe' punti E ed F non può tirarsi che una sola corda con tal condizione. Aggiungo ancora, che non avvertì il d' *Alembert*, che il cerchio descritto dal centro A con l'intervallo AE, per costruire il problema, segna nel cerchio dato ABE ad un tratto i punti E, E', de' quali questo secondo rimarrebbe inoperoso ed inconsiderato, quando per la radice negativa si prendesse la AF, e non la AF'.

Ed a vieppiù confermare ciò, ritorno al ripiego che presi di avvalermi, per la costruzione di tal problema, del cerchio del raggio OG, cui la EF' dovrebbe risultar tangente, ed osservo, che essendo data la EF, il debba essere anche la OG, e quindi la ragione di OG : OA, che potrà comodamente dinotarsi per quella di $n:1$; onde avviene, che indicando per y l'ordinata EC si abbia, pe' triangoli simili AGO, AEC, $OG : OA :: EC : EA$; quindi $EA = \frac{y}{n}$, ed $AF = \frac{y}{n} + f$. Ma il rettangolo FAE pareggia l'altro BAD. Dunque sarà

$$\frac{y^2}{n^2} + \frac{fy}{n} = ab,$$

cioè

$$y = n\left(-\frac{1}{2}f + \sqrt{\left(ab + \frac{1}{4}f^2\right)}\right)$$

ed

$$y = n\left(-\frac{1}{2}f - \sqrt{\left(ab + \frac{1}{4}f^2\right)}\right)$$

il qual secondo valore della y negativo ben chiaramente avverte, doversi l'altro punto soddisfacente al problema ritrovare nel semicerchio BFD opposto a quello BFD nel quale ritrovasi il punto E.

Ciò può anche in altro modo dimostrarsi : ponendo uguale a v la tangente dell'angolo OAG, e la $OG=e$; sarà $AG : GO :: R : \text{tang. OAG}$; quindi risulterà $AG = \frac{c}{v}$. E dovendo essere $AG^2 - GE^2 = DAB$, si avrà

$$\frac{c^2}{v^2} - \frac{1}{4} f^2 = ab$$

dalla quale equazione ottengonsi per v i due valori

$$v = + \sqrt{\frac{c^2}{ab + \frac{1}{4} f^2}}$$

$$v = - \sqrt{\frac{c^2}{ab + \frac{1}{4} f^2}}$$

Da che evidentemente rilevasi dover l'un angolo FAD ritrovarsi in verso contrario all'altro F'AD.

E gli stessi ragionamenti precedenti possono applicarsi al caso, che pongasi uguale ad x non la AE, ma la AF; il che ho voluto solamente accennare, sebbene sia superfluo, per seguire, a passo a passo, i ragionamenti del sommo d' *Alembert*. Che però volendo anche soddisfare all'altro caso di questo stesso problema, supponendo il punto dato A non fuori del cerchio, ma dentro di esso, nel quale il d' *Alembert* si sforza trovare due valori positivi della x aver sito opposto, cioè EA, AF' [fig. 6], l'è facile ora comprendere l'equivoco stesso in prender queste per le due radici, e non già le AE, AF, o le AE', AF' che sono effettivamente le soddisfacenti, in vista delle identiche considerazioni del caso da prima considerato.

Proseguendo sempre gli stessi suoi argomenti considereremo ancor quello da lui addotto nel § 10 del suo Opuscolo citato; ove egli trasportando il punto A in un estremo del diametro del cerchio

ADB [fig. 7], e ponendo l'ascissa $AP=x$, la corda $AD=z$, ed indicando per $2a$ il diametro AB , si ha $z=\pm\sqrt{2ax}$; e qui dimanda, che debba intendersi per la corda negativa $\sqrt{2ax}$; a che è facile rispondere, seguendo la stessa dottrina da lui precedentemente stabilita, esprimer essa la corde AD' corrispondente alla medesima ascissa x nell'altro semicerchio $AD'B$: nè potersi congetturare, come par ch'egli sospetti, soddisfarvi la Ad' nell'altro cerchio identico $Ad'B$; perchè in questo l'ascissa Ap' verrebbe indicata da $-x$, e le due corde AD, Ad' non corrisponderebbero alla medesima ascissa x , ma a due diverse opposte tra loro, e di più starebbero in due semicerchi non formanti un cerchio; il che è contrario all'enunciato nel problema.

E ciò può per ora bastare di compimento, ad abbondanza, alla spiega delle difficoltà proposte dal *d'Alembert*; e con gli stessi ragionamenti si potranno anche risolvere quelle in casi analoghi.

SEZIONE QUINTA

Da che prodotti gli equivoci del sommo d' Alembert , e le conseguenze antigeometriche del Carnot : mezzi da evitarli , e regole da tenere nello stabilire l' incognita nella soluzione algebrica de' problemi geometrici — Genuina idea di soluzione elegante.

Dopo aver adempito lo scopo di rimuovere le difficoltà promosse dal *d' Alembert*, ritenute ed accresciute dal *Carnot*, bisogna ben che mi rivolga a mostrare da che prodotte, e quale, per evitarle in casi analoghi, sia la regola da stabilire convenevolmente l' incognita nei problemi geometrici da trattarsi con l' Analisi moderna. Al qual proposito mi permetterò qui anticipatamente dire esser la Geometria un oracolo non falso e capriccioso come quelli delle sibille, e de' sacerdoti di Delfo, ma bizzarro da non rispondere adeguatamente e con precisione se non a chi sa interrogarla; e però essa, nelle soluzioni del *d' Alembert*, al problema della data corda nel cerchio, tiratagli da un punto dato, ha vagamente risposto poichè egli, prendendo l' incognita in giro, e dirò come pensile, non gli ebbe fissato sito; quindi ne veniva per conseguenza, doversi questo fissare con un ragionamento, e con nuove considerazioni sulle radici dell' equazione al problema, nel far le quali, se andò errato quel penetrante ingegno del *d' Alembert*, ed in un caso semplicissimo, molto più dovrà ciò avvenire a chi non sia di tanta forza, ed in problemi di maggior complicazione ne' loro risultamenti analitici. Ciò posto darò qui, pel convenevole stabilimento generale dell' incognita ne' problemi la seguente:

REGOLA

L' incognita in un problema geometrico, da risolversi con l'Analisi algebrica, conviene generalmente stabilirla sopra una retta di sito, e da un punto dato in essa; nel qual modo praticando alcun equivoco non potrà risulterne nel costruir le radici dell' equazione soddisfacente al problema; ma evidentemente risulteranno le *negative*, ove ne avvengano, in verso contrario alle *positive*.

E se in alcun caso vogliasi, o si stimi conveniente, per una facile analisi, il prenderla da un punto dato in giro, e come pensile, o ancora assegnarla in altro modo, converrà sempre, al termine dell' analisi, indagare come le radici negative, se non in sito direttamente opposto alle positive, abbiano però luogo, secondo le opportune regole date dal *d' Alembert*, in due parti contrarie della figura cui esse debbono corrispondere, per la soluzione del problema: avvertendo che in tali casi, dovendo i punti soddisfacenti venir segnati in figura dal cerchio descritto dal centro il punto fisso dato, e per intervallo l' incognita esibita, l' un di questi da una parte soddisfacendo all' una radice, l' altro rappresenti l'altra.

Or sebbene una tal regola risulti chiaramente, senz' altro dire, dalle considerazioni precedenti; pure non fia inutile convalidarla col seguente esempio:

PROBLEMA

Dividere la retta data AB (*fig. 8*) in modo, che il rettangolo delle due sue parti sia quanto lo spazio dato p'' , minore del quadrato di CB metà di tal retta.

SOLUZIONE

I. MODO

Sia D il punto cercato, e la CD dinotata da x prendasi dal punto medio C. Indicata con $2a$ la AB, l'equazione al problema sarà

$$a^2 - x^2 = p^2,$$

le cui radici $\pm \sqrt{a^2 - p^2}$, l'una positiva, l'altra negativa ed uguali costruisconsi nel seguente modo.

Descritto sulla CB il semicerchio CEB, vi si applichi dall'estremo B del diametro la $BE = p$, e congiunta la CE, si descriva con tal raggio l'altro semicerchio FED; saranno D ed F i due punti soddisfacenti al problema, essendo, com'è chiaro, ciascun de' due rettangoli ADB, AFB $= p^2$. Ed è evidente i due valori della x risultare opposti in sito tra loro.

II. MODO

Pongasi ora la AD $= x$, sarà la DB $= 2a - x$, e l'equazione al problema risulterà

$$2ax - x^2 = p^2.$$

le cui radici $+ a \pm \sqrt{a^2 - p^2}$ sono entrambe positive; ed esse, per l'identica costruzione al modo precedente, risultano AD ed AF, che sono in sito pel verso medesimo.

E lo stesso potrà ben osservarsi in tutti que' problemi, ne' quali l'incognita siasi stabilita nel modo proprio indicato dalla esposta regola.

Nè vale il dire che lo stabilir l'incognita in giro contribuisca alla semplicità della soluzione facilitando l'analisi per essa; poichè l'eleganza di quella non devesi valutare solamente da questa circostanza, ma dalla sicurezza altresì del risultamento nell'applicarlo; che però con ragione se questo sia equivoco, ancorchè semplicissimo e facilmente ottenuto, dovrà posporsi ad un altro non equivoco, sebbene più complesso. La qual cosa volendo comprovarla con qualche esempio, ad imitazione del *d'Alembert*, trascieglierò un altro problema delle *Inclinazioni*, cioè:

PROBLEMA

Dato il semicerchio AFB (*fig. 9*) , e la retta CF perpendicolare al suo diametro AB; applicare tra queste due linee la retta GH uguale ad una data f , che passi per l'estremo A di quel diametro

1° MODO

Con l' incognita in giro.

Pongasi $AB=a$, $AC=b$, e l' ignota corda AG che cercasi $=x$: congiungasi la GB. Ed essendo simili i triangoli AGB, ACH, e però $AG : AB :: AC : AH$, risulterà $AH = \frac{ab}{x}$, e quindi $HG = x - \frac{ab}{x}$, che dovendo pareggiare f , darà luogo all' equazione ridotto

$$x^2 - fx = ab$$

le cui radici sono

$$x = \frac{1}{2} f + \sqrt{\left(ab + \frac{1}{4} f^2 \right)}$$

$$x = \frac{1}{2} f - \sqrt{\left(ab + \frac{1}{4} f^2 \right)}$$

l' una positiva l' altra negativa, delle quali eccone la geometrica costruzione.

Dal punto F si elevi sulla AF la perpendicolare $Fl = \frac{1}{2} f$, e dal centro l, intervallo lF descrivasi il semicerchio KFL; rappresenteranno le rette AK ed AL le due radici dell' equazione al problema, la prima, cioè, la positiva, rappresentante la AG, che sarà facile applicarla nel suo vero sito, l' altra la negativa, di cui rimane dubbio il modo di applicazione; e però che obbliga a nuove considerazioni, dalle quali finalmente si riuscirà in rilevare dover essa applicarsi nel

semicerchio inferiore A f B, nel quale la parte di tale applicata, che rimane tra la circonferenza di questo e la FC indefinitamente prodotta pareggi la data f .

II. MODO

Più complesso del precedente, ma esente da equivoco.

Pongasi uguale ad x l'ascissa AM corrispondente all'ignoto punto G; sarà per la natura del cerchio $AG = \sqrt{ax}$; e per la similitudine de' triangoli AGB, ACH, risulterà $AI = \frac{ab}{\sqrt{ax}}$, e quindi. . . .

$HI = \sqrt{ax} - \frac{ab}{\sqrt{ax}} = \frac{(ax - ab)}{\sqrt{ax}}$, la qual retta dovendo, per la condizione del problema pareggiare f , che per condotta di calcolo, può rappresentarsi per \sqrt{ac} darà luogo alla seguente equazione ridotta

$$x^2 - 2bx - cx = -b^2$$

donde le due radici

$$x = b + \frac{1}{2}c + \sqrt{\left(bc + \frac{1}{4}c^2\right)}$$

$$x = b + \frac{1}{2}c - \sqrt{\left(bc + \frac{1}{4}c^2\right)}$$

che sono, come si vede, entrambe positive; che però troncate dal punto A sul diametro AB verso B, determineranno nel semicerchio AFB i punti soddisfacenti al quesito, senza esservi bisogno uscire dal proposto nel problema, che era di applicare la segante nel solo semicerchio AFB; come si è dovuto praticare per soddisfare alla precedente soluzione; ond'è che questa, men semplice della precedente, per la condotta del calcolo, l'è però di essa più adeguata.

III. MODO.

Che se vogliasi una soluzione da indicare non solo i due punti soddisfacenti al problema nel semicerchio AFB ; ma ancor quelli del suo adjacente AfB ; e ciò per soddisfare alle intenzioni dal d' *Alembert*, espresse nel n.º 7 della sua Memoria (1), in riguardo al problema da lui trattato ; pongasi la CH=x , e quindi AH=√(b²+x²). Ed essendo il rettangolo GAH uguale all'altro BAC, sarà

$$AG = \frac{BAC}{AH} = \frac{ab}{\sqrt{b^2+x^2}} ; \text{ e la } GH = AG - AH = \frac{ab}{\sqrt{b^2+x^2}} - \sqrt{b^2+x^2} = f.$$

Donde risulta l'equazione

$$ab - b^2 - x^2 = f\sqrt{b^2+x^2}$$

che ridotta l'è biquadratica, ed ha per radici

$$\begin{aligned} x &= + \sqrt{\left(ab - b^2 + \frac{f^2}{2} - f \sqrt{ab + \frac{1}{4}f^2} \right)} \\ x &= + \sqrt{\left(ab - b^2 + \frac{f^2}{2} - f \sqrt{ab + \frac{1}{4}f^2} \right)} \\ x &= - \sqrt{\left(ab - b^2 + \frac{f^2}{2} + f \sqrt{ab + \frac{1}{4}f^2} \right)} \\ x &= - \sqrt{\left(ab - b^2 + \frac{f^2}{2} - f \sqrt{ab + \frac{1}{4}f^2} \right)} \end{aligned}$$

Ed essendo $ab - b^2 + \frac{f^2}{2}$ maggiore di $f \sqrt{ab + \frac{1}{4}f^2}$ tali quattro radici saranno reali , e le due vere segneranno i punti soddisfacenti al problema nel semicerchio AFB ; mentre le due negative daranno quelli nel sottoposto semicerchio AfB, non compreso nell'enunciazione.

Dalle osservazioni da me precedentemente fatte , e da altre che ciascuno potrà fare per propria avvertenza in simili problemi, ne con-

(1) Vol. VIII *Opusc.*

chiuderà volentieri esser molto oscura la posizione delle incidenti negative, e quindi dubbia l'esibizione geometrica da praticarsi per le radici false de' problemi; e che di molta maggiore difficoltà riesca siffatta indagine allorchè le incognite si stabiliscano come pensili, e di una posizione affatto vaga: al qual proposito mi basta aggiugnere, aver esitato l'illustre *Eulero* in rischiarare un tal punto; sicchè all'occasione della soluzione da lui data del cerchio da toccarne tre altri, si attenne ad indicare le equivalenti di coteste radici false, così esprimendosi: *Quamquam autem applicatio ad quosvis casus propositos nulla laboret difficultate; tamen quando aequatio quadratica radicem negativam involvit, ita ut litera z negativum obtinet valorem, non tam facile perspicitur, quomodo tales casus sint representandi. Omnis autem difficultas evanescit si ostenderimus valores negativos pro z inventos proprie non ad ipsum casum propositum pertinere, sed ad eum casum quo radiis circulorum α , β , γ contraria signa tribuuntur*; cioè a dire, quando il richiesto cerchio debba esser circoscritto a que' tre, ch' ci deve toccare, la qual cosa è nitidamente da lui dimostrata nel suo lavoro, con agevolarne benanche la costruzione. E qui facendo egli eco al precetto delle antiche scuole su' problemi geometrici, che soglion proporsi in *subjecti constructionem*, così ripiglia: *Verum quia hoc problema est geometricum, non tam calculus numericus, quam constructio geometrica desiderari solet; quae utique nimis prodiret operosa si eam ex aequatione $Lz^2 - 2Mz + N = 0$ derivare vellemus*; il qual saggio precetto di sì gran geometra, esercitatissimo nella risoluzione de' problemi, comprova vieppiù ciò che da principio diceva, non doversi nel maneggio algebrico de' problemi geometrici por mente alla facilità e speditezza di questo, sìvvero alla sicurezza ed eleganza della costruzione de' risultamenti. Che se gli antichi con la loro analisi, che evitava d'imbattersi in simili scogli della moderna, riponevano l'eleganza di soluzione de' problemi in ottenerla *analysis brevissima et simul perspicua, synthesis concinna et minime operosa*; quanta maggior cura non debbono riporre in questa seconda parte delle loro ricerche geometriche i moderni, mirando ad evitare eziandio l'inconveniente per l'applicazione delle loro radici in adempiere la conveniente costruzione. Alla qual massima se avesse posto mente il

dotto *Arago*, non si sarebbe lasciato dire, nell'elogio del *Carnot*, pieno di erudizione, e ben condotto: *Voilà ce dont la théorie de la corrélation des figures et la Géométrie de position, que Carnot a rattachées à ses vues si ingénieuses sur les quantités négatives donnent le plus ordinairement des solutions faciles*. E continuando egli a questo modo il suo ragionamento, non avrebbe istituito tra il procedimento dell'Analisi degli antichi, che abbiamo già indicato qual fosse, nell'introduzione al nostro lavoro, e quello de' moderni, che hanno seguite le loro orme, (notando ben ragionevolmente i due sommi geometri inglesi del passato secolo *Roberto Simson* e *Matteo Stewart*) il paragone che ne fa, conchiudendo pel gran servizio dal *Carnot* reso alla Geometria, che stava bene attribuirlo a coloro che fondarono e stabilirono l'uso dell'Algebra in essa, e che a' tempi presenti l'hanno sì oltre promosso, e il promuovono in modo certo e durevole.

Chiuderò finalmente questo articolo della presente sezione con recare ciò che ne diceva l'immortal *Newton* nel § XXVI, cap. I, sez. IV. della sua *Arithmetica Universalis*, che con dispiacere veggo a' tempi presenti non più considerata come merita. Dopo aver egli mostrato la fecondità dell'Analisi moderna nella soluzione de' problemi geometrici, così conchiude: *Ex his constare potest, quanta sit solvendi copia et obiter quod alii modi sint aliis multo concinniores. Quapropter si in primis de solutione problematis alienius cogitationes modus computationi male accomodatus inciderit, relationes linearum iterum evolvendae sunt, donec modum, quam poteris, idoneum et elegantem machinatus fueris*. Conchiudendo dopo ciò: *Nam quae leviori curae se offerunt, laborem satis molestum plerumque parient si ad opus adhibeantur*. E ciò conferma il da me detto a pag. 29.

Per compiere ora lo scopo che mi ebbi prefisso fin dalla introduzione, non mi rimane che rispondere all'altra proposizione dell'illustre *Arago*: *del come avvenga, che alla soluzione di un problema nel suo stretto senso enunciativo si mescolino, come egli dice, problemi stranieri, e che l'Analisi algebrica risponda, con una déplorable fécondité, a quistioni che non gli sono state fatte*. Sul qual proposito non credo necessario ricorrere ad altri argomenti, e ripeter dottrine già note sulla natura diversa de' problemi, di che traggonsi

argomenti anche dalle ricerche precedenti; e però mi limito a rispondere al solo argomento ch'egli produce, che dinmandandosi l'*ellisse massima* (piuttosto *minima*) descrivibile per quattro punti dati, l'analisi per tal problema offra ancora le due iperboli con tal condizione descrivibili per essi punti.

Se egli si avesse data la pena in trattare lo stesso problema per l'iperbole avrebbe ben veduto, che l'analisi da lui condotta, identica, a passo a passo, a quella per l'ellisse, gli avrebbe dato ancor questa; il che l'avrebbe certamente indotto a riflettere, che tali due curve hanno una genesi uniforme, e sono caratterizzate da una stessa equazione variata solamente pel segno di un termine, da che un punto destinato a dar l'espressione algebrica della proprietà caratteristica di tali curve, per costituirne l'equazione rappresentativa, vien preso o tra gli estremi di una data retta, o in essa prolungata dall'un dei suoi estremi; e quindi si sarebbe convinto, che la soluzione dell'uno non può stare senza quella dell'altro, ed invece di attribuir ciò ad una *deplorabile fecondità* dell'Analisi moderna, vi avrebbe anzi riconosciuto il suo maggior pregio, e la preferenza su l'antica, riducendosi tal problema nella forma generale così espressa: *Assegnare la curva unica di massima o minima aja descrivibile per quattro punti*, dalla quale venendo, per la sua natura esclusa la parabola, non rimaneva all'analisi che dare la soluzione corrispondente per l'ellisse e l'iperbole. E però il problema, che secondo lui è proposto per l'ellisse riguarda generalmente la conica di area massima o minima descrivibile per quattro punti; e l'Analisi moderna lungi di una deplorabile fecondità, adempie perfettamente il suo obbligo. E ciò che qui ho in termini generali detto può vedersi con chiarezza rilevato e ben dimostrato dal dotto mio collega N. Trudi nella *discussione de' massimi e de' minimi*, con cui chiude il suo bel lavoro della *Conica di area minima descrivibile per quattro punti*. (*).

Ben più a ragione avrebbe potuto egli dolersi per que' problemi geometrici, il cui grado ne viene composto non solo da radici reali, che danno luogo alla costruzione geometrica, ma anche da radici immaginarie, come quello per l'appunto delle due medie proporzionali.

(*) Vol. I di queste Memorie.

Ma pure per questi convien considerare, che l'Analisi moderna l'è un metodo aritmetico, come istromento applicato alla Geometria, ed in ciò effettuare non può cambiar la sua natura, perchè quelle radici insignificanti geometricamente, soddisfano come valori all'equazione donde derivano. E rimane solo un difetto vero del modo che si adopera, o ancora per deficienza de' metodi, per que' casi ne' quali l'equazione si eleva ad un grado superiore alla natura del problema cui corrisponde, che o a forza di analitici ripieghi di escogitazione di chi l'ha trattato, riesce ridurvelo, o assolutamente si rimane irridotto, per difetto del metodo non ancora in ogni sua parte perfezionato.

Fig. 1

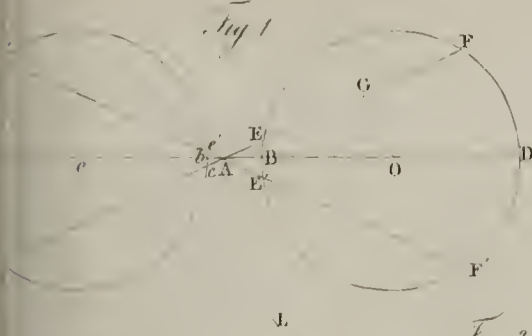


Fig. 2

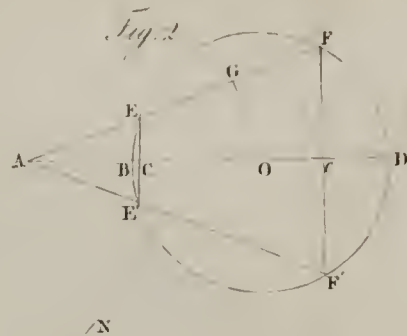


Fig. 3

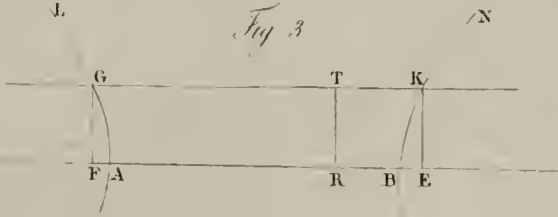


Fig. 5

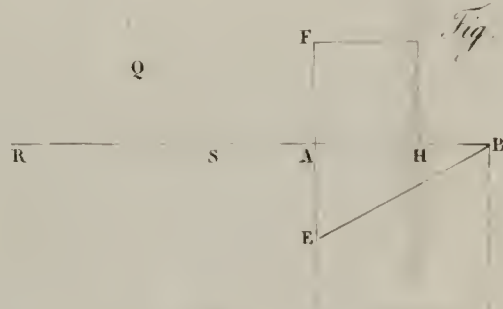


Fig. 7

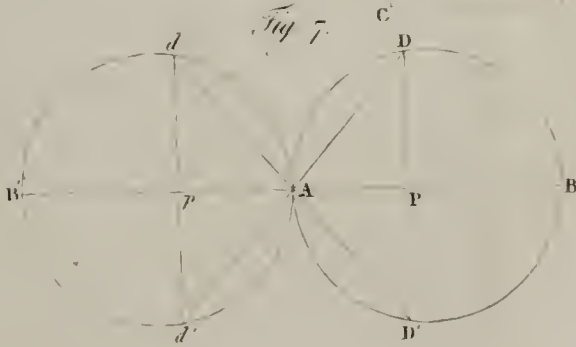
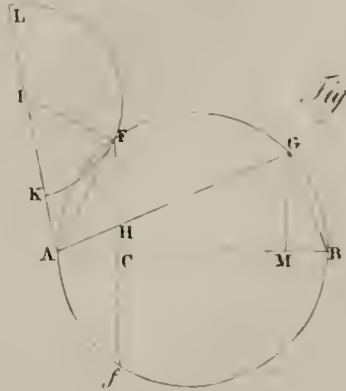


Fig. 9



SULLE FUNZIONI GENERATRICI
DI ALCUNE RIMARCHEVOLI SERIE TRASCEendenti

MEMORIA DELL' ABBATE

REMIGIO DEL GROSSO

Spesso occorre ne' problemi di Fisica Matematica di dover supporre espressa per una serie infinita una funzione incognita, e poi procedere a determinarne la forma. Tale si presenta un caso in Meccanica allorchè si cerca se la cicloide è la sola curva *tautochrone* nel vuoto, ovvero la sola curva, per i diversi archi della quale discendendo varî gravi in un mezzo non resistente, pervengono nello stesso tempo all'orizzonte. Or queste serie non riescono di alcun uso quando non si sa determinare la loro funzione generatrice. Quindi è una delle più importanti teoriche di Analisi quella, che tratta dei diversi metodi per ottenere la somministrazione della serie. Fra questi metodi il più spedito e più generale è l'uso del Calcolo integrale. Leonardo Eulero, il quale tutto percorse l'immenso campo delle Matematiche pure ed applicate, e vi lasciò ad ogni passo orma profonda ed incancellabile, molto si affaticò a svolgere questa importante dottrina, e, per servirmi della enfatica frase del Lacroix, creò ingegnosissimi metodi per sommare le serie col mezzo del Calcolo Integrale. Lo studio di questi metodi Euleriani mi ha condotto ad esprimere per mezzo d'integrali *indefiniti* e *definiti* le somme di alcune serie, le quali non sembrano indegne della considerazione de' Geometri.

1° Sia data la serie infinita

$$S = \frac{1}{p} + \frac{a e^x}{p+q} + \frac{a^2 e^{2x}}{p+2q} + \frac{a^3 e^{3x}}{p+3q} + \dots,$$

che per compendio di algoritmo rappresenteremo per

$$S = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{a^i e^{ix}}{p+iq} \quad (1),$$

e se ne debba trovare la *funzione generatrice*. Differenziando questa equazione rispetto ad a , si ottiene

$$\frac{dS}{da} = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{i a^{i-1} e^{ix}}{p+iq},$$

e per conseguenza

$$qa \frac{dS}{da} = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{iq a^i e^{ix}}{p+iq}$$

Se a questa equazione si aggiunge la (1) moltiplicata per p , risulta

$$qa \frac{dS}{da} + pS = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{a^i e^{ix}}{1 - ae^i} = \frac{1}{1 - ae^i},$$

alla quale equazione sarà utile dare la forma

$$\frac{dS}{da} + \frac{pS}{qa} = \frac{1}{qa(1 - ae^i)}$$

Ora si sa che l'equazione

$$\frac{dS}{da} + SF(a) = f(a)$$

ha per completo integrale

$$S = e^{-\int F(a) da} \left[C + \int e^{\int F(a) da} f(a) da \right],$$

rappresentando C una costante arbitraria. Laonde essendo nel caso presente

$$F(a) = \frac{p}{qa}; \quad f(a) = \frac{1}{qa(1 - ae^i)}; \quad \int F(a) da = -\frac{p}{q} \log a,$$

si avrà per la cercata funzione generatrice

$$S = \frac{a}{q} \left[C + \int \frac{a^{\frac{p}{q}-1}}{1 - a e^x} da \right]$$

Siccome poi la costante C deve essere $= 0$, diverrà

$$S = \frac{a}{q} \int \frac{a^{\frac{p}{q}-1}}{1 - a e^x} da \quad (2)$$

la funzione generatrice della serie (1).

2° Si faccia successivamente $x = \theta \sqrt{-1}$, $x = -\theta \sqrt{-1}$ nella (2), e rappresentando con S' , S'' i corrispondenti valori di S, verrà

$$S' = \frac{a}{q} \int \frac{a^{\frac{p}{q}-1}}{1 - a e^{\theta \sqrt{-1}}} da; \quad S'' = \frac{a}{q} \int \frac{a^{\frac{p}{q}-1}}{1 - a e^{-\theta \sqrt{-1}}} da$$

Da quest' equazioni risulta evidentemente

$$S + S'' = \frac{a}{q} \int \frac{a^{\frac{p}{q}-1} \left[2 - a (e^{\theta \sqrt{-1}} + e^{-\theta \sqrt{-1}}) \right] da}{1 - a \left(e^{\theta \sqrt{-1}} + e^{-\theta \sqrt{-1}} \right) + a^2}$$

$$\frac{S' - S''}{\sqrt{-1}} = \frac{a}{q \sqrt{-1}} \int \frac{a^{\frac{p}{q}-1} \left[e^{\theta \sqrt{-1}} - e^{-\theta \sqrt{-1}} \right] da}{1 - a \left(e^{\theta \sqrt{-1}} + e^{-\theta \sqrt{-1}} \right) + a^2}$$

e quest'equazioni a cagione delle relazioni

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{2} \left(e^{\theta \sqrt{-1}} + e^{-\theta \sqrt{-1}} \right) \\ \sin \theta &= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left(e^{\theta \sqrt{-1}} - e^{-\theta \sqrt{-1}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

diventano

$$\begin{aligned} S' + S'' &= \frac{2a}{q} \int^{-\frac{p}{q}} \frac{(1 - a \cos \theta) a^{\frac{p}{q} - 1} da}{1 - 2a \cos \theta + a^2} \\ \frac{S' - S''}{\sqrt{-1}} &= \frac{2a}{q} \int^{-\frac{p}{q}} \frac{\sin \theta a^{\frac{p}{q}} da}{1 - 2a \cos \theta + a^2} \end{aligned}$$

Dalla (1) si rileva che i primi membri di quest'equazioni sono le serie

$$2 \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{a^i \cos i \theta}{p + i q}, \quad 2 \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{a^i \sin i \theta}{p + i q}.$$

Avremo perciò

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{a^i \sin i \theta}{p + i q} &= \frac{a \sin \theta}{q} \int^{-\frac{p}{q}} \frac{a^{\frac{p}{q}} da}{1 - 2a \cos \theta + a^2} \\ \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{a^i \cos i \theta}{p + i q} &= \frac{a}{q} \int^{-\frac{p}{q}} \frac{(1 - a \cos \theta) a^{\frac{p}{q} - 1} da}{1 - 2a \cos \theta + a^2} \end{aligned} \quad (4)$$

3.° Nella equazione (2) sia $x=0$, $\frac{p}{q} = \lambda \sqrt{-1}$, $a=e^\beta$ e verrà

$$S = \frac{e^{-\lambda\beta\sqrt{-1}}}{q} \int \frac{e^{\lambda\beta\sqrt{-1}} d\beta}{1-e^\beta}$$

che col soccorso dell'equazioni (3) si traduce in

$$S = \frac{1}{q} \left[\cos \lambda \beta \int \frac{\cos \lambda \beta d\beta}{1-e^\beta} + \operatorname{sen} \lambda \beta \int \frac{\operatorname{sen} \lambda \beta d\beta}{1-e^\beta} \right] + \frac{1}{q} \left[\cos \lambda \beta \int \frac{\operatorname{sen} \lambda \beta d\beta}{1-e^\beta} - \operatorname{sen} \lambda \beta \int \frac{\cos \lambda \beta d\beta}{1-e^\beta} \right] \sqrt{-1}$$

Rappresentando con S_1 ciò che diventa S allorchè λ si cangia in $-\lambda$, si ha

$$S_1 = \frac{1}{q} \left[\cos \lambda \beta \int \frac{\cos \lambda \beta d\beta}{1-e^\beta} + \operatorname{sen} \lambda \beta \int \frac{\operatorname{sen} \lambda \beta d\beta}{1-e^\beta} \right] - \frac{1}{q} \left[\cos \lambda \beta \int \frac{\operatorname{sen} \lambda \beta d\beta}{1-e^\beta} - \operatorname{sen} \lambda \beta \int \frac{\cos \lambda \beta d\beta}{1-e^\beta} \right] \sqrt{-1}$$

Di qui risulta

$$S + S_1 = \frac{2}{q} \left[\cos \lambda \beta \int \frac{\cos \lambda \beta d\beta}{1-e^\beta} + \operatorname{sen} \lambda \beta \int \frac{\operatorname{sen} \lambda \beta d\beta}{1-e^\beta} \right]$$

$$S - S_1 = \frac{2\sqrt{-1}}{q} \left[\cos \lambda \beta \int \frac{\operatorname{sen} \lambda \beta d\beta}{1-e^\beta} - \operatorname{sen} \lambda \beta \int \frac{\cos \lambda \beta d\beta}{1-e^\beta} \right]$$

Intanto dalle (1) si ha in questa medesima ipotesi

$$S+S_1 = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{e^{i\beta}}{q(i+\lambda\sqrt{-1})} + \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{e^{i\beta}}{q(i-\lambda\sqrt{-1})} = \frac{2}{q} \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{ie^{i\beta}}{i^2+\lambda^2}$$

$$S-S_1 = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{e^{i\beta}}{q(i+\lambda\sqrt{-1})} - \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{e^{i\beta}}{q(i-\lambda\sqrt{-1})} = \frac{2\lambda\sqrt{-1}}{q} \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{e^{i\beta}}{i^2+\lambda^2}$$

Laonde sarà

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{ie^{i\beta}}{i^2+\lambda^2} &= \cos \lambda \beta \int \frac{\cos \lambda \beta d\beta}{1-e^{-\beta}} + \operatorname{sen} \lambda \beta \int \frac{\operatorname{sen} \lambda \beta d\beta}{1-e^{-\beta}} \\ \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{e^{i\beta}}{i^2+\lambda^2} &= \frac{1}{\lambda} \cos \lambda \beta \int \frac{\operatorname{sen} \lambda \beta d\beta}{1-e^{-\beta}} - \frac{1}{\lambda} \operatorname{sen} \lambda \beta \int \frac{\cos \lambda \beta d\beta}{1-e^{-\beta}} \end{aligned} \right\} (5)$$

4°. Ponendo $-\beta$ in luogo di β in quest'equazioni, si ha

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{ie^{-i\beta}}{i^2+\lambda^2} &= -\cos \lambda \beta \int \frac{\cos \lambda \beta d\beta}{1-e^{-\beta}} - \operatorname{sen} \lambda \beta \int \frac{\operatorname{sen} \lambda \beta d\beta}{1-e^{-\beta}} \\ \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{\lambda e^{-i\beta}}{i^2+\lambda^2} &= \cos \lambda \beta \int \frac{\operatorname{sen} \lambda \beta d\beta}{1-e^{-\beta}} - \operatorname{sen} \lambda \beta \int \frac{\cos \lambda \beta d\beta}{1-e^{-\beta}} \end{aligned}$$

Se la prima di quest'equazioni moltiplicata per $\cos \lambda \beta$ si aggiugne alla seconda moltiplicata per $\operatorname{sen} \lambda \beta$, si ha

$$\int \frac{\cos \lambda \beta d\beta}{1-e^{-\beta}} = - \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{e^{-i\beta} (i \cos \lambda \beta + \lambda \operatorname{sen} \lambda \beta)}{i^2+\lambda^2};$$

e viceversa se dalla prima moltiplicata per $\operatorname{sen} \lambda \varphi$ si sottrae la seconda moltiplicata per $\cos \lambda \varphi$, risulta

$$\int \frac{\operatorname{sen} \lambda \varphi d\varphi}{1 - e^{-\varphi}} = - \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{e^{-i\varphi} (i \operatorname{sen} \lambda \varphi - \lambda \cos \lambda \varphi)}{i^2 + \lambda^2}$$

Per $\varphi = \infty$, i secondi membri di quest'equazioni svaniscono poichè $\operatorname{sen} \lambda \varphi = 0$, $\cos \lambda \varphi = 1$, $e^{-i\varphi} = 0$; e per $\varphi = 0$, il secondo membro della

prima equazione diventa $-\sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{i}{i^2 + \lambda^2}$ ed il secondo membro della

seconda equazione si riduce a $\sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{\lambda}{i^2 + \lambda^2}$. In conseguenza avremo

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda \varphi d\varphi}{1 - e^{-\varphi}} &= \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{i}{i^2 + \lambda^2} \\ \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \lambda \varphi d\varphi}{1 - e^{-\varphi}} &= - \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{\lambda}{i^2 + \lambda^2} \end{aligned} \right\} (6)$$

Inoltre moltiplicando quest'equazioni per $d\lambda$, ed integrando rispetto a questo elemento, si ottiene

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \lambda \varphi d\varphi}{\varphi (1 - e^{-\varphi})} &= - \sum_{i=0}^{i=\infty} \operatorname{arc} \left(\operatorname{tg} \frac{\lambda}{i} \right) \\ \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda \varphi d\varphi}{\varphi (1 - e^{-\varphi})} &= - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{i=\infty} \log: ip: (i^2 + \lambda^2) \end{aligned} \right\} (7)$$

L'equazioni (6) e (7) mi sembrano del tutto nuove.

5.° Sia nella (2) $a = e^{\beta \sqrt{-1}}$, $x = 0$, e troveremo

$$S = \frac{e^{-\lambda \beta \sqrt{-1}}}{q} \int \frac{e^{\lambda \beta \sqrt{-1}} d\beta \sqrt{-1}}{1 - e^{\beta \sqrt{-1}}}$$

supponendo $\frac{p}{q} = \lambda$. Questa equazione si traduce agevolmente in

$$S = \frac{1}{q} \left[\operatorname{sen} \lambda \beta + \cos \lambda \beta \sqrt{-1} \right] \int \frac{[\cos \lambda \beta + \operatorname{sen} \lambda \beta \sqrt{-1}] d\beta}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \beta \left[\operatorname{sen} \frac{1}{2} \beta - \cos \frac{1}{2} \beta \sqrt{-1} \right]},$$

poichè si ha

$$1 - e^{\beta \sqrt{-1}} = 1 - \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \sqrt{-1} = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \beta - 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \beta \sqrt{-1}.$$

Moltiplicando sotto il segno \int ambedue i termini della frazione

per $\operatorname{sen} \frac{1}{2} \beta + \cos \frac{1}{2} \beta \sqrt{-1}$ risulta

$$S = \frac{1}{q} \frac{[\cos \lambda \beta \sqrt{-1} + \operatorname{sen} \lambda \beta] \int [\cos \lambda \beta + \operatorname{sen} \lambda \beta \sqrt{-1}] [\operatorname{sen} \frac{1}{2} \beta + \cos \frac{1}{2} \beta \sqrt{-1}] d\beta}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \beta}$$

ed eseguendo le moltiplicazioni e ponendo per brevità

$$H(\beta) = \int \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) \beta d\beta}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \beta} \quad ; \quad K(\beta) = \int \frac{\cos \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \beta d\beta}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \beta}$$

troveremo

$$S = \frac{1}{2q} \left(H(\beta) \operatorname{sen} \lambda \beta - K(\beta) \cos \lambda \beta \right) \\ + \frac{1}{2q} \left(H(\beta) \cos \lambda \beta + K(\beta) \operatorname{sen} \lambda \beta \right)$$

Cangiando β in $-\beta$, ed osservando che $H(-\beta) = -H(\beta)$, $K(-\beta) = K(\beta)$, si ottiene

$$S_1 = \frac{1}{2q} \left(H(\beta) \operatorname{sen} \lambda \beta - K(\beta) \cos \lambda \beta \right) \\ - \frac{1}{2q} \left(H(\beta) \cos \lambda \beta + K(\beta) \operatorname{sen} \lambda \beta \right) \sqrt{-1}$$

Di qui risulta

$$S + S_1 = \frac{1}{q} \left(H(\beta) \operatorname{sen} \lambda \beta - K(\beta) \cos \lambda \beta \right) = 2 \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{\cos i \beta}{p + iq}$$

$$\frac{S - S_1}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{q} \left(H(\beta) \cos \lambda \beta + K(\beta) \operatorname{sen} \lambda \beta \right) = 2 \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{\operatorname{sen} i \beta}{p + iq}$$

6.° Se nell'equazioni (4) si pone successivamente $a=0$, $a=1$, si ha

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{\cos i \beta}{p + iq} = \frac{1}{q} \int_0^1 \frac{(1 - \cos \beta) a^{\frac{p}{q} - 1} da}{1 - 2a \cos \beta + a^2}$$

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{\operatorname{sen} i \beta}{p + iq} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{q} \int_0^1 \frac{a^{\frac{p}{q}} da}{1 - 2a \cos \beta + a^2}$$

cangiando β in β . Quindi possiamo esprimere in due maniere elegantissime le funzioni generatrici delle serie

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{\cos i \beta}{p + iq}, \quad \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{\operatorname{sen} i \beta}{p + iq}.$$

7.° Supponendo per un caso particolare $p=1$, $q=2$; $p=-1$,

$q=2$, si ha

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{\operatorname{sen} i\beta}{2i+1} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{2} \int_0^1 \frac{\sqrt{a} \, da}{1-2a \cos \beta + a^2}$$

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{\operatorname{sen} i\beta}{2i-1} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{2} \int_0^1 \frac{\frac{da}{\sqrt{a}}}{1-2a \cos \beta + a^2}$$

Di qui risulta

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} \left(\frac{1}{2i-1} + \frac{1}{2i+1} \right) \operatorname{sen} i\beta = \frac{\operatorname{sen} \beta}{2} \int_0^1 \left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} \right) \frac{da}{1-2a \cos \beta + a^2}$$

Poniamo adesso $a=y^2$, e verrà $da=2ydy$. Di qui risulta

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} \left(\frac{1}{2i-1} + \frac{1}{2i+1} \right) \operatorname{sen} i\beta = \operatorname{sen} \beta \int_0^1 \frac{(y^2+1) dy}{1-2y^2 \cos \beta + y^2}$$

Ma supponendo

$$y - \frac{1}{y} = z$$

si ottiene evidentemente

$$\begin{aligned} \int \frac{(y^2+1) dy}{1-2y^2 \cos \beta + y^2} &= \int \frac{\left(1 + \frac{1}{y^2} \right) dy}{y^2 + \frac{1}{y^2} - 2 \cos \beta} = \int \frac{dz}{z^2 + 2(1 - \cos \beta)} \\ &= \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \beta} \operatorname{arc} \left(\operatorname{tg} \frac{z}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \beta} \right) \end{aligned}$$

Laonde osservando che per $y=0$ si ottiene $z=-\infty$, e per $y=1$ si

ha $z=0$, e supponendo $=2\pi$ la circonferenza del cerchio di raggio $=1$, troveremo

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} \left(\frac{1}{2i-1} + \frac{1}{2i+1} \right) \operatorname{sen} i \varphi = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{2 \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}} \cdot \frac{\pi}{2},$$

ovveramente la nota formola

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{2}{\pi} \sum_{i=0}^{i=\infty} \left(\frac{1}{2i-1} + \frac{1}{2i+1} \right) \operatorname{sen} i \varphi,$$

essendo $\operatorname{sen} \varphi = 2 \cos \frac{1}{2} \varphi \operatorname{sen} \frac{1}{2} \varphi$.

S.^o Le formole sin qui dedotte possono applicarsi alla risoluzione d'importantissimi problemi di Analisi. Noi tra i molti scegliamo i seguenti.

a) Dimostrare che l'integrale definito

$$(8) \int_0^{\pi} \log (1 - 2a \cos \theta + a^2) d\theta = \begin{cases} 0 \\ 2\pi \log a \end{cases}$$

secondo che $a < 1$ ovvero > 1 .

Supponendo per brevità $p = \lambda y$ nella seconda delle (4) si ottiene primieramente

$$\operatorname{sen} \theta \int \frac{a^{\lambda} da}{1 - 2a \cos \theta + a^2} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{a^{i+\lambda} \operatorname{sen} i \theta}{i+\lambda} \quad (9)$$

Or si differenzi questa equazione rispetto ad a , e dopo di aver divisi i due membri del risultato per $a^{\lambda-1} da$, si moltiplichino per $d\theta$, e s'inte-

grino rispetto a θ : si avrà in seguito di queste operazioni

$$\log(1-2a\cos\theta+a^2)=C-2\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{a^i}{i}\cos i\theta \quad (10),$$

rappresentando C la costante arbitraria richiesta per completar l'integrale. Inoltre cambiando a in $\frac{1}{a}$ nella (9) si ha

$$\operatorname{sen} \theta \int \frac{a^{-\lambda} da}{1-2a\cos\theta+a^2} = -\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{a^{-(i+\lambda)} \operatorname{sen} i\theta}{i+\lambda},$$

dalla quale con lo stesso artificio testè adoperato si deduce

$$\log(1-2a\cos\theta+a^2)=C-2\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{a^{-i}}{i}\cos i\theta \quad (11).$$

Ma qui bisogna notare che le serie (10) ed (11) non sono due sviluppi della stessa funzione

$$\log(1-2a\cos\theta+a^2)$$

che possono adoperarsi indifferentemente per qualunque valore di a , perciocchè la prima riesce convergente solo quando $a < 1$, e l'altra quando $a > 1$. Laonde sarà

$$\log(1-2a\cos\theta+a^2)=C-2\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{a^{\pm i}}{i}\cos\theta \quad (12),$$

purchè si ritieni il segno superiore o l'inferiore secondo che $a < 1$ ovvero > 1 . Ponendo $\theta=0$ nella (12) risulta

$$\log(1-a)^2=C-2\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{a^{\pm i}}{i}=C+\log(1-a^{\pm 1})$$

Dunque per $a < 1$ si ha $C=0$, e per $a > 1$ si ha $C=2\log a$. Ciò posto, la (12) si traduce in

$$(13). \quad \log (1-2a \cos \theta + a^2) = \begin{cases} -2 \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{a^i}{i} \cos i \theta \\ 2 \log a - 2 \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\cos i \theta}{i a^i} \end{cases}$$

secondo che $a <$ ovvero > 1 . Moltiplicando questa equazione per $d\theta$, e poscia integrando fra i limiti $\theta=0$, $\theta=\pi$, si ottiene la proposta (8).

b) Si domanda lo sviluppo della funzione

$$(1-2a \cos \theta + a^2)^{-\frac{s}{2}}$$

in una serie ordinata per coseni dei multipli di θ , supposto $a < 1$, ed s un numero impari.

Dall'equazione (13), quando $a < 1$, si ricava

$$(1-2a \cos \theta + a^2)^{-\frac{s}{2}} = e^{\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{sa^i}{i} \cos i \theta};$$

onde sviluppando in serie l'esponenziale si ha

$$\begin{aligned} (1-2a \cos \theta + a^2)^{-\frac{s}{2}} &= 1 + s \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{a^i}{i} \cos i \theta + \frac{s^2}{1.2} \left(\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{a^i}{i} \cos i \theta \right)^2 \\ &\quad + \frac{s^3}{1.2.3} \left(\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{a^i}{i} \cos i \theta \right)^3 + \dots \dots \dots (14) \end{aligned}$$

Il problema dunque si riduce a trovare lo sviluppo della funzione

$$\psi_v = \left(\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{a^i}{i} \cos i \theta \right)^v = \log \left[(1-2a \cos \theta + a^2)^{-\frac{1}{2}} \right]^v$$

A questo effetto supponiamo

$$\Psi_{\nu} = \sum_{k=0}^{k=\infty} A_{\nu}^{(k)} \cos k\theta :$$

moltiplicando questa equazione per $\cos k\theta d\theta$, ed integrando fra i limiti $\theta=0$, $\theta=\pi$, avremo

$$A_{\nu}^{(k)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log_{\nu} \left[(1 - 2\cos\theta + a^2) \right]^{-\frac{1}{2}} \cos k\theta d\theta \quad (15).$$

Calcolando la tavola delle trascendenti (15), si avranno le serie che rappresentano i valori delle diverse potenze di

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{a^i}{i} \cos i\theta ;$$

ed il secondo membro della (14) si ridurrà in una serie, il cui termine generale è della forma

$$B \cos j\theta.$$

L'uso della trascendente (15) nello sviluppo della funzione

$$(1 - 2a \cos \theta + a^2)^{-\frac{s}{2}}$$

non era stato sinora indicato dai geometri.

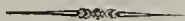


MISURE MICROMETRICHE

DI 127 STELLE DOPPIE E TRIPLE DEL CATALOGO DI STRUVE ,
FATTE NEGLI ANNI 1852-53-54-55

Dal socio corrispondente

ERCOLE DEMBOWSKI.



Il telescopio del quale mi sono servito è un rifrattore del celebre Plöul di Vienna : à cinque piedi di distanza focale, e cinque pollici d'obiettivo — ed è montato equatorialmente. Per le sue dimensioni , l'azione ottica di questo cannocchiale non lascia nulla a desiderare. L'atmosfera essendo favorevole si vedono le stelle perfettamente rotonde e definite , senza raggi o altre appendici. Come esempio della sua forza ottica , impiegando il massimo ingrandimento , che è di circa 300, le stelle A e B *Canceri* γ *Bootis*, ζ *Herculis* e molte altre di minore grandezza e di circa 1" di distanza , si vedono perfettamente separate. L'aeromatismo è eccellente. — Tutte le misure , senza eccezione alcuna, sono state prese col massimo ingrandimento anzidetto.

*

Questo stromento, essendo stato destinato ad un tutt'altro scopo, è sprovvisto di tutti gli accessorii indispensabili, o per lo meno necessari alle misure di Stelle Doppie. Cioè, manca del movimento a orologio, del circolo di posizione, e dell'apparato micrometrico particolarmente usato in questo genere di osservazioni. — Per conseguenza tutte le misure sono state prese a mano, vale a dire, conducendo colla mano la vite continua del Circolo orario per seguire il movimento diurno delle stelle — ciò che rende le osservazioni abbastanza difficili, e talvolta molto penose.

Micrometro — La scatola che lo contiene può muoversi circolarmente intorno all'asse ottico del cannocchiale. Il reticolo si compone di cinque fili verticali, tagliati orizzontalmente da un sesto — un settimo filo si muove parallelamente a quest'ultimo mediante una vite micrometrica, il cui tamburo è diviso in 100 parti, delle quali si può facilmente stimare i decimi ad occhio. Ogni rivoluzione del tamburo è $= 57''.233$, valore che è determinato mediante alcune centinaia d'osservazioni di α e λ *Ursae Minoris*. Una verifica in dettaglio del valore delle suddivisioni del tamburo, non è ancora ultimata.

Per la costruzione particolare del Micrometro, il suo uso per misurare le distanze *direttamente* è al massimo di facilità allorchè l'angolo di posizione si avvicina a 0° — 180° . All'incontro esse divengono molto difficili a prendersi quando l'angolo è 90° — 270° ; e questa difficoltà cresce colla distanza; perchè allora riesce impossibile di fissare le due stelle nello stesso istante. Quando la distanza oltrepassa $4''$, o $5''$ la bisezione non può più essere operata che per *visione laterale*. Per l'angolo di posizione à luogo il contrario. Allorchè è $= 90^\circ$ — 270° è molto facile di ben situare il Micrometro. Si mantiene con facilità la stella vicino al centro del campo e si à tutto il comodo di verificare il parallelismo tra la direzione delle due stelle, e li due fili equatoriali. Ma quando l'angolo di posizione è $= 0^\circ$ — 180° diventa alquanto difficile di mantenere le due stelle, alla distanza dal filo, convenevole per giudicare del più o meno di esattezza del parallelismo. Ciò non ostante, con un poco di pazienza e di abitudine credo d'aver sormontate, in parte almeno, queste difficoltà.

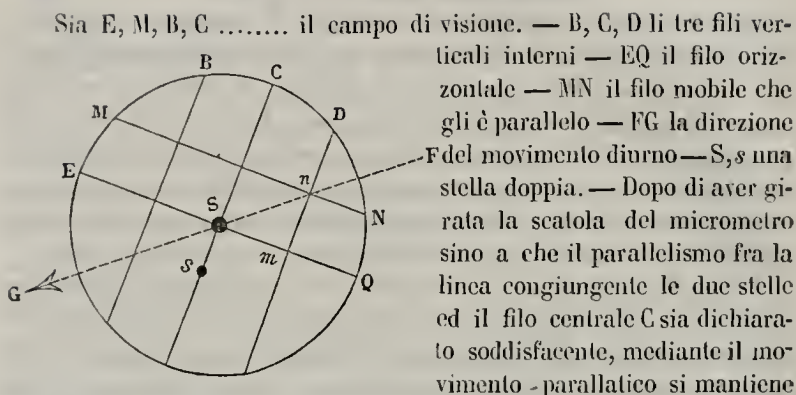
Illuminazione del campo — Questa non lascia nulla a desiderare. Meno due, o tre casi, mi sono costantemente servito d'una illu-

minazione azzurra ; con questa le stelle di 9^a grandezza di Struve , sono perfettamente visibili coll'intera luce. Ho preferito questo colore, alla luce gialla o rossa suggerita da Herschel II. Benchè queste possano offrire grandi vantaggi in alcuni casi , hanno però il difetto (almeno per me) di abbagliare e stancare l'occhio molto più prontamente : e quando , dopo di avere osservato per qualche tempo una stella che sopporta una viva illuminazione gialla o rossa, voglio osservarne una che non comporta che una debole luce , non vedo più nulla.

Distanze — Tutte senza eccezione sono state misurate *direttamente*. — Sopra 82 stelle nelle quali Struve non à riconosciuto alcun cambiamento sensibile di distanza , le mie misure sono nella media 0".08 più forti di quelle del Catalogo di Dorpat. Non mi sono mai servito d'una correzione d'indice : le distanze essendo state misurate alternativamente dalle due parti del filo fisso equatoriale , la semisomma delle due letture positiva e negativa , è difatto la distanza esente da correzione. Ognuna delle distanze (nessuna eccettuata) individuali citate nel prospetto , è la media di dieci distanze doppie prese nello stesso giorno , cinque delle quali col movimento ascendente , e cinque col movimento discendente della vite micrometrica ; e questo senza mai supporre all'elastico , il potere (che però possiede effettivamente) di distruggere la così detta *vite morta*. La bisezione è stata ottenuta aprendo o chiudendo lo spazio tra i due fili , poco a poco , ma sempre nello stesso senso ; e se talvolta la distanza è stata oltrepassata in più o in meno , la misura è stata invariabilmente ricominciata da capo.

La differenza tra le estreme delle dieci distanze prese nella stessa sera sorpassa molto di raro 0".5. Ma nelle misure avute in giorni diversi , le differenze sono più forti. In generale è rimarcato che le mie distanze sono più forti a misura che le condizioni atmosferiche sono più sfavorevoli. Quelle prese di giorno , o in buone circostanze sono quasi sempre più deboli , e si avvicinano maggiormente a quelle di Struve. — Nelle distanze maggiori di 10" è tenuto conto della correzione dovuta alla rifrazione.

Angoli di posizione — Il telescopio essendo provveduto d'un circolo di posizione , è avuto ricorso ad un mezzo tutto pratico , li cui risultati però si accordano abbastanza bene con quelli di Struve e di altri osservatori.



Sia E, M, B, C il campo di visione. — B, C, D li tre fili verticali interni — EQ il filo orizzontale — MN il filo mobile che gli è parallelo — FG la direzione del movimento diurno — S, s una stella doppia. — Dopo di aver girata la scatola del micrometro sino a che il parallelismo fra la linea congiungente le due stelle ed il filo centrale C sia dichiarato soddisfacente, mediante il movimento parallattico si mantiene una delle due stelle, per esempio S (ordinariamente la più grande delle due) sotto il filo D — e si porta il filo mobile MN al punto d'incontro n del filo D colla linea del movimento diurno FG — e si legge il micrometro. — Si ripete la stessa operazione sotto il filo C, in S. — La differenza tra le due letture del micrometro darà la lunghezza di mn in secondi d'arco. Dimodochè, il filo D essendo per costruzione perpendicolare al filo EQ, nel triangolo rettangolo Smn si conoscerà mn , ed Sm intervallo determinato dalle osservazioni anteriori. Se ne deduce l'angolo mSn , che applicato a $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ secondo la posizione delle due stelle relativamente alla linea del movimento diurno, darà l'angolo di posizione richiesto.

Le piccole inesattezze nella determinazione del punto d'intersezione n vengono ad essere interamente eliminate dal numero delle misure — perchè ad ogni singolo angolo di posizione misuro il lato mn due volte — una col movimento discendente, ed una col movimento ascendente della vite micrometrica, e senza tener conto dell'elastico; precisamente come nella misura delle distanze. E siccome ogni angolo di posizione citato nel prospetto è il medio di *cinque* presi nella stessa sera, ne segue che il punto d'intersezione n viene ad essere determinato dieci volte, ciocchè rende superflua qualunque correzione, che d'altronde non porterebbe che sui centesimi di grado.

Come è detto, ogni angolo di posizione del prospetto è il medio di cinque presi nella stessa sera (meno un piccolo numero di eccezioni nelle prime stelle che ò osservate, e che sono specificate nelle no-

te). Gli angoli presi nella stessa sera sono interamente indipendenti uno dall'altro, cioè che dopo la misura d'ogni angolo, il micrometro è stato interamente sportato, ed il parallelismo operato di nuovo. Ogni posizione è stata verificata almeno tre volte, e raramente più di cinque. Se dopo cinque o sei verificazioni, il parallelismo non è dichiarato soddisfacente, sposto il micrometro e comincio da capo. Ho rimarcato che al di là di questo numero di verificazioni mi si forma una confusione e non so più a che attenermi, quindi meglio ricominciare. Ho inoltre procurato di mettere un sensibile intervallo di tempo tra due verificazioni consecutive del parallelismo, a fine di distruggere per quanto è possibile quella specie di pregiudizio che si forma nell'occhio a nostra insaputa.

Per maggior comodo, una piccola tavola avente per argomento il lato *mn* dato dal micrometro, dà a vista gli angoli corrispondenti da 0° a 50° . — Al di là dei 50° sono obbligato d'invertire il micrometro; giacchè allora la linea del movimento diurno fa un angolo troppo acuto coi fili, ed il punto d'intersezione *n* avendo luogo troppo vicino all'orlo del campo, l'immagine non è più così bene definita.

Avendo dovuto cambiare i fili del reticolo per metterli maggiormente in relazione con questo modo di osservare, sono stato abbastanza fortunato per metterli quasi esattamente perpendicolari al filo fisso equatoriale — Le inclinazioni dei tre fili interni B,C,D determinate mediante un gran numero di osservazioni, sono rispettivamente $= 0^\circ.22$; $0^\circ.10$; $0^\circ.02$. In un piccolo numero di casi nei quali sul principio mi sono servito dell'intersezione sotto il filo B, ò tenuto conto della sua inclinazione. — La grossezza dei fili di cui mi sono servito è $= 0''.7$.

L'intersezione sotto il filo centrale C non è sempre operata esattamente nel centro del campo: ma, secondo l'apertura dell'angolo da misurare, procuro che abbia luogo il più vicino possibile a quel punto.

La verificazione del parallelismo tra la congiungente le due stelle, ed uno dei fili è stata fatta in due modi. — Il primo, *dalle due parti d'un solo filo* — e questa mi è sempre possibile. — Il secondo (del quale a motivo della costruzione particolare del micrometro non

posso servirmi che per gli angoli di posizione compresi fra 40° — 130° , e 220° — 320°) mettendo *le due stelle tra due fili paralleli* aperti ad una distanza convenevole. — Allorchè la distanza è maggiore di $10''$ faccio una terza verificaione, ponendo le due stelle *sotto un solo filo*. — La mancanza del movimento a orologio, e del circolo di posizione, e la difficoltà di mantenere colla mano le due stelle nel ristretto spazio contenuto dai due fili paralleli, mi hanno obbligato a non servirmi esclusivamente di questo metodo, che d'altronde credo il più sicuro, quando lo stromento è convenevolmente montato.

Nell'operare il parallelismo è seguita religiosamente la prescrizione data da Struve: cioè è invariabilmente tenuto il capo *verticale*. Devo dire però, che in alcuni casi, quando la congiungente fa un angolo di più di 30° col verticale che passa per l'asse ottico del telescopio, è provata la verificaione del parallelismo nelle tre differenti posizioni del capo; cioè *verticale*, *perpendicolare* alla congiungente, e *parallelo* alla stessa. In generale non mi sono mai accorto di differenze sensibili. Ma in alcuni casi, per esempio α *Geminorum* all'oriente del meridiano (l'angolo fra la congiungente ed il verticale essendo circa 45°) è trovato delle differenze fortissime: cosicchè sono sempre stato ricondotto alla regola data da Struve.

Ho stimato che non è superfluo di unire ad ogni angolo di posizione, l'angolo formato dalla congiungente le due stelle, col verticale che passa per l'asse ottico del cannocchiale: angolo che nel prospetto è registrato nella colonna I. Per facilitarne l'intelligenza è preferito di specificare se l'angolo è a *dritta* o a *sinistra* del verticale, è ciò che indicano le iniziali D.S. L'angolo I è contato da 0° a 90° , partendo dal verticale, di 10° in 10° . — Come si può vedere in ζ *Ursae majoris*, η *Hereulis*, ζ *Hereulis* ed altri, tra 20° e 70° d'inclinazione, è la tendenza ad *avvicinare la congiungente al verticale*. Questa specie di aberrazione, se si può chiamarla così, è stata rimarcata anche da Struve, e nello *stesso senso*. Sembra dunque non essere un difetto individuale. Peraltro è rimarcato che questa aberrazione è più forte nelle prime osservazioni che in quelle fatte posteriormente. Il numero d'osservazioni utili è ancora troppo ristretto per poter dedurre una legge probabile, e la correzione conseguente.

Attribuzione dei pesi — Sino in luglio 1854, li pesi attribuiti

rappresentano il grado di soddisfazione prodotto dall' assieme dell' osservazione , *dopo terminata* : ed in questi le condizioni atmosferiche danno una gran parte. — Dipoi è addottata la regola data da Herschel II ; cioè , è attribuito un peso ad ogni misura individuale sia di posizione , sia di distanza , *prima* della lettura. La scala è da 1 a 10 — La somma dei pesi parziali costituisce il peso totale attribuito ad ogni misura del prospetto. — Ma malgrado la cura che è procurato di porvi , e specialmente sul principio , trovo di aver dati dei pesi pressochè eguali , a quantità molto diverse , e viceversa. In seguito , avendo acquistata un poco d' esperienza , sono diventato più parco , e nelle misure posteriori regna un poco più di coerenza .

Per rendere le osservazioni paragonabili fra loro , ho pensato che l' attribuzione d' un peso , non è sempre sufficiente. Bisogna che anche il *numero* delle misure sia , per quanto è possibile , lo stesso in ogni osservazione. Come in tutto ciò che dipende dai nostri sensi , una osservazione alla quale a ragione del numero di misure individuali , o di circostanze favorevoli , si è attribuito un forte peso , può a nostra insaputa essere influenzata da un errore dipendente dalla disposizione momentanea dell' occhio : disposizione che può benissimo non aver luogo in un' altra osservazione. — In alcuni rari casi nei quali non è potuto riunire le 10 distanze , e le 5 posizioni nella stessa sera , è completato questo numero mediante misure prese a pochi giorni d' intervallo.

Grandezze , e colori — Le grandezze risultano in generale un poco minori di quelle assegnate da Struve. Pei colori , in molti casi mi trovo d' accordo con quelli dati dal Catalogo di Dorpat — ma in molti altri differisco , e non di poco. Questo dipende da varie cause. A parte i colori che possono essere variabili , il cannocchiale in se stesso , le condizioni dell' atmosfera , la disposizione particolare dell' occhio , e la mancanza del movimento a orologio che non permette di considerare a tutt' agio , possono tutti esercitare una grande influenza.

S. Giorgio — maggio 1855

MISURE MICROMETRICHE DI 127 STELLE DOPPIE E TRIPLE

n° STRUVE	NOME	Epoca	Distanza	Peso	Posizione	Peso	I	Grandezze, Colori e Note
12	35 Piscium	1852.765	11.36	10	147.4	2	0°	D {A=5.4 bianco giallo chiaro B=7.4 cinerea S {A=6.2 B=7.8} bianche Struve sospetta un lieve incremento di distanza
		1854.732	11.47	29	149.1	16	50 D	
		» 748	11.45	55	148.8	25	60 D	
		» 836	11.34	66	148.5	41	10 S	
		» 913	11.12	22	149.7	33	60 D	
		» 935	11.56	57	149.5	44	30 D	
		Medio 1854.73	11.415	»	149.07	»	»	
		Struve 1836.74	11.655	»	149.35	»	»	
		» 1832.67	11.534	»	149.87	»	»	
		» 1821.91	11.28	»	151.10	»	»	
		Herschel I 1783.50	12.50	»	148.90	»	»	
22	38 Piscium	1852.776	4.72	60	236.6	12	90	* Grandezze e colori non notati S {A=7.0 giallo chiaro B=7.8 azzurro chiaro Ogni posizione è la media di due nella stessa sera. Struve opina essere nullo il movimento, per un secondo angolo di Herschel I nel 1802 e 234°. 45 differisce di poco dalle misure posteriori
		» 814	4.70	70	235.9	14	90	
		» 820	4.67	100	234.6	20	90	
		» 836	4.43	90	235.9	18	90	
		» 842	4.58	40	235.6	8	90	
		Medio 1852.82	4.615	»	235.62	»	»	
		Struve 1836.24	4.590	»	237.65	»	»	
		Herschel I 1782	»	»	244.95	»	»	
24	Andromedae 69	1852.754	5.25	20	250.8	4	60 D	D {A=7.5 B=8.5} ambe verde chiaro S {A=7.2 B=8.0} ambe bianche Le prime cinque posizioni sono le medie di due prese nella stessa sera. Le tre rimanenti sono le medie di cinque nella stessa sera
		» 762	5.17	30	249.3	6	60 D	
		» 787	5.23	10	247.0	2	60 D	
		» 811	5.15	60	248.2	12	60 D	
		» 814	5.13	100	246.0	20	60 D	
		» 847	»	»	246.7	48	60 D	
		» 855	»	»	247.4	100	60 D	
		1854.811	5.47	54	246.3	45	10 S	
		Medio 1853.05	5.218	»	247.08	»	»	
		Struve 1831.11	5.197	»	248.35	»	»	
60	η Cassiopejae	1854.707	7.81	70	111.5	43	10 S	D {A=3.4 giallo chiaro B=7.6 rosso violetto S {A=4.0 gialla B=7.6 purpurea
		» 718	7.97	70	111.3	46	0	
		» 757	7.91	33	110.8	32	20 S	
		» 935	7.79	62	111.2	49	0	
		1855.061	7.87	42	112.7	28	10 S	
		» 083	7.88	82	112.9	32	10 S	
		» 111	7.74	89	112.9	45	0	
		Medio 1854.91	7.844	»	111.85	»	»	

FATTE NEGLI ANNI 1852 — 53 — 54 — 55.

NOME	Epoca	Distanza	Peso	Posizione	Peso	I	Grandezze, Colori e Note
η Cassiopejæ	1854.91	7.844	»	111.85	»	»	Il movimento negativo in Distanza, e positivo in angolo, è notorio. Le differenze tra le mie e le misure anteriori, sono nel senso voluto.
Miller	1851.89	8.122	»	106.90	»	»	
Smith	1843.19	9.100	»	95.80	»	»	
Struve	1836.74	9.395	»	92.12	»	»	
»	1835.26	9.520	»	91.23	»	»	
65 Piscium	1854.746	4.63	22	297.7	13	60.S	D(A=6.1 bianco cinereo B=6.3 cinerea S(A=6.0)ambe giallo chiaro B=6.0) Struve è d'opinione che non si conferma il movimento indiretto supposto da Herschel II. Sembra che l'angolo pel 1783 sia un poco in errore.
»	751	4.71	42	297.8	44	70.S	
»	768	4.94	44	298.0	30	60.S	
»	820	4.69	36	297.5	17	60.S	
Medio	1854.77	4.759	»	297.80	»	»	
Struve	1832.13	4.450	»	298.97	»	»	
Dawes	1830.91	4.429	»	297.65	»	»	
Herschel II e South	1822.86	»	»	295.80	»	»	
Herschel I	1802.61	»	»	297.36	»	»	
»	1783.15	»	»	300.95	»	»	
Ceti 160	1854.622	4.21	68	324.8	31	30.D	D(A=7.1 bianca B=8.4 cinerea S(A=6.7 giallo chiaro B=7.5 bianca
»	705	3.94	82	322.1	46	60.D	
»	984	3.98	76	323.4	44	30.D	
Medio	1854.77	4.037	»	323.27	»	»	
Struve	1831.89	3.860	»	328.83	»	»	
5 Anonima	1852.844	4.74	60	327.4	12	10.D	D(A=7.4 B=7.9)colori non notati S(A=7.5 B=7.9)bianche Le prime cinque posizioni sono le medie di due prese nella stessa sera. Le rimanenti tre sono le medie di cinque nella stessa notte.
»	858	4.55	50	326.7	6	10.S	
»	874	4.61	90	325.9	18	10.S	
»	883	4.55	20	326.2	4	10.S	
»	929	4.46	80	325.4	16	0	
»	1854.746	4.72	21	330.6	29	30.D	
»	759	4.86	41	328.3	33	0	
»	926	»	»	329.2	40	20.D	
Medio	1853.60	4.621	»	328.20	»	»	
Struve	1830.60	4.600	»	332.82	»	»	
70 Anonima	1854.612	3.18	50	217.7	25	10.S	D(A=7.7 bianca B=8.7 bianca S(A=6.7 bianco giallo chiaro B=7.5 bianco azzurro chiaro
»	614	3.23	30	216.0	13	20.S	
»	625	3.79	40	216.9	25	20.S	
»	633	3.73	28	218.2	19	40.S	
»	636	3.79	16	217.3	21	10.S	
Medio	1854.62	3.493	»	217.28	»	»	
Struve	1830.86	3.176	»	216.80	»	»	

MISURE MICROMETRICHE DI 127 STELLE DOPPIE E TRIPLE

N° STRUVE	NOME	Epoca	Distanza	Peso	Posizione	Peso	I	Grandezze, Colori e Note
174	P. I. ^b 179	1854.617	3.17	53	167.2	42	40.5	D {A=6.4 bianca B=7.5 azzurro chiaro S {A=6.2 aurea B=7.4 azzurro decisivo
		» 780	2.93	77	167.8	22	40.8	
		» 806	3.07	59	168.2	28	70.0	
		» 836	2.94	86	167.4	39	60.0	
		» 884	2.98	61	170.4	43	50.0	
	Medio	1854.78	3.000	»	168.24	»	»	
	Struve	1830.73	2.567	»	170.52	»	»	
179	Audromedae 241	1854.820	3.63	47	159.9	26	90	D {A=7.5 }bianche B=8.5 } S {A=6.7 }bianche B=7.7 }
		» 921	3.96	53	159.5	40	90	
	Medio	1854.87	3.808	»	159.66	»	»	
	Struve	1831.04	3.460	»	160.42	»	»	
180	γ Arietis	1852.032	8.85	50	360.00	5	50.0	D {A=4.5 }bianche B=4.6 } S {A=4.2 }bianchissime B=4.4 } Struve dice esservi nulla di certo ecc movimento.
		» 053	8.65	50	360.00	5	50.0	
		1854.831	8.74	10	360.5	15	40.0	
		» 959	8.60	41	358.8	46	0.	
	Medio	1853.47	8.709	»	359.33	»	»	
	Struve	1830.84	8.631	»	359.98	»	»	
	Herschel II	1829.82	9.007	»	178.98	»	»	
202	α Piscium	1854.099	3.51	90	326.1	12	80.0	D {A=4.2 bianca B=6.0 bianco cinereo S {A=2.8 bianco verde chiaro B=3.9 azzurra La grandezza da me assegnata alla stella deve certamente essere erronea. Struve opina essere quasi nullo il movimento, e la distanza data da Herschel II è molto lontana dal vero.
		» 101	3.61	100	330.5	20	40.0	
		» 184	3.52	40	327.3	20	80.0	
		» 187	3.56	100	326.3	50	80.0	
		» 190	3.53	100	326.2	35	80.0	
		» 970	3.81	50	328.6	43	20.0	
		1855.061	3.82	53	330.1	34	30.0	
		» 064	3.76	41	328.8	43	20.0	
	Medio	1854.44	3.612	»	327.99	»	»	
	Dawes	1832.88	3.756	»	332.01	»	»	
	Struve	1831.16	3.636	»	335.72	»	»	
		» 1821.96	3.94	»	336.93	»	»	
	Herschel II e South	1821.93	5.43	»	335.55	»	»	
	Herschel I	1802.08	»	»	333.00	»	»	
	»	1781.79	»	»	337.39	»	»	

FATTE NEGLI ANNI 1852 — 53 — 54 — 55.

VE	NOME	Epoca	Distanza	Peso	Posizione	Peso	I	Grandezze, Colori e Note
31	γ Andromedae							
	$A = \frac{B+C}{2}$	1854.806	10.53	78	63.1	34	10.D	$D \begin{cases} A=2.4 \text{ aurea} \\ B+C=6.0 \text{ oltremare, certi} \end{cases}$ $S \begin{cases} A=3.0 \text{ aurea} \\ B=5.0 \text{ azzurra, decisivi} \end{cases}$
	»	839	10.51	94	63.2	50	10.D	
	»	888	10.38	96	63.3	49	10.D	
		1855.064	10.46	80	63.4	45	20.D	
	»	116	10.54	83	63.1	46	20.D	
	Medio	1854.94	10.481	»	63.23	»	»	La stella B nel catalogo di Dorpat è semplice. Al mio occhio nell'epoca presente, è certamente oblunga. Non sono però sicuro se la posizione di B—C sia 270°.20 oppure 94°.20. Se B è composta di due, a quest'ora sarà certamente stata veduta tale da Struve. — Egli è d'opinione essere nullo il movimento dal tempo di Herschel I.
	Dawes	1832.94	10.63	»	64.05	»	»	
	Struve	1830.02	10.332	»	62.44	»	»	
	B—C	1854.811	Oblunga	»	92.7	33	10.S	
	»	839	Gauciforme	»	280.0	31	10.S	
	»	888	idem	»	270.8	35	10.S	
		1855.064	idem	»	275.6	28	10.S	
	»	116	idem	»	272.4	28	10.S	
	Medio	1854.94	»	»	274.20	»	»	
2	ϵ Trianguli	1854.644	3.88	38	78.9	34	40.D	$D \begin{cases} A=5.5 \text{ giallo chiaro} \\ B=6.7 \text{ oliva cinerea} \end{cases}$ $S \begin{cases} A=5.0 \text{ gialla} \\ B=6.4 \text{ azzurra} \end{cases}$
	»	647	3.90	61	78.7	39	40.D	
	»	718	3.76	43	76.9	46	20.D	
	»	783	3.50	46	74.8	14	20.S	
	»	798	4.00	29	74.6	18	20.S	
	»	896	4.07	89	75.8	48	20.S	Struve nelle sue misure sino al 1830 opinava esservi un movimento angolare negativo; che poi non viene confermato da quelle fatte nel 1836.
		1855.153	4.16	37	76.5	40	20.S	
	Medio	1854.81	3.907	»	76.89	»	»	Frattanto la serie degli angoli dal 1781 al 1836 è troppo discorde per poter decidere se vi sia un movimento.
	Struve	1836.73	3.683	»	80.53	»	»	
	»	1830.97	3.598	»	77.86	»	»	
	»	1822.11	»	»	74.00	»	»	
	Herschel II e South	1821.94	3.88	»	77.97	»	»	
	Herschel I	1781.77	»	»	85.62	»	»	
31	66 Ceti	1854.768	15.56	57	228.1	36	40.S	$D \begin{cases} A=5.4 \text{ bianca} \\ B=7.5 \text{ azzurra} \end{cases}$ $S \begin{cases} A=6.0 \text{ giallo chiaro} \\ B=7.8 \text{ azzurra} \end{cases}$
	»	792	15.25	56	229.6	33	10.S	
	»	815	15.24	77	229.6	37	20.S	
	»	836	15.25	72	229.4	40	90—	
	»	932	15.50	77	229.2	34	80.S	
	Medio	1854.83	15.360	»	229.17	»	»	Struve mette fuori di dubbio il movimento angolare; ma ritiene meno certa la diminuzione nella distanza, avendo minore fiducia nelle sue misure del 1821, e 1822.
	Struve	1836.82	15.350	»	229.71	»	»	
	»	1832.61	15.540	»	228.92	»	»	
	»	1822.89	15.59	»	226.09	»	»	
	»	1821.00	15.58	»	225.75	»	»	

MISURE MICROMETRICHE DI 127 STELLE DOPPIE E TRIPLE

N° STRUVE	NOME	Epoca	Distanza	Peso	Posizione	Peso	l	Grandezze, Colori, e Note
262	α Cassiopeiae		Bene separata					
	A—B	1854.754	»	»	263.6	26	0.—	D { A=5.1 bianca B=7.7 azzurra
		» 814	»	»	262.5	46	10.S	{ C=8.7 rosso violetto
		» 839	»	»	267.4	18	20.D	{ A=4.2 gialla
		» 907	»	»	266.8	40	20.D	S { B=7.1 azzurra
		1855.091	»	»	267.4	32	20.D	{ C=8.1 azzurra
	Medio	1854.88	»	»	265.25	»	»	Struve suppone un lento movimento fra A—B
	Struve	1829.66	1.862	»	276.68	»	»	Nulla più di certo fra A—C.
	Herschel I	1782.44	»	»	290.5	»	»	Nella posizione fra A—B la differenza è nel senso voluto.
	A—C	1854.754	8.05	74	108.1	42	10.S	
		» 814	7.49	87	107.1	47	50.S	
		» 839	7.81	36	109.2	44	0.—	
		» 907	7.73	66	109.9	42	0.—	
		1855.091	7.91	34	109.8	38	10.D	
	Medio	1854.88	7.770	»	108.76	»	»	
	Struve	1829.85	7.626	»	107.30	»	»	
	Herschel I	1804	»	»	108.95	»	»	
	»	1782	»	»	100.6	»	»	
299	γ Ceti	1854.888	2.70	90	285.7	47	80.S	D { A=3.2 bianca
		» 970	3.12	63	286.7	33	90.—	{ B=7.1 olivastro
		1855.078	2.88	64	287.2	29	80.S	S { A=3.0 giallo chiaro
		» 130	3.04	46	287.4	22	90.—	{ B=6.8 cinerea
		» 154	2.88	67	289.1	50	90.—	
		» 170	»	»	289.0	24	70.S	Benchè le osservazioni del 1825 siano tutte anteriori alle precedenti, non sono certe delle posteriori, Struve dice che è probabile un movimento angolare.
	Medio	1855.06	2.899	»	287.47	»	»	
	Struve	1836.74	2.675	»	289.20	»	»	
	»	1832.48	2.590	»	287.36	»	»	
	»	1825.63	2.835	»	283.2	»	»	
341	Persei 85	1855.061	Bene separata	»	295.7	29	10.S	D { A=7.6 } bianche
		» 116	idem	»	295.2	27	20.S	{ B=8.2 }
		» 201	idem	»	297.2	17	30.S	S { A=6.9 } bianche
	Medio	1855.13	»	»	295.86	»	»	{ B=7.1 }
	Struve	1830.46	1.457	»	295.45	»	»	
	Herschel I	1804.18	»	»	290.57	»	»	Struve suppone esservi un movimento angolare diretto.
	»	1782.63	»	»	278.40	»	»	

FATTE NEGLI ANNI 2852 — 53 — 54 — 55.

NOME	Epoca	Distanza	Peso	Posizione	Peso	I	Grandezze, Colori e Note
ε Arietis	1854.814	Cunei- forme	»	202.1°	23	20.D	D=A+B=6.0+7.0 bianco azzurro chiaro S {A=5.7 }bianche {B=6.0 }
»	836	»	»	203.3	26	20.D	
»	918	»	»	203.3	27	20.D	
»	970	»	»	202.9	37	10.D	
»	1855.130	»	»	203.2	22	10.D	
Medio	1854.93	»	»	203.35	»	»	Se la mia posizione non è erronea sembra esservi un movimento retrogrado di circa 14° in 25 anni.
Struve	1830.16	0.547	»	188.87	»	»	
Anonima	1852.946	6.91	100	159.6	20	30.S	D {A=7.1 bianca B=8.2 azzurro chiaro S {A=7.0 giallo chiaro B=8.0 azzurro chiaro
»	1854.929	6.91	45	161.1	31	70.D	
»	1855.135	6.75	47	160.1	42	70.D	
Medio	1854.34	6.871	»	160.32	»	»	
Struve	1828.74	6.693	»	163.27	»	»	
Anonima	1854.844	11.18	59	270.6	31	30.D	D {A=6.2 }giallo chiaro {B=7.0 }bianche S {A=6.5 }bianche {B=7.0 }
»	1854.967	11.44	56	270.0	41	30.D	
Medio	1854.90	11.307	»	270.24	»	»	
Struve	1830.96	11.120	»	270.02	»	»	
»	»	»	»	»	»	»	
Anonima	1854.836	3.02	34	282.7	41	10.D	D {A=7.2 }bianche {B=7.2 } S {A=7.3 }bianchissime {B=7.3 }
»	886	2.95	58	282.3	31	10.D	
Medio	1854.86	2.971	»	102.53	»	»	
Herschel II	1831.27	3.001	»	103.07	»	»	
Dawes	1830.82	2.99	»	102.95	»	»	
Struve	1830.16	2.873	»	104.60	»	»	Herschel II e South Herschel I
Herschel II e South	1823 »	3.45	»	103.73	»	»	
Herschel I	1782.68	»	»	98.4	»	»	
1 Camelopardali	1854.713	10.02	41	306.5	24	40.S	D {A=5.2 dubbio fra verde ed azzurro B=6.6 rosa pallido S {A=5.1 bianca B=6.2 bianco azzurro chiaro
»	844	10.13	72	307.5	40	50.S	
»	954	10.28	53	307.9	41	45.D	
Medio	1854.84	10.151	»	307.43	»	»	
Dawes	1832.90	10.655	»	307.10	»	»	
Struve	1830.57	10.133	»	307.07	»	»	Herschel I
Herschel I	1795.22	»	»	309.85	»	»	

MISURE MICROMETRICHE DI 127 STELLE DOPPIE E TRIPLE

N ^o STRUVE	NOME	Epoca	Distan- za	Peso	Posi- zione	Peso	1	Grandezze, Colori e Note
366	2 Camelopardali	1854.921	Bene separate	»	300.9 ^o	41	20.S	D { A=5.7 bianca B=8.6 cinerea S { A=5.1 giallo B=7.4 azzurro chiaro
		» 958	»	»	301.9	14	30.S	
		» 989	»	»	303.1	19	30.S	
		1855.069	»	»	301.6	16	30.S	
		» 078	»	»	304.0	12	45.S	
		» 141	»	»	302.5	47	20.S	
	Medio	1855.03	»	»	302.10	»	»	Struve non emette opinione alcuna sul mo- vimento. Se la mia posizione non è errone- samente sembrerebbe esservi una diminuzione nell' an- golo, che già risulta dalle misure anteriori.
	Dawes	1833.90	1.93	»	307.08	»	»	
	Struve	1829.79	1.585	»	311.40	»	»	
716	118 Tauri	1851.997	5.06	70	»	»	»	D { A=4.4 verde B=7.0 cinerea S { A=5.8 bianca B=6.6 bianco azzurro chiaro
		1852.039	5.05	80	»	»	»	
		» 053	4.91	60	»	»	»	
		» 067	4.88	20	»	»	»	
		» 069	4.83	80	»	»	»	
		» 193	4.90	40	»	»	»	
		» 223	5.05	50	»	»	»	Struve dice esser nullo il movimento.
		» 264	4.92	50	»	»	»	
		» 272	4.92	60	»	»	»	Questa è la prima stella doppia sulla qual mi provai ad osservare. Tutti gli angoli pre- dal 1851. 997 al 1852, 283 li ò rigettati.
		» 283	4.99	70	»	»	»	
		1854.748	4.73	23	196.9	25	70.S	Vedasi in seguito nelle <i>Misure Rigettate</i> .
		» 757	4.89	67	197.9	44	70.S	
		» 792	4.79	73	197.2	41	70.S	
		» 913	4.71	51	197.6	21	70.S	
	Medio	1852.90	4.915	»	197.47	»	»	
	Dawes	1832.92	5.148	»	196.26	»	»	
	Struve	1829.63	4.894	»	196.78	»	»	
742	Tauri 380	1855.116	3.46	52	251.7	34	20.S	D { A=7.1 cinerea, ma dubbio B=8.6 S { A=7.2 giallo chiaro B=7.8 bianca
		» 147	3.79	85	252.2	33	20.S	
		» 173	3.60	59	251.4	17	20.S	
		» 201	3.77	44	251.5	37	20.S	
	Medio	1855.16	3.668	»	251.73	»	»	
	Struve	1837.10	3.325	»	251.10	»	»	
	Dawes	1831.17	3.15	»	247.92	»	»	Struve ritiene fortemente probabile un mo- vimento angolare positivo. È molto facile che la mia posizione sia troppo debole, quantun- que identica all'ultima osservata da Struve.
	Struve	1830.22	3.313	»	246.23	»	»	
	Herschel II	1820.99	3.49	»	246.87	»	»	
	South	1825.03	2.97	»	248.35	»	»	
	Struve	1822.25	»	»	246.35	»	»	
	Herschel I	1782.26	»	»	233.6	»	»	

FATTE NEGLI ANNI 1852 — 53 — 54 — 55.

N° STRUVE	NOME	Epoca	Distanza	Peso	Posizione	Peso	I	Grandezze, Colori e Note
752	1 Orionis	1854.918	11".27	88	142.0°	39	60.D	<p>D { A=3.0 bianca B=7.0 azzurro cinerea S { A=3.2 bianco giallo chiaro B=7.3 azzurro chiaro</p> <p>Struve dice che se l'angolo di Herschel 1 è esatto, si può credere ad un movimento.</p>
		1855.239	"	"	144.1°	21	60.D	
		1855.08	11.27	"	142.73	"	"	
		1831.86	11.320	"	142.17	"	"	
		1781. "	"	"	133.85	"	"	
774	2 Orionis	1854.198	2.44	50	"	"	"	<p>D { A=2.0 bianca B=5.2 oliva cinerea S { A=2.0 giallo verde B=5.0 azzurra</p> <p>Dall'incremento sulle sue distanze Struve opina che nel 1782 al tempo di Herschel 1 questa stella fosse semplice. Questa è anche l'opinione di Herschel 11. L'osservazione pel 1855. 173 è stata fatta in circostanze straordinariamente favorevoli, col Sole alto 15°, la stella essendo circa 2.^b 30^m all'Oriente.</p>
		" 215	2.26	80	152.0	20	40.D	
		" 223	2.23	60	151.2	10	40.D	
		" 228	2.35	50	151.2	25	40.D	
		" 231	2.45	100	153.3	40	50.D	
		" 234	"	"	151.5	25	50.D	
		1855.173	2.66	91	149.3	53	0 —	
		" 206	"	"	150.1	40	10.D	
		" 283	2.61	80	151.8	30	60.D	
	Medio	1854.56	2.446	"	151.12	"	"	
	Struve	1836.22	2.550	"	151.34	"	"	
	Dawes	1832.56	3.00	"	148.38	"	"	
	Herschel II	1831.97	2.808	"	151.52	"	"	
	Struve	1831.22	2.347	"	151.30	"	"	
	"	1825.20	2.338	"	153.30	"	"	
	"			"		"	"	
919	11 Monocerotis							<p>Non ne ho notate le grandezze.</p> <p>Il colore di tutte tre, mi è sembrato sempre bianco.</p> <p>S { A=5.0 B=5.5 C=6.0 } tutte bianche</p> <p>Struve dice essere nullo il cangiamento in questo sistema dal tempo di Herschel 1.</p>
	A—B	1854.090	7.48	80	130.1	40	70.D	
		" 188	7.59	40	130.8	20	50.D	
		" 213	7.57	20	131.3	35	70.D	
		" 229	7.14	60	132.7	40	60.D	
		" 241	7.17	30	131.4	15	50.D	
	Medio	1854.19	7.379	"	131.31	"	"	
	Struve	1831.23	7.253	"	130.00	"	"	
	B—C	1854.079	2.67	50	102.3	50	80.S	
		" 190	2.60	50	100.2	25	90 —	
		" 213	2.23	100	102.5	15	80.S	
		" 229	2.58	60	101.5	50	90 —	
		" 241	2.75	100	101.6	50	90 —	
	Medio	1854.19	2.548	"	101.63	"	"	
	Struve	1831.23	2.463	"	101.73	"	"	

MISURE MICROMETRICHE DI 127 STELLE DOPPIE E TRIPLE

N° STRUVE	NOME	Epoca	Distanza	Peso	Posizione	Peso	l	Grandezze, Colori, e Note
919	11 Monocerotis Seguito A—C	1854.138 » 190 » 213 » 229 » 243 » 267 Medio 1854.21	» 9.92 10.02 9.48 9.47 9.57 9.655	» 50 40 60 100 100 »	122.5 ⁰ 122.3 123.4 123.4 122.9 » 122.89	30 25 15 45 50 » »	80.D 80.D 80.D 70.D 60.D » »	
	Struve non à date misure fra A e C.							
918	12 Lyncis A—B	1854.918 1855.111 » 163 » 291 Medio 1855.12 Struve 1831.10 » 1821.32 Herschel I 1782.37	Bene separate » » » » 1.532 » »	» » » » » » » »	141.4 139.4 141.4 142.3 141.15 153.66 159.70 181.38	46 31 33 30 » » » »	20.S 20.S 10.S 45.S » » » »	D { A=6.0 bianca B=7.0 bianca C=7.9 azzurro cinereo S { A=5.2 } bianco verde chiaro B=6.1 } C=7.4 azzurro chiaro
	A—C	1854.918 1855.111 » 163 » 291 Medio 1855.12 Struve 1831.10 » 1821.32 Herschel I 1782.37	8.34 8.60 8.20 8.36 8.394 8.670 » 9.38	66 83 61 48 » » » »	306.8 307.0 306.1 306.8 306.67 304.20 304.20 302.55	45 41 42 35 » » » »	10.S 20.S 0— 45.S » » » »	Struve accenna certissimo il movimento fra A—B, e nullo quello fra A e C. Nella posizione fra A e B la mia differenza sarebbe nel senso voluto.
982	38 Geminorum	1854.272 » 275 » 291 » 324 » 338 » 806 » 888 Medio 1854.46 Struve 1829.24 » 1820.22 Herschel I 1783	6.26 6.24 6.26 5.92 6.10 5.81 5.94 6.073 5.736 » »	100 100 20 100 10 43 76 » » » »	169.7 169.2 169.1 167.6 168.6 166.7 167.4 168.36 174.88 176.30 179.90	50 50 10 50 5 19 49 » » » »	40.D 40.D 50.D 60.D 60.D 30.S 20.D » » » »	D { A=5.5 gialla B=8.0 purpurea, certo S { A=5.4 giallo chiaro B=7.7 azzurro chiaro Struve suppone un movimento indiretto. La differenza nella mia posizione sarebbe nel senso voluto.

FATTE NEGLI ANNI 1852 — 53 — 54 — 55.

N ^o STRUVE	NOME	Epoca	Distanza	Peso	Posizione	Peso	I	Grandezze, Colori e Note
1009	P. VI. ^b 301	1854.795	3.59	29	157.5	19	70.S	D {A=6.9 B=7.1} bianche S {A=6.7 B=6.8} bianchissime
		» 913	3.07	44	157.2	40	70.S	
		1855.215	3.32	60	158.8	30	60.S	
	Medio	1854.97	3.32	»	157.80	»	»	
	Struve	1830.34	2.94	»	159.18	»	»	
	Herschel I	1782.87	»	»	167.4	»	»	
1037	Anonima	1855.130	Bene separate	»	324.4	22	90—	D {A=7.6 B=8.0} bianche S {A=7.2 B=7.3} ambe giallo chiaro La differenza nella mia posizione è nel senso voluto.
		« 143	»	»	318.6	28	90—	
		« 157	»	»	319.8	32	10.S	
		« 206	»	»	320.9	26	90—	
		« 239	»	»	320.1	16	90—	
		« 302	»	»	321.3	41	90—	
	Medio	1855.20	»	»	320.78	»	»	
	Struve	1836.26	1.323	»	327.43	»	»	
	»	1832.70	1.125	»	329.93	»	»	
	»	1831.28	1.070	»	330.25	»	»	
	»	1827.27	1.145	»	337.8	»	»	
1062	19 Lyncis	1854.844	14.37	26	314.2	31	50.S	D {A=5.4 bianco azzurro chiaro B=6.8 cinerea S {A=5.3 bianco verde chiaro B=6.6 bianco azzurro chiaro Struve sospetta un lento movimento negativo.
		» 913	14.53	68	314.3	34	60.S	
		1855.215	14.60	37	312.9	21	40.S	
		1854.99	14.518	»	313.92	»	»	
		1829.51	14.724	»	313.84	»	»	
		1782.86	»	»	316.9	»	»	
1066	ζ Geminorum	1853.293	7.13	20	203.3	4	30.D	D {A=3.5 gialla B=8.3 rosso cupo S {A=3.2 giallo chiaro B=8.2 porpora chiaro Struve dice che non v'è nulla di certo sul movimento di questa stella. Le prime tre posizioni sono le medie di due prese nella stessa sera. Le rimanenti sono le medie di cinque nella stessa notte.
		» 312	7.39	50	204.0	10	30.D	
		» 334	7.01	80	206.4	16	30.D	
		1854.228	7.36	10	204.7	25	40.D	
		» 231	7.10	100	203.3	50	30.D	
		» 245	7.23	80	202.6	40	30.D	
		» 261	6.93	30	202.4	5	30.D	
		» 267	6.87	100	203.6	50	40.D	
		1855.116	7.07	87	202.6	44	30.D	
	Medio	1854.03	7.082	»	203.46	»	»	
	Dawes	1831.03	7.130	»	196.92	»	»	
	Struve	1829.72	7.145	»	196.90	»	»	
	Herschel I	1802.75	»	»	196.9	»	»	
	»	1781.88	»	»	184.15	»	»	

MISURE MICROMETRICHE DI 127 STELLE DOPPIE E TRIPLE

N ^o STRUVE	NOME	Epoca	Distanza	Peso	Posizione	Peso	I	Grandezze, Colori e Note	
1110	α Geminorum	1853.296	6.06	70	245.3	4	0°	D {A=2.6 giallo verde B=3.8 idem, più verde di A S {A=2.7 B=3.7} ambe verde chiaro	
		» 301	5.56	90	244.6	14	0—		
		» 312	5.83	40	244.1	8	0—		
		» 320	5.54	30	245.1	6	0—		
		» 329	5.63	50	244.1	10	0—		
		1854.195	5.52	40	245.0	20	20.S	Le osservazioni di giorno fatte in buone circostanze atmosferiche, e tutte col Sole ancora sull'Orizzonte.	
		» 198	5.71	30	245.3	45	10.S		
		» 215	5.55	30	246.1	15	0—		
		» 226	5.65	90	246.0	45	0—		
		» 234	5.57	20	244.8	10	0—		
		1855.001	5.39	45	247.0	38	50.D	Le differenze tanto in angolo quanto in distanza, sembrano essere nel senso voluto. Cre- do però la distanza troppo forte. L'opinione di Herschel II, secondo la quale l'epoca del perielio sarebbe accaduta nel 1855,83 ad una distanza non maggiore di 0".66, non si è dunque confermata.	
		» 048	5.46	48	246.7	29	50.D		
		» 160	5.26	85	245.6	49	50.D		
		» 168	5.33	89	245.9	50	50.D		
		» 179	5.32	55	245.7	34	60.D		
		» 330	5.41	87	246.2	40	10.S		
	Medio	1854.28	5.532	»	245.78	»	»	Le prime cinque posizioni sono le medie di sole due prese nella stessa sera. Tutte le rimanenti sono le medie di cinque nella stessa notte.	
	Miller	1851.88	5.044	»	247.65	»	»		
	Smith	1843.13	4.9	»	252.3	»	»		
	Dawes	1838.31	4.816	»	254.62	»	»		
	Struve	1835.33	4.734	»	255.48	»	»		
	»	1832.86	4.525	»	257.72	»	»		
1126	P. VII. ^b 170		Bene					D {A=7.6 B=8.2} bianche S {A=7.2 B=7.5} giallo chiaro	
		1855.061	separato	»	139.6	23	40.D		
		» 091	»	»	142.1	25	30.D		
		» 163	»	»	133.7	25	90—		
		» 168	»	»	135.6	32	80.D		
	Medio	» 201	»	»	138.0	44	20.D	La differenza nella posizione è nel senso voluto.	
	Struve	1855.14	»	»	138.05	»	»		
	»	1829.43	1.464	»	132.01	»	»		
	Herschel I	1820.53	»	»	129.51	»	»		
		1781.91	»	»	117.35	»	»		
1196	ζ Cancri							D {A=5.5 bianca B=6.7 idem C=6.5 idem S {A=5.0 gialla B=5.7 idem più gialla di A C=5.5 idem meno gialla di A.	
		A—B	1854.817	Oblun.	»	308.9	22		0—
		» 888	Separ.	»	309.0	35	10.D		
		1855.102	Cunei.	»	304.1	10	10.D		
		» 143	Cunei.	»	307.4	12	90—		
		» 173	Separ.	»	310.3	41	0—		
		» 280	Separ.	»	309.8	30	90—		
		» 299	Separ.	»	310.9	33	70.D		
	Medio	1855.10	»	»	309.38	»	»		

FATTE NEGLI ANNI 1852 — 53 — 54 — 55.

n° STRUVE	NOME	Epoca	Distan- za	Peso	Posi- zione	Peso	I	Grandezze, Colori e Note
1196	ζ Cancri Λ — B Dembowski Struve $\frac{\Lambda+B}{2}$ — C Medio Struve	1855.10 1836.27 1854.888 1855.102 » 130 » 173 » 283 1855.11 1836.27	n^o 1.197 5.26 5.60 5.59 5.43 5.62 5.474 5.627	» » 82 42 49 67 66 » »	309.38^o 15.37 139.9 140.6 142.2 139.4 141.0 140.44 148.89	» » 46 23 22 35 35 » »	» » 10.S 0— 80.D 0— 90— » »	Di questo importante sistema non conosco misure posteriori a quelle di Struve. Il movimento angolare è retrogrado in ambedue le compagne, velocissimo in B, più lento in C. Le differenze nelle mie posizioni sarebbero nel senso voluto.
223	φ^2 Cancri Medio Struve	1854.297 » 338 » 346 » 354 » 368 » 371 1855.141 1854.46 1829.45	5.35 4.96 4.95 4.86 4.96 4.81 4.81 4.898 4.563	20 100 50 100 40 100 85 » »	215.1 216.1 216.3 215.9 » 215.7 213.8 215.35 212.04	10 10 25 50 » 50 48 » »	0— 20.D 20.D 20.D » 20.D 90— » »	D { $\Lambda=6.5$ } B { $=6.5$ } gialle S { $\Lambda=6.0$ } B { $=6.5$ } bianche Struve opina come quasi nullo il movimento.
224	ν' Cancri Medio Struve Herschel II South Struve Herschel II e South Herschel I	1854.351 » 924 » 973 1855.064 » 163 1854.89 1830.76 1830.18 1825.26 1822.18 1822.12 1783.07	5.83 5.88 5.77 5.83 5.76 5.808 5.838 6.684 » » » »	90 27 54 76 73 » » » » » »	40.6 40.5 39.3 39.6 40.3 40.04 37.27 38.60 37.50 37.38 37.78 57.85	45 21 33 43 32 » » » » » »	20.D 90— 80.D 90— 10.D » » » » » »	D { $\Lambda=6.8$ } B { $=7.7$ } bianche cineree S { $\Lambda=6.0$ } B { $=7.1$ } bianche Struve dice che la supposizione d'un movimento angolare riposa soltanto sull'angolo di Herschel I. Tutte le posizioni osservate posteriormente per lo spazio di 8 anni sono pressochè identiche.
45	P VIII ^b . 108 Medio Struve Herschel I	1855.206 » 278 1855.24 1832.95 1783.34	10.22 10.30 10.249 10.329 12.5	48 27 » » »	26.2 26.7 26.40 26.45 27.20	39 25 » » »	10.D 10.D » » »	D { $\Lambda=60$ } bianca B { $=74$ } cinerea S { $\Lambda=6.0$ } giallo chiaro B { $=7.0$ } giallo rosso, certi

MISURE MICRONETRICHE DI 127 STELLE DOPPIE E TRIPLE

N° STRUVE	NOME	Epoca	Distanza	Peso	Posizione	Peso	I	Grandezze, Colori e Note
1263	Anonima	1854.926	22.79	86	16.5	43	80.D	D { $\Lambda=8.3$ } B { $\Lambda=9.3$ } colori incerti
		» 954	22.61	28	16.7	23	90.—	
		1855.111	22.82	57	17.1	36	90.—	
		» 201	23.12	35	17.3	32	60.D	
		» 299	23.18	69	17.0	42	60.D	
	Medio	1855.10	22.918	»	16.91	»	»	S { $\Lambda=7.6$ bianco giallo chiaro B=8.2 bianca All'occhio mio le grandezze presenti sono certamente minori di quelle assegnate da Struve. Sembra che lo straordinario aumento nella distanza sia dovuto piuttosto al moto proprio e quindi sia una stella doppia ottica.
	Miller	1852.17	20.934	»	15.83	»	»	
	Struve	1836.41	10.325	»	9.60	»	»	
	»	1832.33	7.455	»	7.27	»	»	
	»	1828.36	4.86	»	359.0	»	»	
1273	ϵ Hydrae	1854.926	3.74	75	211.3	27	30.S	D { $\Lambda=3.5$ gialla B=7.8 oliva cinerea, e certo non azzurro S { $\Lambda=3.8$ gialla B=7.8 azzurra
		1855.069	3.61	56	210.6	28	10.D	
		» 113	3.24	87	212.3	22	10.D	
		» 168	3.48	86	211.8	16	10.D	
		» 283	3.45	89	212.5	43	0.—	
	»	» 302	3.42	89	»	»	»	Struve dice esservi forte sospetto d'un movimento angolare. La differenza sarebbe nel senso voluto.
	»	» 330	»	»	212.3	36	10.S	
	Medio	1855.14	3.476	»	211.75	»	»	
	Struve	1836.27	3.203	»	198.60	»	»	
	»	1825.23	3.310	»	192.40	»	»	
1283	Anonima	1855.135	15.93	72	124.2	41	90	D { $\Lambda=7.3$ azzurro chiaro B=8.3 azzurro S { $\Lambda=7.0$ bianche B=8.0
		» 163	16.01	55	123.3	46	10.D	
		» 267	16.03	32	124.4	34	80.S	
	Medio	1855.19	15.978	»	123.91	»	»	L'ho sempre trovata una stella molto difficile a motivo della debolezza della compagna, e ne è certamente molto minore di 8.2. Ciò almeno le differenze tanto in angolo, quanto in distanza sarebbero nel senso voluto.
	Struve	1829.23	16.457	»	123.33	»	»	
	Herschel I	1783.13	»	»	119.0	»	»	
1306	σ^2 Ursae Majoris	1854.272	3.66	20	259.8	10	50.D	D { $\Lambda=5.4$ bianca B=10.0 colore incerto S { $\Lambda=5.0$ verde chiaro B=8.2 non indicato il colore
		» 967	3.67	66	257.2	19	40.S	
		» 973	3.91	54	257.4	40	20.S	
		1855.069	»	»	256.6	33	20.S	
		» 111	»	»	257.8	17	45.S	
	»	» 116	3.65	78	258.9	34	45.D	L'ho sempre trovata una stella molto difficile a motivo della debolezza della compagna, e ne è certamente molto minore di 8.2. Ciò almeno le differenze tanto in angolo, quanto in distanza sarebbero nel senso voluto.
	»	» 330	3.85	52	259.7	24	45.D	
	Medio	1854.93	3.746	»	258.00	»	»	
	Struve	1836.42	4.61	»	262.00	»	»	
	»	1821.08	5.91	»	»	»	»	
	»	1819.74	»	»	267.1	»	»	
	Herschel I	1782.42	7.93	»	283.0	»	»	

FATTE NEGLI ANNI 1852 — 53 — 54 — 55.

N° FRUVE	NOME	Epoca	Distan- za	Peso	Posi- zione	Peso	I	Grandezze , Colori, e Note
1295	17 Hydrac	1852.215	4.70	20	359.3	4	10.0	Grandezze e colori, non notati. S {A=7.0) (B=7.3) bianche
	» 228	4.71	60	337.0	12	10.0	10.0	
	» 261	4.59	30	358.9	6	10.0	10.0	
	» 280	4.50	20	358.4	4	10.0	10.0	
	Medio	1852.25	4.648	»	338.01	»	»	
	Struve	1831.59	4.327	»	358.82	»	»	Le posizioni sono le medie di sole due pre- se nella stessa sera,
	Herschel 1	1783.01	»	»	356.5	»	»	
1321	Anonima	1855.088	19.72	50	53.8	18	20.0	D {A=7.0) (B=7.2) bianco rossastro S {A=7.0) (B=7.0) anree
	» 111	19.68	61	53.3	43	20.0	20.0	
	» 198	19.31	23	53.7	26	20.0	20.0	
	» 288	19.51	52	53.7	42	40.0	40.0	
	Medio	1855.17	19.606	»	53.58	»	»	
	Struve	1836.42	19.700	»	48.75	»	»	Struve mette fuori di dubbio l'aumento del- l'angolo e la diminuzione della distanza. Le dif- ferenze sarebbero nel senso voluto anche per la distanza, perchè le mie distanze sono quasi co- stantemente più forti di quelle di Struve, e qui è invece un poco minore.
	»	1822.07	21.12	»	»	»	»	
	»	1820.92	»	»	43.8	»	»	
1334	38 Lyncis	1855.135	3.10	60	212.8	15	45.0	D {A=4.3 bianca (B=6.9 olio a cinerea S {A=4.0 bianco verde (A=6.7 azzurra
	» 141	2.99	55	210.5	40	10.0	10.0	
	» 179	»	»	213.1	32	50.0	50.0	
	» 231	»	»	211.8	26	50.0	50.0	
	» 280	2.93	71	211.1	30	10.0	10.0	
	Medio	1855.19	3.003	»	211.68	»	»	
	Struve	1829.17	2.697	»	210.22	»	»	
	Herschel 1	1782.41	»	»	211.15	»	»	
1338	Lyncis 157	1855.168	Bene	»	135.2	45	30.0	D {A=7.2) bianche (B=7.3) S {A=7.0) bianche (B=7.5)
	» 179	separate	»	»	136.4	22	60.0	
	» 239	»	»	»	136.3	15	60.0	
	Medio	1855.20	»	»	135.72	»	»	
	Struve	1833.34	1.72	»	124.50	»	»	
	»	1828.38	1.77	»	120.30	»	»	L'andamento degli angoli di Struve indiche- rebbe un movimento diretto. La differenza è nel senso voluto.
1187	54 Leonis	1852.215	6.40	60	103.6	12	30.0	Grandezze e colori non notati. S {A=5.0 bianco verde (B=7.0 azzurra
	» 228	6.22	80	103.9	16	30.0	30.0	
	» 269	6.17	80	102.8	16	30.0	30.0	
	» 280	6.20	60	101.5	2	30.0	30.0	
	Medio	1852.25	6.240	»	103.33	»	»	
	Struve	1830.35	6.175	»	102.80	»	»	Ogni posizione è la media di due, prese nella stessa sera. Struve dice essere pressochè nullo il movi- mento dal tempo di Herschel 1.

MISURE MICROMETRICHE DI 127 STELLE DOPPIE E TRIPLE

N° STRUVE	NOME	Epoca	Distanza	Peso	Posizione	Peso	I	Grandezze, Colori e Note	
1124	γ Leonis	1854.228	2.85	70	107.0	35	80.S	D {A=2.5 giallo perfetto B=3.9 giallo aureo olivastro certi. Vedute di pieno giorno e col Sole alto, m sono sempre sembrate rosso roseo. S {A=2.8 aurea B=3.5 verde rosso L'angolo cresce—la differenza è nel sens voluto. Le misure di giorno sono state fatte col Sol ancora alto sull'orizzonte, le due ultime spe cialmente in ottime circostanze e per defin zione ed immobilità.	
		» 234	2.85	70	108.7	35	70.S		
		» 247	2.84	20	107.9	10	70.S		
		» 267	2.84	90	108.1	45	70.S		
		» 278	2.86	60	107.7	30	70.S		
		» 926	3.43	78	109.4	47	20.D		
		1855.102	3.21	29	109.9	23	20.D		
		» 206	3.02	41	109.1	45	20.D		
		» 278	»	»	110.8	35	20.D		
		» 280	2.96	87	109.2	47	20.D		
		» 285	2.92	78	109.2	32	20.D		
		Medio	1854.76	2.974	»	108.87	»		»
		Struve	1835.16	2.562	»	104.94	»		»
		»	1828.14	2.458	»	102.03	»		»
		»	1820.28	3.74	»	98.98	»		»
Herschel I	1801.72	»	»	94.70	»	»			
	»	1782.81	»	»	83.50	»	»		
1516	Anonima	1854.532	2.72	60	8.9	15	80.D	D {A=7.6} bianco rossastro B=8.0 S {A=7.0 giallo chiaro B=7.5 giallo cinereo La differenza nella posizione è nel senso v luto; ed anche nella distanza. Struve ritiene più probabile che sia una stel doppia ottica anziché fisica—e le grandi diff renze siano da attribuire a movimento propri	
		» 538	2.97	10	8.1	35	80.D		
		» 560	2.72	70	8.6	35	70.D		
		» 562	2.62	100	8.1	30	70.D		
		» 579	2.81	40	8.3	20	70.D		
		» 921	2.90	56	13.2	40	50.D		
		1855.061	2.95	34	17.3	29	40.D		
		» 111	2.81	72	14.1	38	10.D		
		» 198	»	»	16.0	18	20.D		
		» 201	2.80	57	15.9	31	20.D		
		» 321	2.72	90	19.3	37	70.S		
		Medio	» 340	»	»	18.4	25		10.S
		»	1855.14	2.814	»	16.15	»		»
		Struve	1854.55	2.706	»	8.35	»		»
		»	1836.64	8.134	»	302.60	»		»
»	1831.54	9.930	»	298.70	»	»			
»	1823.92	14.22	»	»	»	»			
1617	Virginis 191	1855.163	Cunei.	»	216.5	11	10.S	A=8.3, credo bianche—ma dubbio B=9.0' B è certo molto minore di A. S {A=7.7 B=7.7 minore} giallo chiaro Struve nelle sue misure anteriori aveva su posto un certo movimento—poi nelle così det Mensurae Secundae trova che non si conferma Accoppiate le misure più vicine e paragona colle mie (se non sono erronee) sembra invec verificarsi la prima supposizione.	
		» 231	idem	»	213.0	7	10.D		
		» 294	idem	»	214.0	47	30.S		
		» 321	Separ.	»	211.0	39	30.S		
		Medio	1855.25	»	»	213.07	»		»
Struve	1886.32	1.245	»	204.10	»	»			
	»	1830.07	1.188	»	202.04	»	»		

FATTE NEGLI ANNI 1852 — 53 — 54 — 55.

N° STRUVE	NOME	Epoca	Distanza	Peso	Posizione	Peso	I	Grandezze, Colori e Note
1523	ξ Ursae Maioris	1854.505	2.92	30	117.0	9	60.S	<p>D {A=4.1 gialla B=4.6 più gialla di A S {A=4.0 giallo chiaro B=5.9 cinerea Mi è sembrato talvolta che B avesse un che di cinereo, ma mai molto decisivo.</p> <p>Sistema il cui movimento è notorio. La rivoluzione si compie in circa 61.5 anni. Le differenze fra le mie misure e le precedenti sono nel senso voluto. Specialmente le posizioni del 1855 mi sono riuscite molto soddisfacenti, avendo anche il grandissimo vantaggio della congiungente quasi nettamente verticale, trovandosi la stella all' Oriente del Meridiano.</p>
	»	508	3.06	20	116.6	10	50.S	
	»	510	3.12	80	116.6	7	50.S	
	»	513	3.15	30	116.9	15	50.S	
	»	518	3.22	20	116.2	10	50.S	
	»	967	3.32	72	116.4	30	0—	
	»	973	3.37	59	115.7	46	0—	
	»	1855.084	»	»	115.6	40	0—	
	»	168	3.35	78	114.6	47	0—	
	»	278	»	»	116.2	26	0—	
	»	280	3.05	86	115.3	49	0—	
	»	285	»	»	115.4	48	0—	
	Medio	1854.88	3.197	»	115.02	»	»	
	Miller	1853.19	3.012	»	118.78	»	»	
	»	1852.13	2.898	»	122.28	»	»	
	Struve	1848.41	2.752	»	128.43	»	»	
	»	1844.78	2.526	»	140.32	»	»	
	»	1838.43	2.260	»	160.38	»	»	
	»	1836.44	1.972	»	171.20	»	»	
670	γ Virginis	1854.417	3.23	100	173.0	50	10.D	<p>D {A=3.0 B=3.0} ambe giallo chiaro</p> <p>S {A=3.0 B=3.0} ambe giallo chiaro</p> <p>Nelle prime osservazioni mi sembrò che la Stella Boreale fosse un tanto minore. È opinione ricevuta che sono variabili. La rivoluzione si compie in 113 anni circa. Le differenze tra le mie misure e le anteriori, sono nel senso voluto.</p>
	»	423	3.24	100	352.4	50	0—	
	»	475	3.53	10	354.9	5	30.D	
	»	480	3.16	100	353.6	10	10.D	
	»	486	3.26	100	353.6	50	10.D	
	»	494	3.23	20	353.3	4	20.D	
	»	499	3.30	30	354.7	15	20.D	
	»	1855.111	3.60	63	350.6	45	0—	
	»	179	»	»	172.6	16	10.D	
	»	201	3.48	48	170.2	50	0—	
	»	288	3.58	34	171.6	31	10.D	
	Medio	1854.91	3.315	»	172.33	»	»	
	Miller	1853.27	3.108	»	174.90	»	»	
	»	1851.47	3.040	»	175.90	»	»	
	Struve	1836.41	0.257	»	331.57	»	»	
185	P. XII. 201.202	1852.209	15.35	20	201.7	4	70.S	<p>Grandezze e Colori, non notati.</p> <p>S {A=6.8 B=7.3} bianche</p> <p>Le posizioni sono il medio di due prese in ogni sera. Struve ritiene nullo il movimento dal tempo di Herschel I.</p>
	»	223	15.87	10	201.7	2	70.S	
	»	264	15.55	30	201.5	6	70.S	
	»	291	15.80	50	»	»	»	
	Medio	1852.25	15.656	»	201.60	»	»	
	Struve	1829.87	15.820	»	200.85	»	»	

MISURE MICROMETRICHE DI 127 STELLE DOPPIE E TRIPLE

N° STRUYE	NOME	Epoca	Distan- za	Peso	Posi- zione	Peso	I	Grandezze, Colori e Note	
1744	ξ Ursae Maioris	1852.026	14.25	40	146.5	8	50.S	Grandezze e Colori non notati.	
		» 059	13.96	60	148.3	12	40.S		
		» 059	14.27	60	147.5	12	40.S	S { A=2.1 } bianco verde { B=4.2 }	
		» 067	14.25	30	147.7	6	40.S		
		» 069	14.21	60	148.2	6	50.S	Le posizioni sono il medio di due prese in ogni sera.	
		» 193	14.24	10	148.7	2	50.S		
		» 226	14.68	10	148.0	2	50.S	Struve dice esser nullo il movimento da tempo di Herschel I.	
		» 245	14.54	60	148.4	12	50.S		
		» 283	14.30	50	148.5	10	50.S		
		Medio	1852.14	14.239	»	147.93	»	»	
	Struve	1830.63	14.368	»	147.70	»	»		
	1757	P. XIII. ^b 127	1855.292	Bene separate	»	51.4	18	40.S	D { A=8.0 } { B=9.1 } credo bianche, ma dubbio
» 297			»	»	51.7	20	30.S		
» 330			1.7 sti.	»	51.1	32	30.S	S { A=7.8 } bianche { B=8.9 }	
» 340			Be.sep.	»	51.3	24	30.S		
Medio			1855.31	»	»	51.34	»	»	Struve ritiene fuori di dubbio il movimen- to diretto.
Struve		1836.42	1.645	»	29.45	»	»	La differenza è nel senso voluto.	
»		1835.37	1.667	»	23.5	»	»		
»		1833.38	1.540	»	23.9	»	»		
»		1829.82	1.445	»	19.5	»	»		
»		1825.37	1.60	»	10.0	»	»		
1816		Anonima	1855.231	Bene separate	»	78.3	10	20.S	D { A=7.7 } certo bianche { B=8.1 }
			» 302	»	»	83.4	49	40.S	
	Medio	1855.27	»	»	82.54	»	»	S { A=7.0 } giallo chiaro { B=7.1 }	
	Dawes	1832.25	1.1/4	»	81.62	»	»		
	Struve	1831.33	1.868	»	80.16	»	»		
1813	Anonima	1855.284	4.92	40	192.7	32	10.D	D { A=8.0 } bianche, dubbio { B=8.3 }	
		» 330	»	»	193.4	18	10.D		
	Medio	1855.30	4.92	»	192.95	»	»	S { A=8.0 } bianche { B=8.1 }	
	Struve	1829.81	4.760	»	191.00	»	»		
	Herschel I	1793.36	»	»	180.00	»	»	Struve suppone un lento movimento.	
1835	P. XIV. ^b 69	1855.504	6.47	50	»	»	»	D { A=4.8 } giallo aureo { B=6.8 } rosea,	
		» 509	6.42	40	»	»	»		
		» 513	6.17	30	»	»	»	S { A=5.5 } bianco verde chiaro { B=6.8 } bianco azzurro chiaro	
		» 515	6.33	100	»	»	»		
		» 517	6.29	60	»	»	»	I colori di queste stelle sono forse variati.	
		1855.135	6.29	59	186.1	23	45.S		
		» 212	»	»	187.2	26	50.S		

FATTE NEGLI ANNI 1852 — 53 — 54 — 55.

N° STRUVE	NOME	Epoca	Distanza	Peso	Posizione	Peso	I	Grandezze, Colori e Note
1835	P. XIV. 69	1853.782	6.332	»	°	»	»	Di questa stella è rigettati tutti gli angoli presi nel 1855. Vedi misure rigettate. L'angolo 186.68 è un medio.
		1855.158	»	»	186.68	»	»	
	Struve	1832.08	6.060	»	186.47	»	»	
1864	π Bootis	1854.414	5.67	30	100.3	15	90—	D { A=5.3 bianca B=6.3 bianco cinereo S { A=4.9, B=6.0 } bianchissime Struve dice essere nullo il movimento angolare.
		» 466	5.81	10	101.3	5	60.S	
		» 478	5.81	30	101.0	15	60.S	
		» 491	5.76	40	101.9	20	70.S	
		» 494	5.74	30	101.3	15	70.S	
		1855.212	»	»	102.3	25	40.D	
	Medio	1854.59	5.752	»	101.49	»	»	
	Struve	1830.32	5.831	»	99.20	»	»	
865	ζ Bootis	1855.143	Oblun.	»	303.6	16	20.D	D { A seguente =4.5 } bianche B preceden.=4.7 } S { A seguente =3.5 } bianche B preceden.=3.9 } Struve ritiene pressochè nullo il movimento angolare—ammette però certa la variabilità di splendore. All'occhio mio mi è quasi costantemente sembrato che la stella seguente fosse sensibilmente più grande della precedente.
		» 176	separate	»	127.9	31	30.D	
		» 284	»	»	306.1	30	90—	
		» 322	»	»	307.4	21	90—	
		» 310	»	»	306.4	28	10.D	
	Medio	1855.25	»	»	306.51	»	»	
	Miller	1853.31	1.191	»	127.23	»	»	
	Dawes	1843.32	1.039	»	127.03	»	»	
	Struve	1830.47	1.189	»	309.17	»	»	
	Herschel I	1796.60	1.0	»	131.98	»	»	
877	ε Bootis	1854.475	2.66	10	322.9	5	80.D	D { A=3.0 giallo chiaro B=6.3 talvolta brillantissimo verde, tal'altra perfetto oltremare molto simile alla compagna di γ Andromedae. S { A=3.0 gialla } colori cospicui B=6.3 azzurra } Struve mette fuori di dubbio il movimento. La differenza fra le mie misure e le anteriori è nel senso voluto.
		» 480	2.68	90	321.8	43	80.D	
		» 483	2.61	20	322.2	10	80.D	
		» 486	2.48	60	321.3	10	90—	
		» 499	2.77	10	320.9	5	80.D	
		1855.143	3.25	36	323.9	27	20.S	
		» 302	3.23	33	324.1	37	20.S	
	Medio	1854.69	2.783	»	322.82	»	»	
	Miller	1852.94	2.829	»	321.25	»	»	
	Struve	1835.61	2.635	»	320.60	»	»	
		» 1828.11	2.680	»	321.10	»	»	
		» 1822.39	»	»	318.23	»	»	
	Herschel I	1803.01	»	»	314.65	»	»	
		» 1796.63	»	»	315.53	»	»	
		» 1781.73	»	»	305.12	»	»	

MISURE MICROMETRICHE DI 127 STELLE DOPPIE E TRIPLE

n° STRUVE	NOME	Epoca	Distan- za	Peso	Posi- zione	Peso	I	Grandezze, Colori e Note
1888	ξ Bootis	1854.414	5.69	50	310.0	25	80°S	D { A=5.0 gialla B=7.0 rosso decisivo S { A=4.7 gialla B=6.8 rosso porpureo Le differenze in angolo e distanza sono nel senso voluto.
		» 464	5.85	30	310.7	15	90—	
		» 466	5.89	10	311.0	5	80.S	
		» 475	5.88	10	310.6	5	80.S	
		» 488	5.89	80	310.8	40	80.S	
		1855.116	6.28	72	312.9	46	0—	
		» 215	6.08	43	312.2	35	0—	
		» 330	6.13	44	312.9	33	0—	
		Medio 1854.75	5.993	»	311.75	»	»	
		Miller 1852.30	6.512	»	316.58	»	»	
		Mädler 1841.41	6.961	»	324.50	»	»	
		Struve 1836.47	7.087	»	328.17	»	»	
		» 1829.46	7.217	»	334.17	»	»	
1890	39 Bootis	1854.521	3.88	50	46.5	25	40.D	D { A=5.8 B=6.3 } ambe bianco rossastro S { A= bianca B= porpora chiaro Struve suppose dapprima che ci fosse un le- to movimento indiretto — nelle misure poste- riori ne dubita.
		» 529	3.88	10	46.4	5	40.D	
		» 538	3.95	10	45.9	5	40.D	
		» 551	4.00	50	46.1	30	45.D	
		» 554	4.02	60	46.0	30	45.D	
		1855.179	»	»	45.7	20	45.D	
		» 299	3.90	68	45.6	38	50.D	
		Medio 1854.74	3.946	»	45.97	»	»	
		Struve 1836.50	3.757	»	44.20	»	»	
		» 1828.13	3.657	»	44.00	»	»	
		Herschel 1783.02	»	»	51.65	»	»	
1909	44 Bootis	1854.480	4.14	100	240.5	50	20.D	D { A=5.5 gialla B=6.3 costantemente fra il rosso arancio ed il giallo olivastro. S { A=5.2 giallo chiaro B=6.1 azzurro chiaro. Sarebbero variabili i colori? Le differenze sono nel senso voluto.
		» 486	4.32	10	239.9	5	40.D	
		» 494	4.55	40	240.5	10	40.D	
		» 499	4.64	70	239.7	35	40.D	
		» 508	4.63	70	239.6	35	45.D	
		» 510	4.63	20	240.0	20	40.D	
		» 617	4.31	76	239.6	40	30.D	
		» 620	4.33	67	239.6	49	30.D	
		» 633	4.43	80	239.6	43	40.D	
		» 647	4.39	60	239.6	37	30.D	
		» 661	4.43	72	240.2	35	30.D	
		1855.111	4.77	43	238.7	40	30.D	
		» 206	4.59	47	239.5	44	40.D	
		Medio 1854.69	4.448	»	239.71	»	»	
		Miller 1853.28	4.349	»	240.23	»	»	
		Hind 1847.09	4.261	»	237.99	»	»	

MISURE MICROMETRICHE DI 127 STELLE DOPPIE E TRIPLE

N ^o STRUVE	NOME	Epoca	Distan- za	Peso	Posi- zione	Peso	I	Grandezze, Colori e Note				
1998	ξ Librae	A—B	1855.295	Obblun.	»	49.8	14	45.8	D {A+B=6.2+6.2 giallo chiaro C =7.4 dubbio fra l'azzurro chiaro il rosso pallido. S {A=4.9 } bianco giallo chiaro B=5.2 } C=7.2 bianco azzurro chiaro Le differenze sono nel senso voluto; ma poche osservazioni che ne ò fatte, non furono per nulla favorite dall'atmosfera; e specialmente le posizioni di A—B mi lasciavano sempre molto da desiderare.			
		» 303	»	»	»	51.2	20	50.8				
		» 325	»	»	»	50.3	13	45.8				
		Medio	1855.31	»	»	50.53	»	»				
		Struve	1836.49	1.162	»	8.08	»	»				
		»	1832.46	1.213	»	4.43	»	»				
		»	1825.47	1.147	»	355.97	»	»				
		$\frac{A+B}{2}$ — C	1855.297	7.42	26	72.5	26	70.8				
		» 303	»	7.18	42	71.6	23	60.8				
		» 325	»	7.24	34	70.4	19	50.8				
		Medio	1855.31	7.261	»	71.60	»	»				
		Struve	1836.49	7.067	»	74.70	»	»				
		»	1832.46	6.700	»	76.17	»	»				
		»	1825.48	6.75	»	78.60	»	»				
2021	49 Serpentis		1854.488	3.68	100	321.3	50	60.D	D {A=7.5 bianco rossastro B=7.5 bianco azzurro, dubbii S {A=7.2 giallo chiaro B=7.5 idem Struve ammette il movimento diretto, ma crede più lento all'epoca sua che al tempo di Herschel 1.			
		»	502	3.89	40	320.5	10	70.D				
		»	513	3.53	30	321.1	15	60.D				
		»	518	3.53	50	320.9	25	50.D				
		»	532	3.69	30	321.3	15	60.D				
			1855.201	»	»	321.6	30	10.S				
		Medio	1854.63	3.669	»	321.22	»	»				
		Struve	1836.32	3.280	»	316.73	»	»				
		»	1820.10	»	»	316.55	»	»				
		Herschel I	1802.39	»	»	302.87	»	»				
		»	1783.48	»	»	291.55	»	»				
		2032	σ Coronae Bor.		1854.510	2.30	60	180.0		50	60.D	D {A=5.3 giallo chiaro B=6.5 giallo talvolta cinereo S {A=5.2 bianco giallo chiaro B=6.0 bianca Il tempo della rivoluzione è di circa 90 anni. Le differenze sono nel senso voluto.
				»	549	2.47	50	178.3		35	60.D	
				»	716	2.23	68	179.7		30	70.D	
»	757			2.23	33	180.4	43	70.D				
»	774			2.66	36	180.3	41	60.D				
	1855.116			2.41	28	180.4	39	70.S				
»	168			2.42	42	179.8	34	70.S				
»	284			2.32	54	179.6	44	70.S				
Medio	1854.86			2.369	»	179.85	»	»				
Struve	1836.59			1.435	»	134.73	»	»				
»	1827.02			1.312	»	89.35	»	»				

FATTE NEGLI ANNI 1852 — 53 — 54 — 55.

n° STUVE	NOME	Epoca	Distanza	Peso	Posizione	Peso	1	Grandezze, Colori e Note
052	Hereulis 71	1854.570	3.12	50	105.8	23	70.S	D {A=7.6 }bianche {B=7.7 } S {A=7.3 }bianche {B=7.3 min. }
	» 581	3.27	40	103.8	20	80.S		
	» 593	3.07	60	286.0	30	70.S		
	» 606	3.17	40	104.8	20	70.S		
	» 612	3.12	60	285.4	30	70.S		
	1855.206	»	»	105.8	20	30.D		
	Medio	1854.69	3.141	»	104.75	»	»	
	Struve	1829 52	2.983	»	109.70	»	»	
055	λ Ophiuchi	1855.286	Bene separate	»	13.9	11	0—	D {A=4.4 certo bianca {B=6.3 bianca, dubbio {A=4.0 gialla {B=5.9 azzurro chiaro Le differenze sono nel senso voluto.
	» 297	e certo	»	»	13.1	25	0—	
	» 325	più di 1"	»	»	17.2	12	0—	
	Medio	1855.30	»	»	13.35	»	»	
	Struve	1836.50	1.014	»	353.38	»	»	
	»	1834.42	0.987	»	350.60	»	»	
	»	1825.51	0.837	»	331.80	»	»	
078	17 Draconis	1853.652	3.87	90	112.8	45	0—	D {A=5.7 bianca {B=7.0 azzurro chiaro S {A=5.0 }bianche {B=6.0 } Struve dice essere nullo il movimento dal tempo di Herschel 1.
	» 682	3.56	80	111.9	40	0—		
	» 687	3.68	80	112.2	40	0—		
	» 690	3.56	100	112.9	50	10.S		
	» 695	3.72	20	112.1	10	10.S		
	1855.179	3.98	44	115.6	28	30.S		
	» 270	3.77	28	116.0	28	30.S		
	Medio	1854.12	3.708	»	113.23	»	»	
	Struve	1831.91	3.743	»	116.47	»	»	
084	ζ Herculis	1854.759	Bene separate	»	68.0	18	10.S	D {A=2.9 gialla {B=6.8 olivastro, certi S {A=3.0 gialla {B=6.1 purpurea La differenza nella posizione è nel senso voluto: ma le misure prese nel 1855 colla congiungente a circa 45° dalla verticale meritano pochissima confidenza. L'aberrazione del parallelismo è patente, e le due posizioni pel 1855.231 prese nello stesso giorno una all'Oriente, l'altra all'Occidente, ne sono una prova manifesta.
	» 762	»	»	»	68.4	22	10.S	
	» 765	»	»	»	67.3	41	10.S	
	» 814	»	»	»	68.0	15	10.S	
	» 814	»	»	»	69.2	45	10.S	
	» 831	»	»	»	68.5	12	10.S	
	» 836	»	»	»	69.2	33	10.S	
	» 839	»	»	»	69.3	50	10.S	
	1855.212	»	»	»	74.6	33	50.D	
	» 231	»	»	»	71.9	7	45.D	
	» 231	Cuneo	»	»	66.5	6	10.S	
	» 270	separate	»	»	70.2	10	10.D	
	Medio	1854.94	»	»	69.38	»	»	
	Miller	1853.33	1.402	»	78.63	»	»	
	Dawes	1846.83	»	»	112.23	»	»	

MISURE MICROMETRICHE DI 127 STELLE DOPPIE E TRIPLE

N° STRUVE	NOME	Epoca	Distanza	Peso	Posizione	Peso	I	Grandezze, Colori e Note
2130	μ Draconis	1853.698	3.06	100	188.4	50	80.S	D { $\Lambda=5.2$ B=5.4}bianche S { $\Lambda=5.0$ B=5.1}bianche La differenza in posizione sarebbe nel senso voluto.
		» 701	2.82	50	188.1	25	80.S	
		» 720	2.94	60	188.2	30	80.S	
		» 728	2.82	30	188.5	15	80.S	
		» 731	2.84	70	188.1	35	80.S	
		1854.579	3.12	60	7.5	30	80.S	
		» 613	3.05	20	7.3	20	80.S	
		» 754	3.22	81	188.7	43	80.S	
		» 759	3.31	68	188.8	45	80.S	
		» 787	2.99	84	188.3	39	60.S	
		» 795	3.10	56	188.2	18	90—	
	Medio	1854.26	3.042	»	188.26	»	»	
	Miller	1852.25	2.973	»	187.27	»	»	
	Smith	1847.51	3.0	»	191.60	»	»	
	Struve	1836.79	3.267	»	202.85	»	»	
2104	Anonima	1853.590	5.64	20	»	»	»	D { $\Lambda=7.5$ B=8.5}colori incerti S { $\Lambda=6.2$ bianca B=8.0 cinerea
		1853.206	5.72	51	19.7	31	90—	
	Medio	1854.40	5.698	»	19.7	»	»	
	Struve	1829.35	5.857	»	19.63	»	»	
2110	α Herculis	1853.597	4.42	50	121.3	15	80.S	D { Λ = giallo brillante B= giallo cinereo non notate le grandezze. S { $\Lambda=3.0$ giallo brillante B=6.1 azzurro intenso
		» 627	4.63	80	118.9	40	90—	
		» 635	4.51	50	118.1	25	90—	
		» 641	4.77	100	117.2	50	90—	
		» 643	4.60	50	117.6	25	90—	
		» 646	»	»	118.2	25	80.S	
	Medio	1853.63	4.618	»	118.21	»	»	
	Struve	1829.63	4.648	»	118.48	»	»	
2161	ρ Herculis	1853.649	3.81	40	309.3	20	60.S	D { $\Lambda=5.3$ bianco rossastro B=7.2 verde chiaro colori notati due volte, grandezze una volta S { $\Lambda=4.0$ bianco verde B=5.1 più verde di A
		» 654	3.52	90	309.8	45	60.S	
		» 657	3.43	60	309.9	30	60.S	
		» 671	3.39	40	310.3	20	60.S	
		» 679	3.35	20	310.1	10	60.S	
		1855.135	»	»	309.3	41	20.S	
	Medio	1853.91	3.510	»	309.72	»	»	
	Struve	1830.35	3.600	»	307.22	»	»	Struve dice che v'è motivo di credere ad un movimento diretto.

FATTE NEGLI ANNI 1852 — 53 — 54 — 55.

N° STRUVE	NOME	Epoca	Distan- za	Peso	Posi- zione	Peso	I	Grandezze, Colori e Note
180	P. XVII. ^b 147	1854.565	3.23	30	265.3	23	0—	D {A=7.7} bianche S {A=7.0} bianchissime B {B=8.0}
		» 576	3.25	80	265.5	45	10.D	
		» 612	3.07	70	265.4	35	10.D	
		» 639	3.16	42	265.1	42	0—	
		» 661	3.28	59	265.5	33	0—	
	Medio	1854.61	3.198	»	265.36	»	»	
	Struve	1831.29	3.173	»	265.28	»	»	
	Herschel I	1782.84	»	»	267.6	»	»	
203	Anonima	1855.281	Cuncif.	»	144.8	18	45.S	D {A=8.2} bianche, dubbio B {B=8.7} S {A=7.5} bianche B {B=7.8}
		» 295	Oblun.	»	330.2	32	45.S	
	Medio	1855.29	»	»	328.26	»	»	
	Struve	1832.86	0.72	»	328.4	»	»	
	»	1828.76	0.72	»	336.0	»	»	
264	95 Herculis	1834.672	6.04	61	259.8	40	50.S	D {A=5.3 bianco verde B {B=5.5 rosa pallido S {A=4.9 giallo verde chiaro B {B=4.9 min. giallo rosso chiaro Secondo Struve, i colori sono variabili. A vero dice, nel piccolo numero d'osservazioni che ne è fatte, non mi è mai sembrato che ci sia una variabilità decisiva.
		» 696	6.05	61	258.7	44	40.S	
		» 721	5.99	45	258.7	44	60.S	
		» 748	5.97	30	259.6	28	30.S	
		» 765	6.42	70	259.3	44	60.S	
		1855.206	»	»	82.1	38	50.D	
		» 281	6.26	62	82.2	32	50.D	
	Medio	1854.87	6.151	»	259.95	»	»	
	Struve	1829.90	6.062	»	261.75	»	»	
272	70 Ophiuchi	1853.520	6.24	90	114.8	25	30.D	D {A=5.0 gialla B {B=6.3 rosea, certo S {A=4.1 gialla B {B=6.1 purpurea
		» 545	6.59	90	116.2	45	30.D	
		» 550	6.45	70	117.0	25	30.D	
		» 553	6.45	100	117.2	50	30.D	
		» 556	6.52	100	116.7	33	30.D	
		» 559	»	»	116.9	50	30.D	
		1854.472	6.89	10	114.6	5	50.D	
		» 480	6.53	50	114.0	50	70.D	
		» 494	6.16	60	113.4	30	70.D	
		» 499	6.04	40	112.6	20	80.D	
		» 508	6.01	20	113.2	10	70.D	
		» 513	6.12	70	113.4	45	80.D	
		» 672	6.30	73	114.1	46	70.D	
		» 696	6.29	58	113.1	37	70.D	
		» 702	6.19	82	113.2	25	70.D	
		» 707	6.19	72	113.2	41	90—	
		» 713	6.13	79	113.3	28	90—	
		» 213	6.52	58	113.1	39	45.D	

MISURE MICROMETRICHE DI 127 STELLE DOPPIE E TRIPLE

N° STRUVE	NOME	Epoca	Distanza	Peso	Posizione	Peso	I	Grandezze, Colori e Note
2272	70 Ophiuchi Medio Fletcher Struve » »	1834.27 1831.38 1836.66 1834.47 1828.71	6.327 6.378 6.137 5.832 4.782	» » » » »	111.63 ⁰ 116.10 129.53 131.15 140.22	» » » » »	» » » » »	Le differenze sono nel senso voluto.
2276	P. XVII. ^b 362 » » » » » Medio Struve Herschel I	1853.567 » 378 » 580 » 583 » 586 1855.233 1853.86 1830.09 1783.22	6.69 6.46 6.68 6.60 6.57 » 6.572 6.840 »	20 100 30 100 20 » » » »	255.8 254.9 253.3 255.6 253.3 259.7 256.12 257.93 260.3	20 30 25 30 10 34 » » »	40.S 40.S 40.S 40.S 40.S 50.D » » »	D { A=7.0 bianca B=7.3 bianco rossastro, dubbii S { A=6.0 bianco giallo chiaro B=7.0 bianco azzurro chiaro
2316	59 Serpentis » » » » » » Medio Struve » » Herschel I »	1854.510 » 565 » 576 » 581 » 587 1855.330 1854.70 1836.22 1828.62 1822.72 1802.34 1781.79	3.68 4.07 4.15 3.90 3.94 3.83 3.958 3.830 3.947 » » » »	30 20 60 20 40 28 » » » » » » »	313.8 314.1 313.1 313.6 313.0 314.6 313.73 315.00 314.12 312.35 312.42 314.55	10 10 30 10 10 25 » » » » » » »	60.D 70.D 70.D 70.D 70.D 20.D » » » » » » »	D { A=5.7 bianca B=8.7 azzurra S { A=5.5 bianca B=7.8 azzurra Struve opina essere nullo il movimento.
2323	39 Draconis » » » » » » Medio Struve Herschel II Herschel I »	1852.721 1853.649 » 652 » 687 » 701 » 723 1855.206 1853.76 1833.20 1828.99 1802.83 1780.78	3.62 3.42 2.86 3.34 3.22 3.03 3.06 3.189 3.141 » » » »	30 50 60 60 30 60 41 » » » » »	359.9 357.6 357.3 360.3 359.1 361.0 362.1 1.84 5.91 0.00 6.32 12.68	6 25 25 30 5 30 30 » » » » »	80.S 60.S 50.S 70.S 70.S 60.S 60.D » » » » »	D { A=5.0 bianca B=8.0 azzurra notati una volta sola S { A=4.7 bianco giallo chiaro B=7.7 azzurra Struve opina esservi un lento movimento diretto, non può così valere come sembrava indicarlo l'angolo di Herschel II.

FATTE NEGLI ANNI 1852 — 53 — 54 — 55.

n° STUVE	NOME	Epoca	Distan- za	Peso	Posi- zione	Peso	l	Grandezze, Colori e Note
375	Tauri Poniatowski	1854.531	2.22	80	110.1	40	90°—	D {A=6.5} bianche {B=7.0} S {A=6.2} bianche {B=6.6}
	»	579	2.47	70	109.6	35	90—	
	»	587	2.27	80	110.9	40	70.D	
	»	614	2.31	70	110.1	35	70.D	
	»	628	2.19	90	109.8	50	70.D	
	Medio	1854.59	2.286	»	110.11	»	»	
	Struve	1829.10	2.236	»	108.12	»	»	
382	4 ε Lyrae	1853.613	3.42	60	»	»	»	D {A=5.0 bianca {B=6.4 azzurro cinerea S {A=4.6 bianco verde chiaro {B=6.3 bianco azzurro chiaro
	»	627	3.29	60	»	»	»	
	»	633	3.40	50	»	»	»	
	»	638	3.19	80	»	»	»	
	»	646	3.38	70	»	»	»	
		1854.592	3.59	90	21.0	45	50.D	
	»	628	2.93	39	19.1	35	90—	
	»	795	3.48	57	21.1	22	45.D	
	»	803	3.41	82	21.6	39	40.D	
		1855.212	3.11	35	19.4	24	90—	
	Medio	1854.22	3.352	»	»	»	»	* Il movimento retrogrado è indubitato. La differenza sarebbe nel senso voluto. Rigettati tutti gli angoli presi nel 1853.
	»	1854.81	»	»	20.52	»	»	
	Miller	1851.82	3.182	»	21.41	»	»	
	Smith	1842.59	3.2	»	20.6	»	»	
	Challis	1840.84	3.30	»	24.16	»	»	
	Struve	1831.44	3.034	»	26.06	»	»	
	»	1819.69	3.83	»	29.30	»	»	
	Herschel I	1779.83	3.41	»	33.92	»	»	
383	5 ε Lyrae	1853.611	2.49	50	147.4	25	70.S	D {A=5.0} bianchissime {B=5.3} S {A=4.9} bianchissime {B=5.2}
	»	624	2.76	80	146.9	40	70.S	
	»	632	2.59	100	146.8	50	70.S	
	»	641	2.57	100	147.2	50	70.S	
	»	643	2.60	80	147.0	40	70.S	
		1854.591	2.84	60	146.6	30	70.S	
	»	620	2.69	80	146.5	10	70.S	
	»	777	2.67	39	146.6	40	80.S	
	»	803	2.61	90	147.3	47	80.S	
	Medio	1854.10	2.642	»	146.96	»	»	Anche in questa coppia il movimento retro- grado è certo. La differenza è nel senso voluto.
	Miller	1851.82	2.489	»	146.73	»	»	
	Smith	1842.59	2.6	»	150.9	»	»	
	Challis	1840.85	2.545	»	151.86	»	»	
	Struve	1831.44	2.573	»	155.17	»	»	
	»	1819.73	3.43	»	160.30	»	»	
	Herschel I	1779.83	»	»	173.47	»	»	

MISURE MICROMETRICHE DI 127 STELLE DOPPIE E TRIPLE

N° STRUVE	NOME	Epoca	Distanza	Peso	Posizione	Peso	I	Grandezze, Colori, e Note
2452	Draconis 233	1851.625	5.58	56	219.0	30	20.D	D {A=7.0 bianca B=8.0 cinerea S {A=6.7 B=7.5} bianche
	»	628	5.50	56	217.9	43	80.D	
	»	645	5.61	44	219.0	34	60.S	
	»	705	5.53	72	219.9	41	10.D	
	»	707	5.63	77	219.7	35	20.D	
		1855.292	6.19	33	220.2	19	20.D	
	Medio	1851.77	5.631	»	219.18	»	»	
	Struve	1832.09	5.653	»	219.77	»	»	
2486	Cygni 6	1851.710	10.11	52	42.1	42	50.D	D {A=6.1 B=6.1 min. } bianco rossastro S {A=6.0 B=6.0 } gialle
	»	716	10.14	45	223.0	36	30.D	
	»	724	10.47	60	222.9	33	40.D	
	»	779	10.17	23	223.1	30	30.D	
	»	855	10.11	67	43.2	39	40.D	
	Medio	1851.76	10.211	»	222.84	»	»	
	Struve	1836.75	10.523	»	224.68	»	»	
	»	1832.48	10.460	»	224.83	»	»	
	»	1821.5	11.00	»	224.85	»	»	
2605	W Cygni	1851.549	3.18	40	181.8	40	80.S	D {A=bianca B=violetta } non notate le grandezze S {A=6.0 bianca B=7.5 cinerea
	»	557	3.27	30	178.8	20	80.S	
	»	557	»	»	181.9	30	70.S	
	»	562	3.48	30	182.5	25	90—	
	»	565	3.41	10	181.1	5	90—	
	»	570	3.24	40	182.6	40	80.S	
	Medio	1851.56	3.358	»	182.48	»	»	
	Struve	1831.39	3.322	»	181.58	»	»	
2613	Aquilae 210	1851.705	4.74	56	349.8	33	30.D	D {A=7.2 B=8.0 } bianche S {A=7.0 B=7.2 } bianco giallo chiaro All'occhio mio, presentemente, sono luti dall'essere pressochè eguali; e l'ò rimarcato molto attentamente.
	»	716	4.58	53	348.4	35	10.D	
	»	751	4.99	40	348.6	28	30.D	
	»	757	5.02	65	348.9	38	20.D	
	»	787	4.85	14	349.7	21	20.D	
	Medio	1851.74	4.836	»	349.03	»	»	
	Struve	1829.18	4.695	»	350.72	»	»	
2655	Anonima	1853.561	6.44	40	1.3	20	50.S	D {A=8.5 B=8.5 } colori incerti S {A=7.5 B=8.5 } bianche
	»	564	5.93	40	2.9	16	50.S	
	Medio	1853.56	6.185	»	2.01	»	»	
	Struve	1831.21	6.094	»	2.98	»	»	

FATTE NEGLI ANNI 1852 — 53 — 54 — 55.

N ^o FRUVE	NOME	Epoca	Distan- za	Peso	Posi- zione	Peso	I	Grandezze, Colori e Note
2644	P. XX. ^h 26	1833.706	3.59	30	210.0	15	10.S	D { A=7.0 bianca B=7.2 verde chiaro S { A=7.1 B=7.1 } bianchissime
		» 723	3.29	30	209.2	15	0—	
		» 750	3.53	20	209.0	10	0—	
		1854.762	3.71	38	210.6	32	0—	
		» 803	3.40	72	210.0	46	0—	
	Medio	1854.15	3.490	»	209.99	»	»	
	Struve	1830.79	3.342	»	207.57	»	»	Struve suppone esservi un movimento indi- retto.
	Herschel I	1783.	»	»	213.—	»	»	
2671	Anonima	1854.570	3.32	90	340.8	45	70.S	D { A=6.5 bianca B=7.5 azzurro cinerea S { A=6.0 bianca B=7.4 cinerea
		» 579	3.23	50	339.4	25	90—	
		» 581	3.17	80	340.1	40	70.D	
		» 584	2.93	90	341.6	45	90—	
		» 587	2.82	100	341.8	50	80.S	
	Medio	1854.58	3.073	»	340.93	»	»	
	Struve	1831.11	2.987	»	341.10	»	»	Struve ritiene per nullo il movimento.
2708	Anonima	1854.710	15.82	54	338.9	27	90—	D { A=6.9 gialla B=9.0 rosso azzurro S { A=7.0 gialla B=8.7 azzurra
		» 713	15.72	43	339.1	29	90—	
		» 716	15.87	61	338.5	32	90—	
		» 740	15.73	32	338.9	19	90—	
		» 751	15.82	52	339.7	39	90—	
		» 795	15.81	52	339.3	28	90—	
		1855.330	16.08	50	339.5	37	50.S	Lc differenze in angolo e distanza sono nel senso voluto.
	Medio	1854.82	15.844	»	339.17	»	»	
	Miller	1851.87	15.523	»	340.20	»	»	
	Dawes	1837.75	12.642	»	347.42	»	»	
	Struve	1836.58	12.157	»	348.38	»	»	
	»	1832.79	10.98	»	351.2	»	»	
	»	1828.80	10.48	»	355.0	»	»	Herschel II e South
	Herschel II e South	1823.68	9.562	»	360.52	»	»	
716	49 Cygni	1854.631	2.53	33	49.3	14	70.D	D { A=5.7 bianca B=8.5 azzurra, dubbio S { A=6.0 gialla B=8.1 azzurra
		» 633	3.13	35	48.6	25	70.D	
		» 639	2.86	54	49.4	31	70.D	
		» 702	2.84	62	51.5	37	10.D	
		» 710	2.76	41	51.7	27	10.D	
	Medio	1854.66	2.831	»	50.26	»	»	
	Struve	1830.61	2.736	»	49.42	»	»	Struve dice essere probabile un movimento negativo.
	Herschel I	1783.70	»	»	58.2	»	»	

FATTE NEGLI ANNI 1852 — 53 — 54 — 55.

N° STRUVE	NOME	Epoca	Distan- za	Peso	Posi- zione	Peso	1	Grandezze, Colori e Note
2742	2 Equulei	1854.558	3.31	30	223.4	10	10.S	D {A=7.6} bianche B=8.0 S {A=7.1 B=7.1 min.} bianchissime
	»	560	2.74	100	223.7	50	20.S	
	»	576	3.08	50	224.4	5	30.S	
	»	592	2.83	20	223.6	10	10.S	
	»	606	2.94	20	223.6	10	10.S	
	Medio	1854.58	2.921	»	223.70	»	»	
	Struve	1831.57	2.580	»	224.70	»	»	La distanza di questa stella mi riuscì sem- pre molto difficile.
2758	61 Cygni	1854.718	17.22	50	105.0	40	40.S	D {A=5.1 giallo all'arancio B=6.4 arancio puro, quasi sempre S {A=5.3 gialla B=5.9 gialla od aurea Le differenze sono nel senso voluto.
	»	724	17.21	61	105.6	40	0—	
	»	730	17.26	23	105.7	48	0—	
	»	732	17.34	59	105.7	37	0—	
	»	736	17.41	59	105.6	34	0—	
	»	737	17.24	31	105.7	30	0—	
	»	749	17.30	66	105.8	42	0—	
	Medio	1854.73	17.290	»	105.58	»	»	
	Struve	1836.57	16.080	»	94.40	»	»	
	»	1832.77	15.79	»	92.05	»	»	
	»	1828.72	15.31	»	89.40	»	»	
	»	1821.62	14.87	»	84.38	»	»	
762	P. XXI. ^b 1	1854.606	3.34	70	312.0	35	70.S	D {A=5.9 bianca B=8.5 azzurra S {A=6.0 bianco verde chiaro B=8.0 azzurro chiaro
	»	613	3.79	30	310.6	15	70.S	
	»	617	3.49	30	310.4	15	70.S	
	»	620	3.24	20	308.4	10	70.S	
	»	622	3.37	50	309.5	10	70.S	
	Medio	1854.62	3.446	»	310.73	»	»	
	Struve	1829.75	3.547	»	315.60	»	»	
	Herschel 1	1783.70	»	»	315.25	»	»	
301	Pegasi 29	1854.639	2.76	86	319.7	50	60.D	D {A=7.3} bianche B=8.1 S {A=7.0} bianche B=7.5
	»	699	2.93	68	320.7	34	10.S	
	»	705	2.81	55	320.4	35	10.S	
	»	741	3.32	60	321.3	14	0—	
	»	762	3.02	58	321.1	38	80.D	
	Medio	1854.71	2.953	»	320.52	»	»	
	Struve	1836.71	2.732	»	316.70	»	»	Nelle misure anteriori, Struve sospetta un incremento nell'angolo che poi nelle Mensurae Secundae trova non verificarsi.
	»	1831.62	2.900	»	316.90	»	»	

MISURE MICROMETRICHE DI 127 STELLE DOPPIE E TRIPLE

N° STRUVE	NOME	Epoca	Distanza	Peso	Posizione	Peso	I	Grandezze, Colori e Note
2806	β Cephei	1852.721	12.60	50	252.3	10	40.S	D { A=3.2 giallo chiaro B=7.9 violetto S { A=3.0 bianco verde B=8.0 azzurra Struve sospetta un lento movimento indiretto Diminuisce forse la distanza?
		1854.740	13.11	26	252.3	28	40.D	
		» 746	12.94	38	252.7	34	40.D	
		» 759	13.15	53	253.0	39	40.D	
		» 792	12.93	56	253.2	30	56.D	
		» 833	12.98	55	252.7	13	90—	
		Medio	1854.43	12.944	»	252.79	»	
		Struve	1832.26	13.574	»	250.03	»	
		Herschel I	1803.22	»	»	252.70	»	
		»	1781.97	»	»	254.53	»	
2822	μ Cygni	1853.731	4.87	10	117.3	5	70.S	D { A=4.7 giallo rossastro B=6.3 olivastro S { A=4.0 bianca B=5.0 bianco azzurro chiaro Se vi è un movimento angolare come ser- bra dalla differenza fra Struve e Herschel I, divario sarebbe nel senso voluto. Anche questo è uno dei pochi casi in cui mia distanza è minore di quella di Struve.
		» 747	4.67	20	118.1	10	90—	
		» 843	4.80	70	118.1	35	70.S	
		» 898	4.83	60	118.1	30	70.S	
		1854.535	4.50	80	116.3	40	10.D	
		» 590	4.36	70	116.6	35	0—	
		» 751	4.89	59	115.7	43	10.D	
		» 754	4.88	85	115.5	47	10.D	
		» 762	4.94	78	116.5	42	10.D	
		Medio	1854.29	4.740	»	116.63	»	
		Struve	1851.63	5.557	»	114.55	»	
		Herschel I	1789.55	»	»	109.27	»	
2863	ξ Cephei	1854.532	5.97	50	287.7	25	30.S	D { A= bianca B= rosso violetto, certo non notate le grandezze. S { A=4.7 giallo chiaro B=6.3 azzurra Struve deduce essere nullo il movimento tempo di Herschel I.
		» 538	5.92	30	287.8	15	30.S	
		» 543	5.92	80	289.0	20	60.S	
		» 549	5.79	50	288.1	25	70.S	
		» 558	5.96	60	287.6	20	70.S	
		Medio	1854.54	5.914	»	288.05	»	
		Struve	1831.77	5.600	»	288.90	»	
2909	ζ Aquarii	1854.749	3.94	37	345.2	18	10.D	D { A=3.9 } bianche B=4.3 } S { A=4.0 } bianche B=4.1 } Il movimento indiretto è certo. Struve su- pone che al suo tempo la distanza era in di- nuzione. La differenza nella mia posizione è nel sen- sivo.
		» 757	3.76	37	345.2	40	20.D	
		» 921	3.79	43	343.9	49	20.D	
		» 929	3.67	71	345.4	47	20.D	
		» 954	3.82	36	345.2	36	30.D	
		» 970	3.67	95	344.8	50	20.D	
		Medio	1854.88	3.745	»	344.89	»	
		Miller	1852.94	3.534	»	345.60	»	
		Mädler	1841.48	4.123	»	352.18	»	
		Struve	1836.05	3.389	»	352.71	»	
	»	»	1832.81	3.458	»	355.28	»	

FATTE NEGLI ANNI 1852 — 53 — 54 — 55.

n° STUVE	NOME	Epoca	Distanza	Peso	Posizione	Peso	I	Grandezze, Colori, e Note
947	Anonima	1854.581	3.46	80	251.1	40	70.0	D {A=7.4}bianche B=7.6 S {A=7.2 B=7.2 min. }bianche
	» 584	3.32	70	251.0	35	0—		
	» 592	3.28	50	69.8	25	80.0		
	» 606	3.40	70	71.3	35	60.0		
	» 614	3.24	70	71.2	35	90—		
	Medio	1854.59	3.350	»	70.96	»	»	
	Struve	1832.45	2.977	»	76.03	»	»	
950	Cephei 211	1854.642	2.54	29	315.6	31	10.S	D {A=6.5 gialla B=7.9 cinerea S {A=5.7 gialla B=7.0 cinerea
	» 702	2.33	39	317.9	23	50.S		
	» 707	2.27	80	317.3	41	30.S		
	» 718	2.15	63	316.2	40	30.S		
	» 731	2.51	53	315.4	33	10.S		
	Medio	1854.70	2.328	»	316.44	»	»	
	Struve	1832.25	2.040	»	319.10	»	»	
988	Aquarii 284	1854.639	3.59	38	279.6	43	80.S	D {A=7.7}bianche B=8.2 S {A=7.2 B=7.2 min. }giallo chiaro
	» 705	3.53	73	279.7	45	80.S		
	» 803	3.74	30	280.4	37	80.S		
	Medio	1054.72	3.594	»	279.89	»	»	
	Struve	1830.89	3.730	»	280.97	»	»	
001	o Cephei	1854.674	2.78	47	181.5	23	40.S	D {A=5.1 bianco giallo chiaro B=7.9 azzurra, certo S {A=5.2 giallo brillante B=7.8 azzurro intenso Colori cospicui. La differenza nella posizione è di +9° Evvi realmente un movimento diretto?
	» 792	2.64	50	181.9	26	50.S		
	» 811	2.63	37	183.2	32	60.S		
	» 880	2.24	35	183.6	24	70.S		
	» 935	2.52	95	185.6	34	70.S		
	Medio	1854.82	2.570	»	183.97	»	»	
	Struve	1832.84	2.353	»	174.97	»	»	
019	o Cassiopejae	1854.626	2.86	34	323.9	33	80.S	D {A=5.3 bianca B=7.7 azzurro cinerea S {A=5.4 verde B=7.5 azzurro decisivo Struve dice che non v'è nulla di certo circa al movimento, mentre il medio tra i due angoli di Herschel 1 che è = 324°.85 è quasi identico a quello preso nel 1833. È anche identico al mio pel 1854.
	» 699	2.92	61	326.6	45	60.S		
		1855.001	3.12	71	323.9	38	40.S	
	Medio	1854.77	2.993	»	324.95	»	»	
	Struve	1833.19	3.012	»	323.47	»	»	
	Herschel I	1804.44	»	»	319.23	»	»	
	»	1751.97	»	»	330.47	»	»	

MISURE MICROMETRICHE DI 127 STELLE DOPPIE E TRIPLE

N° STRUVE	NOME	Epoca	Distan- za	Peso	Posi- zione	Peso	I	Grandezze, Colori e Note
3050	Andromedae 37	1854.632	3.61	34	197.1	39	45.0	D {A=6.0}bianche {B=6.8} S {A=6.0}giallo chiaro {B=6.0} Presentemente sono molto diverse di gra- dezza. Forse B è variabile?
		» 639	3.77	85	197.1	43	45.0	
		» 696	3.44	56	196.7	29	80.S	
		» 721	3.64	50	195.4	27	80.S	
		» 724	3.75	78	195.9	42	80.S	
		Medio	1854.68	3.665	»	»	»	
		Struve	1832.65	3.780	»	191.03	»	
3062	Anonima	1854.880	Cuneif.	»	249.4	21	30.D	D {A=6.8 bianco rossastro {B=8.8 dubbio S {A=6.6}gialle Il tempo della rivoluzione è di circa 95 an- ni il movimento diretto. La differenza sarebbe nel senso voluto. Pre- sentemente sono sicuramente più di 1" distan- ti—che altrimenti non avrei potuto vederle se- parate.
		» 899	Bene separate	»	250.5	36	50.D	
		» 970	»	»	249.6	45	40.D	
		1853.001	»	»	249.6	37	30.D	
		» 078	»	»	250.0	32	10.S	
		» 091	»	»	250.1	31	20.D	
		Medio	1834.99	»	249.88	»	»	
		Struve	1836.61	0.466	»	146.38	»	
		»	1831.71	0.820	»	87.5	»	
		»	1823.81	1 1/4	»	36.7	»	
3127	δ Herculis	1854.770	21.88	38	177.9	46	50.D	D {A=3.0 giallo chiaro {B=9.1 azzurra S {A=3.0 verde {B=8.1 bianco cinereo Le differenze in angolo e distanza sono nel senso voluto.
		» 773	22.18	63	178.4	16	50.D	
		» 814	21.84	70	178.4	42	60.D	
		» 831	21.98	13	179.2	13	60.D	
		1855.168	21.80	23	176.0	27	50.S	
		» 275	21.79	40	176.1	20	50.S	
		Medio	1854.94	21.928	»	177.64	»	
		Struve	1836.58	24.883	»	174.78	»	
		»	1829.77	26.11	»	173.70	»	
		»	1820.69	»	»	172.93	»	
	Herschel I	1781.81	31.22	»	162.47	»	»	

FATTE NEGLI ANNI 1852 — 53 — 54 — 55.

Misure dubbie

In questa classe è creduto bene di mettere tutte quelle che non è osservate che una sola volta, ed una nelle cui misure non è alcuna confidenza.

N° STRUVE	NOME	Epoca	Distanza	Peso	Posizione	Peso	I	Grandezze, Colori e Note
127	Tauri 34 Struve Herschel II South	1855.116 1831.09 1828.96 1824.91	6.82 6.68 7.21 7.33	36 » » »	208.9 208.60 208.33 204.95	31 » » »	30D » » »	D {A=7.0 B=8.0} ambe azzurro chiaro, dubbio S {A=6.6 bianca R=7.4 bianco azzurro chiaro
160	Cephei 49. Ilev. » 215 Medio Struve » »	1855.168 » 215 1855.19 1836.45 1832.64 1828.28	Cuncif. » » 0.863 0.920 0.840	» » » » » »	364.5 371.6 367.79 355.80 354.57 349.55	17 15 » » » »	50.S 70.S » » » »	D=A+B=6.2+8.2 colore rossastro S {A=6.0 giallo chiaro B=5.0 cinereo chiaro Struve ammette probabile il movimento diretto, e la diff. fra la mia posizione e le sue sembra essere nel senso voluto. Ma le mie furono prese in pessime circostanze atmosferiche ed ero sempre in dubbio se il parallelismo aveva luogo.
53	26 Aurigae Struve	1855.130 1828.61	12.29 12.543	63 »	267.5 268.02	35 »	30.S »	D {A=5.0 giallo chiaro B=7.5 azzurra, suff. certi S {A=5.8 gialla B=8.0 azzurro chiaro Struve dice che Herschel II sospetta un lieve movimento indiretto. Non cita però misure anteriori alla sua.
11	Cancri 194 Struve Herschel I	1855.130 1831.31 1783.13	7.27 7.202 »	47 » »	200.6 200.50 204.8	25 » »	10.D » »	D {A=7.0 bianco azzurro B=8.0 bianca S {A=6.7 B=7.1} bianche
73	Anonima Struve	1853.595 1832.43	4.13 4.195	30 »	342.0 339.07	15 »	30.D »	Non notate nè le grandezze nè i colori. S {A=7.1 bianca B=8.1 cinereo chiaro
93	Anonima Struve	1852.866 1830.51	4.27 4.563	100 »	24.3 26.67	20 »	60.S »	Non notate nè le grandezze nè i colori. S {A=7.7 B=8.0} bianche
31	73 Ophiuchi Struve Herschel I	1855.303 1831.05 1783.32	1stima 1.543 »	» » »	253.4 259.73 267.2	26 » »	90— » »	D {A=7.0 l'aria non era favorevole B=9.5 per assegnarne i colori S {A=5.7 B=7.2} bianche Struve suppone esservi un lento movimento indiretto. La differen. sarebbe nel senso voluto.

MISURE MICROMETRICHE DI 127 STELLE DOPPIE E TRIPLE

Misure rigettate

In questa classe è messo tutte quelle che non si accordano nè colle misure di Struve ed altri osservatori, nè tampoco colle mie stesse posteriormente.

N° STRUVE	NOME	Epoca	Distan- za	Peso	Posi- zione	Peso	1	Grandezze, Colori e Note
716	118 Tauri	1851.997	»	»	200.2	6	40.0	La differenza di 4° fra il mio angolo e quello di Struve, mi aveva fatto sospettare un movimento diretto—Le posizioni osservate più tardi di misero fuori di dubbio che avevo errato. Credo che l'errore sia dovuto in gran parte all'aver osservato colla congiungente a quasi 45° dalla verticale.
		1852.039	»	»	199.6	16	»	
		» 053	»	»	199.9	6	»	
		» 193	»	»	200.4	4	»	
		» 223	»	»	202.0	10	»	
		» 264	»	»	201.5	10	»	
		» 272	»	»	201.1	12	»	
		» 283	»	»	200.0	14	»	
	Medio	1852.16	»	»	200.54	»	»	
	Posizione poster. Struve	1854.85	»	»	197.47	»	»	
		1829.63	»	»	196.78	»	»	
774	ζ Orionis	1854.198	»	»	157.7	5	40.0	Ho rigettata questa posizione perchè pessime circostanze atmosferiche, e differisce di 6°.5 dalla media di tutte le altre, che sono comprese entro 149°.3 e 153°.3.
1835	P. XIV. ^h 69	1853.504	»	»	189.5	20	30.0	Anche in questa avevo supposto un movimento diretto; che poi le osservazioni posteriori non hanno constatato—anzi l'angolo è identico a quello di Struve.
		» 509	»	»	190.5	20	»	
		» 513	»	»	191.4	40	»	
		» 515	»	»	190.7	30	»	
		» 517	»	»	190.9	30	»	
	Medio	1853.51	»	»	190.73	»	»	
	Posizione poster. Struve	1855.16	»	»	186.68	»	»	
		1832.08	»	»	186.47	»	»	
2104	Anonima	1853.590	»	»	21.4	10	40.0	L'angolo 21.4 è evidentemente erroneo, mentre quello posteriore è identico all'angolo di Struve.
	Posizione poster. Struve	1855.206	»	»	19.7	»	»	
		1829.35	»	»	19.63	»	»	
2382	4 ε Lyrae	1853.613	»	»	23.5	30	60.0	L'angolo 24°.48 è in aperta contraddizione col mio 20°.52 e coll'andamento generale delle misure anteriori.
		» 627	»	»	23.1	30	»	
		» 635	»	»	23.2	25	»	
		» 638	»	»	23.8	40	»	
		» 646	»	»	25.3	25	»	
	Medio	1853.63	»	»	24.48	»	»	
	Posizione poster. Struve	1854.81	»	»	20.52	»	»	

FATTE NEGLI ANNI 1852 — 53 — 54 — 55.

Misure dimenticate

NOME	Epoca	Distanza	Peso	Posizione	Peso	I	Grandezze, Colori e Note
30 Cephei 49 Hevelii	1855.168	Cuneif.	»	364. ⁰ ₅	17	50. ⁰ _S	<p>D { A=6.2, rossastro B=8.2 } S { A=5.0 giallo chiaro B=6.0 cinereo chiaro</p> <p>Struve ammette essere molto probabile un movimento diretto. La mia posizione differisce nel senso voluto; ma la ritengo per molto dubbia; perchè le due osservazioni sono state fatte in pessime condizioni atmosferiche, e mi lasciarono molto da desiderare.</p>
» 215	»	»	»	371.6	15	70.S	
Medio	1855.19	»	»	397.79	»	»	
Struve	1836.45	0.863	»	355.80	»	»	
»	1832.64	0.920	»	354.57	»	»	
»	1828.28	0.840	»	349.55	»	»	
21 z Bootis	1855.231	12.61	25	238.0	19	30.D	<p>D { A=4.0 giallo chiaro B=6.0 cinereo olivastro, certi</p> <p>S { A=5.1 verde chiaro B=7.2 azzurro chiaro</p> <p>Non essendo stata osservata che una sola volta, questa sarebbe da mettere nelle misure dubbie. Struve suppone che vi sia un lento movimento negativo.</p>
Struve	1832.50	12.597	»	237.71	»	»	
Herschel	1802.67	»	»	240.68	»	»	
»	1783.30	»	»	242.32	»	»	

M E M O R I E

P E R L E

SCIENZE NATURALI

P R E S E N T A T E

DA' SOCI ALL' ACCADEMIA NELL' ANNO 1855.

E DA ESSA APPROVATE.

DESCRIZIONE
DI ALCUNI PESCI FOSSILI DEL LIBANO

DEL SOCIO ORDINARIO

O. G. COSTA.

Il Libano, come ognun sa, è un monte eccelsso dell'Asia, troppo celebre nelle pagine della S. Bibbia. La sua posizione geografica è sul grado 34° di latitudine boreale; e la sua longitudine è di gradi 55 dal primo meridiano. Si estolle il suo acrocoro sull'attuale livello del mare per 1700 tese (1); e quindi 200 tese di più del nostro Gran sasso d'Italia. La sua base si estende a tramontana siffattamente, che le acque del Mediterraneo la bagnano. E però da questo mare resta esso con la Siria tutta disgiunto dal continente europeo, tramezzandovisi le isole di Cipro e di Candia sul medesimo parallelo.

Ricordiamo tali cose perchè, s'egli è vero che il Mediterraneo fu altra fiata disgiunto dall'Oceano, formando a sè solo un bacino; è pure evidente che le due opposte sponde furono contemporaneamente e dalle stesse acque bagnate e coperte: e che, quando l'acrocoro del Libano usciva dalle onde, l'Italia e le regioni intermedie con le isole già nominate, restavano ancora sommerse. Quindi le vicissitudini

(1) Questa misura appartiene all'acrocoro posto a tramontana di Baalbek, nella Siria; punto culminante tra tutti di quella estesa catena che va sotto la denominazione di Libano. L'altezza di tese 1491 appartiene al Dummel-Mazreb. Quella dell'Orebbe è di tese 1409; e così di altre.

di questo bacino an dovuto sentirsi ugualmente d' ambi i lati : e la Fauna marittima esser quasi la stessa, se n' eccettui le differenze causate dal clima , o dal grado diverso di latitudine sotto del quale le diverse regioni son poste. Le ricerche istituite fin qui , e quelle che saranno più tardi compiute , debbono perciò svelarci le relazioni geognostiche che esistono fra essi : e le differenze stesse potranno sparger lume , onde pervenire a conclusioni meno incerte e più logiche. Arroge ancora l'esser io fermo nel credere che non siasi ancor scoperto a bastanza di quel che la crosta terrestre racchiude per istabilire leggi non vacillanti di successione nelle rivoluzioni e mutamenti del nostro globo , quali ora si pretende doversi tenere per ferme. Mi permetterò qui ripetere , che *sia miglior consiglio lo attendere a fortificare più sempre l'edifizio paleontologico, con migliore studio de' documenti ottenuti e con altri non ancora svelati ; che lo stabilir leggi sopra brani assai scarsi per rapporto alla vastità della superficie del pianeta che abitiamo.*

Il soggetto che ci sta per le mani ci porge di fatto una prova in appoggio di tale mio divisamento. Si è cercato stabilire a qual delle formazioni appartenghi la calcarea ad ittioliti di *Saeh el Almu*: e mentre l'uno la riferisce, nè senza dubbio, ad epoca intermedia tra la giurese e la cretacea ; ed altri tra la cretacea recente e la terziaria ; il *Pietet* trova nella mancanza di pesci dell' ordine de' Ganoidei e nella presenza del genere *Beryx* un appoggio all'opinione del Botta, il quale crede doversi riferire quel terreno al cretaceo.

Ora, se non mi sono ingannato, si trova in realtà un esempio di *Ganoidei* fra le quattro specie che si descrivono ; ed un' altra specie del genere *Beryx*. Quest' ultimo genere ha un migliore rappresentante nella calcarea tenera di Lecce ; che del tutto somiglia a quella dell' indicata località del Libano , seppure non sono identiche affatto. Quindi la complicazione parmi cresciuta , e la soluzione del problema esigere maggiore studio e documenti ulteriori e più chiari.

Per queste ed altre ragioni la Paleontologia del Libano e di tutte le coste dell'Asia e dell'Africa bagnate dal Mediterraneo , dev' essere tenuta presente da chi versa sulla geologia della Italia. Io non ho trascurato far tesoro d' ogni frammento che ò potuto procacciarmi , e che aver possa qualche rapporto anche lontano con quel che forma il soggetto delle attuali mie lucubrazioni.

E poichè cade in acconcio, voglio anche manifestare un pensiero che mi sta fitto nella mente. Le coste dell'Albania sono certamente in più strette relazioni con queste d'Italia, come più propinque, e perchè ebbero a chiudere il bacino dell'Adriatico. La geologia e la Fauna antica e moderna degli Acrocerauni devono perciò costituire un soggetto di alto interesse per chi coltiva queste parti delle scienze naturali, e specialmente per gl' Italiani. Per me è solo un ardente desiderio, che mi è lecito appena annunziare e lasciarlo.

Ritornando al Libano, venivami il destro di ottenere alcuni esemplari di pesci fossili di quel monte; e li debbo alla cortesia del Prof. D. Giuliano Giordano, a cui facevano dono il Conte di Rayneval. Malgrado la pochezza, io gli studiai con molta avidità, e mi parve intravedervi qualche cosa di rilevante.

Di ittioliti del Libano molti ne possiede il Museo del Giardino delle Piante di Parigi, quello di Berlino, di Vienna, di Zurigo e di Ginevra; ne posseggono i signori Fillips, Brongniart, Amie, Agassiz ed altri. Ciò malgrado pochissimi ne sono stati descritti e pubblicati. Vi à chi afferma, che Eusebbio avesse conosciuta la esistenza de' pesci fossili del Libano. Certo è però che Gnetard pel primo ne à discorso nel terzo volume delle sue Memorie (1), effigiandone anche taluni. L'Agassiz ci à data conoscenza di otto specie, e s'imprometteva pubblicarne alcune altre di quelle che rimettevagli Giulio Amie in disegni. Il Bottà attendeva il suo ritorno a Parigi per pubblicare egli stesso quelli che spediva al museo di quella metropoli; ma senza avverarsi. Una specie è stata descritta da sir Filippo Grey Egerton. Il chiarissimo Ittiologo Viennese sig. Heckel ne à descritte quattro fra gl' ittioliti della Siria (2). Recentemente il Pictet di Ginevra ne à illustrati 25, venti de' quali dichiara l'A. esser nuovi. Si conoscono dunque in questo momento 33 specie del Libano.

Ciò malgrado fra le quattro specie che ò potuto determinare, non ve n'è una che si potesse a quelle riferire. Che anzi, sia illusione, sia una migliore conservazione degli esemplari, sia infine l'ef-

(1) Nuova collezione di Memorie sopra differenti parti delle Scienze e delle Arti; v. ol. III, in foglio 1786.

(2) Figure e descrizione de' Pesci fossili della Siria, Stuttgart, 1843, 8.º con figure in foglio.

fetto di più analitico studio apportatovi; due di tali specie debbono costituire il tipo di altrettanti generi nuovi. Una terza specie spetta al genere *Beryx*, ritenendo per tale quella descritta dal Pictet sotto nome di *Beryx vexillifer*. La quarta, mentre per un lato rischiarà, a creder mio, un dubbio nel quale restava l'Agassiz, e che ora rafforza il Pictet, seppur nol dimostra, come egli crede; dall'altro ci mostra il bisogno di più altri e migliori documenti, e di più accurato studio. È questo il nostro *Rhamphornimia rhinelloides*, il quale per taluni caratteri dovrebbe entrare nel genere *Rhinellus* qual si ritiene dal Pictet, mentre per altri si lega al *Dereetis* di Munster (1); riunendo in sé in pari tempo i caratteri separatamente trovati dall'Agassiz in due diversi monconi. Ma trovandovi una pinna dorsale anteriore, singolarissima per grandezza e struttura, mi son trovato maggiormente forzato esibirlo con un nome generico distinto, almeno provvisoriamente, fino a chè non saremo chiariti da nuovi esemplari meglio conservati.

Persuasos da ultimo, che in questo genere di ricerche non vi à frammento che non tornasse utile; perciocchè, rarissimi essendo gli esemplari in ogni parte completi, i molti mutilati si rischiarano a vicenda; ò eredito aggiungere alle quattro suddette specie la conoscenza di due pesciolini, malgrado che non siano ben determinati. Di essi non si à che il solo scheletro osseo, ed anche incompleto. In uno parmi vedere l'analogo del *Sarginites pygmaeus* tanto abbondevole nella calcarea di Pietraraja; e nell'altro un pesce anguilliforme, senza potersi avvicinare ad alcuno de' generi conosciuti di questa famiglia, non essendo apode, ed avendo al contrario una pinna codale singolarissima per la sua composizione scheletrica.

ORDINE 1.º CTENOIDEI

FAMIGLIA DE' PERCOIDEI

Genere BERYX; Cuv.

Beryx niger, Cos, Tav. II, fig. 1.

Si troverà forse strano il nome specifico di questo pesce, ugual-

(1) Agass. II.

mente che quello dell' *Imogaster*, trattandosi di pesci fossili. Nulla-
meno abbiamo la certezza di essere così colorate in massina parte le
squame che rivestono questi pesci, come se fossero nello stato loro
nativo. Nè poi crediamo tali nomi più sconci di altri capricciosi, o
poco appropriati ai caratteri organici che ne presentano.

La fisionomia di questo pesce è molto simile a quella dell' *Apogon
Rex-mullorum* del nostro Mediterraneo.

Il capo è sì grosso che entra appena due fiate nella lunghezza
del corpo, compresa la pinna codale; e rassomiglia molto a quello della
Percu gigas. La scissura boccale è lunga poco meno della metà della
lunghezza del capo medesimo; la mandibola è alquanto men lunga
degli intermascellari; entrambi sono dritti ed inermin. I sotto-orbitali
sembrano sottilmente striati. Il preopercolo è quasi ritondato; l'infero-
percolo angoloso; e l'opercolo prolungato in una punta acuta diretta
in giù: tutti questi pezzi sono coperti di piccole squame.

L'osso scapolare è largo, marginalo da un risalto che si proten-
de in giù, permutandosi in un aculeo lungo e delicato, il cui estre-
mo manca. Dietro di esso spiccano le pettorali, piccole, dilatate a
foggia di ventaglio, e formate da raggi delicatissimi, de' quali si con-
tano quindici nettamente.

L'unica *pinna dorsale* sorge nel mezzo della intiera lunghezza del
corpo; essa è triangolare, composta di 15 a 16 raggi, dei quali i due
primi anteriori più bassi e gracili, il terzo di tutti più lungo e più
robusto; gli altri gradatamente discendono: occupa essa con la sua
base la metà anteriore del profilo dorsale; la sua altezza pareggia i
 $2/5$ dell'altezza maggiore del corpo.

La *pinna anale* comincia a sorgere in corrispondenza del termi-
ne della dorsale, e si estende un poco meno di quella; essa è però mol-
to lunga ed acuta, per quel che mostrano le tracce lasciate dalla por-
zione estrema de' raggi asportati; si compone di 9 raggi, il secondo
de' quali consiste in un grosso aculeo, preceduto da altro minore, e
seguito dai rimanenti sette gradatamente men lunghi e delicati.

Le *ventrali* hanno lasciato di sè appena un vestigio, dal quale
può dedursi essere piccolissime; sono impiantate in corrispondenza della
linea perpendicolare abbassata dall'origine della dorsale e che passa per
la base delle pettorali.

La *codale* è forcuta, col lobo inferiore alquanto più lungo del superiore; ciascuno di essi è sostenuto da sei raggi bifidi, sicchè dopo l'origine ciascun lobo à 12 raggi articolati; la cingono d'ambo i lati tre raggi accessori o fuleri.

La *colonna vertebrale* si compone di 26 vertebre, grosse, sensibilmente ristrette nel mezzo, più larghe che lunghe; tutte guernite di apofisi verticali robuste.

L'*osso innominato* è dritto e robusto.

La *corazza* vien costituita da squame di mediocre larghezza, a margine posteriore subangolato, e guernito di punte acute e cigliate; la loro superficie è finamente striata. Di esse si trovano sopra i pezzi opercolari; e ricuoprono la base della pinna codale quasi fino all'origine della seconda biforcazione de' suoi raggi. Se ne contano 40 serie nella lunghezza, e 21 sopra le serie della maggior larghezza del corpo.

La *linea laterale* è ben apparente; essa sorge al di sopra dell'angolo scapolare, dopo breve tratto s'inarca per farsi parallela al profilo dorsale, e presso al peduncolo codale si scaucella senza raggiungere la colonna vertebrale.

Lunghezza totale del pesce = 0,068.

Massima altezza del corpo = 0,025.

Dalla descrizione ugualmente che dalla figura risulta, che questo esemplare è forse il più completo di quanti se ne sono descritti di quella calcare del Libano. Laonde non lascia alcuna dubbiozza nella sua diagnosi.

FAMIGLIA DEGLI **SQUAMIPENNI**

Genere *Imogaster*, *Cos.*

Non è da maravigliarsi se di tal pesce facciamo il tipo di un genere distinto, mentre presenta molti tratti di affinità coi *Pigei*. Lo stesso Agassiz dichiarava, che nel costituire il genere *Pigaeus* egli era stato costretto a riunir molte specie, che *non hanno nè lo stesso aspetto, nè la stessa forma, nè le stesse proporzioni ne' particolari della struttura delle natatoje; e che probabilmente sarebbe convenuto un giorno smembrarlo, per farne tanti generi per quante sono le specie.*

Di fatto, sebbene nel pesce che forma il soggetto di questo articolo trovisi una sola pinna dorsale continuata, essa non è sì prossima al capo, come nella specie tipo (il *P. gigas*), nè à sì gran numero di raggi spinosi nella porzione anteriore da uguagliarsi alla porzione posteriore di raggi molli (come nel *P. nobilis*, al quale più si accosta la nostra specie), e che in altre specie è anche maggiore; nè i raggi spinosi sono sì grossi come si vogliono in generale nei Pigei: infine l'anale non è meno estesa della dorsale.

Comparando il nostro *Imogaster* col *Pagellus Libanicus*, Pict. vi si scorge tanta simiglianza, che forse non farebbe punto esitare per ritenerlo in tal genere, e forse anche come specie identica a quella: e ciò tanto maggiormente, in quanto che appartengono alla stessa località. Ma la certezza in cui sono della mancanza assoluta di denti di qualsiasi natura in ambe le mascelle, e la posizione delle pinne ventrali addominali, sono caratteri di tale importanza, che lo escludono per fino dalla Famiglia degli *Sparoidei*. Il Pictet non à potuto assicurarsi di tali cose, perchè l'esemplare ch'egli ebbe è molto guasto; e pare che siasi lasciato guidare dalla sola forma del pesce. Con ciò non si pretende escludere la possibilità che sotto una forma stessa, ed una esterna organizzazione quasi identica, non si possano trovare due specie di genere diverso. Forse sotto quella forma si racchiude realmente un *Pagello*, ma nel nostro non mai.

I caratteri del genere *Imogaster* sono:

Pinna dorsale unica che si estende fino alla base della codale, avendo nella parte anteriore raggi piccoli e molli fino al capo.

Pinna anale ugualmente estesa, avente per primo raggio un grosso aculeo.

Ventrali addominali.

Mascelle inermi.

Squame lungamente cigliate.

Imogaster auratus, Cos. Tav. 1. fig. 2.

Il capo è tanto grande, che costituisce esso solo i $2\frac{2}{5}$ della intera lunghezza del pesce, esclusa la pinna codale. La scissura boccale è lunga; gl'intermascellari e le mandibole inermi.

Gl'intermascellari sono molto estensivi, e ciascuno à nella estremità una parte un grosso tubercolo, riuniti insieme nella sinfisi.

Il mascellare superiore (*labiale* Cuv.) è valido, e solcato longitudinalmente. I pezzi opercolari semplici; l'opercolo largo e ritondato; il preopercolo è un poco angolato; tutti poi rivestiti di squame.

L'*osso scapolare* è molto sviluppato, largo, e profondamente scapolato, quasi dritto, incurvato solo un poco alla estremità anteriore o inferiore.

La *pinna dorsale* comincia a sorgere immediatamente dal capo, con piccolissimi raggi molli, i quali cominciano a convertirsi in lamine ed elevarsi dopo che à trascorso un quinto dell'arco dorsale; o sulla linea che perpendicolarmente scendendo passa tangentialmente per l'angolosità dello scapolare. Quivi gradatamente si eleva, formando una porzione di uguale estensione, ma alla in modo da uguagliare la metà dell'altezza maggiore del corpo. I raggi di questa parte elevata sono laminari, articolati, e diversamente ramificati. Il primo è delicato; il secondo lanceolato con una linea rilevata nel mezzo; il terzo sottile come il primo; il quarto lanceolato con un ramicello anteriore sottile; il quinto è di tutti il più lungo, articolato, e biforcuto in cima; le lamine sono concave nellati, e quindi con spigoli crescenti nel numero a seconda delle ramificazioni successive; i successivi divengono sempre più angusti e più ramosi, prolungandosi nell'estremità in filamenti lunghissimi, che sulla roccia lasciano appena intravedersi col soccorso di acuta lente; sempre alternando nella larghezza (1); quattordici a quindici raggi compongono questa parte elevata, de' quali il nono è di tutti il più lungo. Abbassandosi indi rapidamente, si protende fino alla base della pinna codale, sempre con raggi laminari e ramificati (bifidi per lo più) (2).

La *pinna anale* comincia con un grosso raggio aculeato, e solcato, preceduto soltanto da un altro piccolissimo; seguono due altri più larghi, e poi i rimanenti gradatamente abbassandosi, ma tutti ramificati fin dalla base. Questa pinna si estende ugualmente che la dorsale fino alla coda; vi si contano 17 raggi, oltre il grande aculeo anteriore.

(1) Credo che questa alternativa sia apparente, e figlia del modo come l'uno all'altro si accolla per gli spigoli.

(2) La pinna dorsale del *Petalopteryx Syriacus* Pict. à i suoi raggi anteriori della medesima struttura: solamente le lamine sono più larghe, e più divaricate le ramificazioni, giusta la figura che ce ne dà il Pictet, Pl. 3, f. 1.²

Le *pettorali* sono di mediocre grandezza, larghe, rotondate ed aperte a modo di ventaglio; sono sostenute da dodici raggi delicati e ramosi.

Le *ventrali* nascono un poco più in dietro delle pettorali, di mediocre grandezza, ed hanno un primo raggio molto robusto; gli altri sono riuniti in fascio, e quindi non si possono numerare.

La *pinna codale* a quel che vedesi dev'essere forcuta; ma interrotta qual'è non può ben descriversi.

La *colonna vertebrale* si compone di 25 vertebre, di cui 11 spettano al tronco, e 14 alla coda; il loro corpo è obbliquo, più largo che lungo, e liscio. Le toraciche mancano di apofisi trasversali inferiori, le quali cominciano a comparire nelle due penultime.

L'*osso innominato*, come vedesi, è dritto, lungo, e sottile, dilatandosi un poco presso la estremità superiore. Innanzi ad esso, e quindi innanzi l'apertura anale, si genera un'angolosità rivestita da lamina solida senza squame, ma tutta ugualmente smaltata: essa sembra sovrastare di lato, e sopra due lobi che tramezzano a queste angolosità laterali. Il margine ventrale, intercelto tra le catope e questa angolosità, è rivestito da squame più folte, meglio embricciate, e forse anche più solide, sicchè questa parte eminentemente rileva.

Le *squame* sono ovato-rotondate, più larghe che lunghe, guernite nel margine libero di lunghi, acuti e disuguali cigli; la superficie è finamente striata, e le strie concentriche. Di tali squame è coperta la base della codale fino alla seconda loro biforcazione; se ne veggono pure minutissime sopra i raggi dell'anale. Tutte sono di color giallo dorato, passando al rossigno.

Lunghezza totale del pesce = 0,084.

Altezza maggiore del corpo = 0,043.

Dalla descrizione risulta ben chiaro essere questo un pesce della famiglia degli *Squamipenni*, prossimo al genere *Microstoma*, e quindi ai *Pleuronettidi*, de' quali, tolta la simmetria, à la maggior parte de' caratteri. Disconviene dai *Microstoma* perchè le pinne verticali non sono così allungate, sicchè avesse almeno la fisionomia dei *Chetodonti*.

Dando uno sguardo attento all'*Osmeroides megapterus* Pict. è facile avvedersi de' molti tratti di analogia tra questi due pesci, senza però convenire.

ORDINE II. CICLOIDEI

FAMIGLIA DEGLI **SCOMBEROIDEI***Genere* **OMOSOMA**, *Cos.*

Se la presenza delle squame non dissuadesse, avrei riferito il pesce di cui qui si tratta al genere *Centrolophius*; tutti i caratteri accordandosi quasi completamente con quelli. Chè se mancano gli aculei anteriori alla dorsale, essi non sono apparenti all'occhio nudo neppure nell'individuo fresco; stando nascosti in un solco profondo; molto meno nel fossile, nel quale non si possono cercare e scuoprire. Ritenendo noi che mancassero realmente, non trovandone vestigio alcuno; e certi che il corpo è rivestito di squame piccole, lisce e concentricamente striate, non possiamo meglio accostarlo che ai *Centrolophi*, separandonelo però sotto un tipo generico distinto, per i due enunciati caratteri.

Omosoma Saeh-el Almae, *Cos.* Tav. I. Fig. I.

La forma di questo pesce è regolarmente allungata tendente all'ovale, avendo il profilo dorsale e ventrale ugualmente archeggiati, ed il corpo compresso.

Il capo è di mezzana grandezza, misurando due fiate il corpo, meno i lobi della pinna codale. La scissura boccale mediocre, ed obliqua. Gl'intermascellari ed i mandibolari armati di denti piccoli, rari, ed acuti. Gli opercoli lisci, e rotondati.

La *pinna dorsale* comincia ad apparire sul terzo anteriore con raggi piccoli e semplici, i quali gradatamente si elevano fino a poco oltre la metà del dorso, ove uguagliano la distanza tra questo e la colonna vertebrale; indi abbassandosi gradatamente giungono fino al peduncolo codale; i più alti sono ramosi in cima, gli altri son semplici: se ne possono contare in tutto 45.

La *pinna anale* comincia a spiccare alquanto più in dietro dell'origine della dorsale, con raggi mezzanamente lunghi, che tosto si abbreviano, e molto bassi si protendono ugualmente che nella dorsale.

Le *pinne pettorali* sono piccolissime, e ne avanzano solo alcuni raggi delicatissimi, che poggiano su due ossi, de' quali sarà detto qui appresso.

Le *ventrali* loro corrispondono perfettamente; ma di esse non si trovano che i monconi basillari de' primi e più grossi raggi.

La *pinna codale* è regolarmente sviluppata, biloba, regolare, composta di raggi molto ramificati.

Lo *scheletro osseo* è gracile in generale. La colonna vertebrale à 33 vertebre tutte guernite di apofisi verticali e lunghe, che raggiungono i margini del corpo, ove vengono l'estremità intercalate dagl'interspinali, ancor essi molto lunghi. Le addominali hanno ancora costole gracili e lunghe, che chiudono la cavità. Dal gomito dello scapolare partono due ossi lunghi, cilindracei, i quali inarcati leggermente scendono fino al profito toracico, ove con le loro punte acute si uniscono, e forse si saldano. Queste punte corrispondono alla metà della lunghezza delle pinne pettorali.

L'*osso innominato* è angusto, e scende quasi verticalmente sul profilo ventrale, presso del quale dilatasi e divien laminare. La sua struttura è fibbrosa, come apparisce.

Le *squame* sono piccole, ovali, semplici, e concentricamente striate.

Lunghezza totale del pesce = 0,090.

Maggiore altezza del corpo = 0,032.

ORDINE III. GANOIDEI

Genere RHAMPHORNIMIA, Cos.

Non al genere *Rhinellus* Ag., nè al *Directis*, Muns. possiamo riportare il pesciolino che forma il soggetto di questo articolo, come a primo sguardo parrebbe, ponendo mente alla forma del rostro, e alla presenza degli scudi che si trovano sul corpo. L'esemplare che si tiene presente, riunisce questi due caratteri, che l'Agassiz trovava separatamente su due diversi monconi, e che riuni come spettanti ad un medesimo pesce, di cui fece il tipo del suo genere *Rhinellus* (1). Non-

(1) Agass. *Recher.* vol. II. pag. 260 (Par. II.) Pl. 58^e fig. 5 e 6. — Pictet, Mem. dell' Accad. di Ginevra XII, P. II, pag. 316 Pl. 8, fig. 3 e 4.

dimeno il nostro ittialito, proveniente dalla stessa località à un carattere importante, che non trovasi nè fra i monconi che possedeva l'Agassiz, nè fra i *Directis*, ai quali il Pictet riporta il moncone codale (Agass. Pl. 58, fig. 6).

Altronde il nostro *Rhamphornimia* enlrar deve evidentemente nell'Ordine de' *Ganoidei*, per la natura delle squame, di cui non ebbero a trovar traccia nè l'Agassiz, nè il Pictet ne' loro ittioliti de'sudetti generi.

Caratteri del nostro genere *Rhamphornimia* sono:

Rostro gracile e prolungato, come nel genere *Rhinellus*.

Scudi lanceolari sul mezzo della corazza come nel genere *Directis*.

Pinna dorsale lunghissima, sostenuta da un grosso aculco che spicca dietro la nuca immediatamente (1).

Pinne pettorali assai grandi.

RHAMPHORNIMIA RHINELLOIDES, Cos. Tav. II. fig. 2.

Il corpo di questo pesciolino non può definirsi con precisione mancando di gran parte della porzione codale; nondimeno egli è chiaro che esser deve molto allungato e gracile, giudicando dalle proporzioni che serba la parte anteriore.

Il capo è piccolo, nè dissimile da quello del *Rhinellus furcatus*, Agas. (2). Il rostro è però sensibilmente rivolto in su; nè pare che ciò derivasse da spostamento sofferto, sendo l'incurvatura assai regolare e senza fratture; la mandibola è ricoperta di lamine quadrilatere larghe quanto la mandibola stessa, ma la lunghezza è la metà della larghezza; quindi una sola serie per tutto. La lunghezza del rostro è maggiore di quella del capo, ma non può dirsi di quanto lo supera, essendo interrotto.

La *pinna dorsale* che nasce immediatamente dietro del capo vien costituita da un grosso aculco lungo più che tre volte la lunghezza del capo (eccetto il rostro), avente nel mezzo della faccia sua laterale,

(1) Ignoriamo se altra ve ne sia posteriore, essendo l'esemplare incompleto.

(2) Agass. II, p. 260 (Par. II.^a) Pl. 58^e f. 5 (non 6.) Pictet, Mem. dell'A. cad. di Ginev. vol. XI, P. 2^a p. 316, Pl. 8, fig. 3 e 4.

un grosso spigolo. Pare ch'esso dilalandosi tendesse a biforcarsi, poichè dalla parte posteriore vedesi una espansione laminare che verso la metà della lunghezza comincia a dividersi dal corpo dell'aculeo, divaricando; questa lamina posteriormente si attenua. Nell' anterior parte altronde lo stesso aculeo sembra rafforzato da altro raggio minore e più breve, o esso stesso è nella base più grosso e scanalato.

Le *pettorali* sono lunghe quanto i due terzi della dorsale, e larghe di questa assai più; esse sono sostenute da due grossi raggi anteriori, restando in dietro una larga espansione membranosa senza altri raggi. La loro figura è lanceolare, o simile a fronda di ulivo.

La lunghezza degli scudi che rivestono il corpo è uguale a quella de' simili che vestono il rostro.

Tanto sul limite inferiore addominale, quanto sul superiore o dorsale avanzano porzioni della corazza; le quali ci mostrano esser questa formata di squame quadrilatere alquanto romboidali, un poco più larghe che lunghe, disposte regolarmente in serie, un poco oblique nel senso trasversale, ma dritte nel longitudinale. Nel mezzo si trovano degli scudi triangolari acutangoli, un poco embricciati; se ne veggono taluni regolarmente in sito, altri dissestati, sendo che la posterior parte del corpo, come vedesi, è molto guasta.

Da quanto si è detto emerge chiaramente, che non può questo nostro esemplare assimilarsi genericamente col *Rhinellus* dell' Agassiz (tav. 38⁶ fig. 5), nè con quello del Pictet (tav. 9. f. 3). Il primo vuol essere rivestito da tre serie di scudi lanceolari molto grandi, senza squame di altra natura e forma; il secondo à una pinna dorsale molto posteriore, senza alcuna altra, e della forma e struttura comune di tali appendici.

Pensa il Pictet, che il moncone codale rappresentato dall' Agassiz nella tav. citata fig. 6, debba riferirsi al genere *Diracetus*, e forse non a torto. Forse il capo dal medesimo autore effigiato nella stessa tav. n. 5 spetta ad un pesce identico a quello da me esaminato. A risolvere però tutte coteste dubbiezze debbono concorrere ulteriori ricerche e documenti più chiari.

Fra gl' indefinibili frammenti che sopra diverse lapidi ò trovati , lo *scheletro osseo* effigiato nella tav. 1. f. 3 mi è paruto di qualche interesse. Esso ci mostra una *colonna verlebrale* composta di 32 vertebre, tutte simili tra loro e quasi uguali , a corpo molto allungato, essendo la lunghezza una volta e mezza del diametro ; tutte munite di apofisi verticali di ugual lunghezza , ciocchè addimosta un pesce anguilliforme, senza essere un apode. Le vertebre addominali al numero di 10 , àno pure delle spine toraciche , costole , delicate e lunghe quanto il comporta la larghezza uniforme del corpo.

Il *capo* è guasto e spostato, ma mostra essere acuminato, ed avere un lungo rostro , che accenna quello de' *Rhinellus* , e *Rhamphornimìa* ; ma l' essere interrotto è dissestato non ce ne rende chiaro documento.

Una *pinna* dorsale posta sul terzo anteriore della lunghezza; composta di undici a 12 raggi semplici e delicati , ma non aculeati ; essa è quasi triangolare ed alta quanto l' altezza del corpo.

Le *pettorali* sono fuori sito, nè se ne veggono che incompleti vestiggi.

Le *ventrali* addominali sono impiantate perfettamente rincontro alla dorsale. Esse sono brevi e larghette , composte di sei raggi , il primo de' quali più grossetto ed appena più lungo.

La *pinna codale* proporzionalmente è assai lunga , bifida , ed a lobi divaricati in modo, che la larghezza della pinna è molto maggiore dell' altezza del corpo. Ciascun lobo si compone di un osso cuneiforme lungo, che serve di appoggio ai raggi; il superiore è semplice, ma pare constasse di due pezzi simili ed uguali saldati tra loro per lo lungo. Alla loro estremità poggiano 5 raggi (2 sull' uno, 3 sopra l'altro); lo esterno vien fiancheggiato da un raggio, che spicca dalla medesima vertebra , lo interno da tre che poggiano sulla lamina stessa cuneiforme: in tutto nove raggi compongono questo lobo. Un altro ne sorge dalla penultima vertebra , il quale si biforca alla metà di sua lunghezza , e fa parte del medesimo lobo come suo fulcro. Il lobo inferiore à 8 raggi semplici che poggiano tutti ugualmente sopra l'estremo lembo della lamina cuneiforme , la quale è quì composta di tre pezzi congiunti tra loro trasversalmente. Un altro raggio spicca dall' angolo esterno della medesima vertebra, e si biforca due volte; onde allo estremo si trovano in tutto 12 raggi. Risulta quindi questa coda di una struttura che

partecipa di quella degli *cterocerchi*; ed è di lobi disuguali, l'inferiore sensibilmente più lungo del superiore.

Si è rappresentata questa pinna isolatamente ingrandita, onde mostrarne con maggior chiarezza la composizione anatomica.

Un altro pesciolino in simile condizione, e mutilato nella coda, si è effigiato nella tav. II, fig. 3.

Il capo è grossetto, e molto largo nella parte occipitale, come nella massima parte de' *Gobbi*. La colonna vertebrale è gracile; le apofisi verticali quasi tutte ugualmente lunghe. Vi si trovano chiari vestigi delle ventrali lunghette, anguste e toraciche.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Tav. I. fig. 1. *Omasoma Sach-el-Almae*, di naturale grandezza.

1^a Una delle sue squame ingrandita, e qual si vede al microscopio.

fig. 2. *Imogaster auratus*, come sopra.

2^a Una delle sue squame ingrandite come sopra.

2^b I raggi anteriori della sua pinna dorsale ingranditi, per dimostrarne con chiarezza la struttura.

fig. 3. Scheletro osseo di un pesciolino, rimarchevole per la struttura della sua pinna codale, rappresentata ingrandita in 3^a onde meglio vederne la composizione e disposizione de' raggi e de' loro sostegni.

Tav. II. fig. 1. *Beryx ater*, di naturale grandezza.

1^a Forma e disposizione delle sue squame ingrandite, quali si veggono al microscopio.

1^b Complesso de' pezzi opercolari, scapolare, e pinna toracica, in semplici tratti lineari, ed ingranditi, onde meglio vederne la forma e le relazioni.

sc. Scapolare col suo rilievo rettilineo e prolungato in aculeo

o. margine opercolare — po id. preopercolare.

fig. 2. *Rhamphornimia rhinelloides* come sopra.

2^a Forma e disposizione delle sue squame.

2^b Porzione della mandibola rivestita delle sue squame, ingrandite.

2^c Tre degli scudi mediani lanceolari.

fig. 3. Scheletro osseo di altro pesciolino non definito.

Fig 1



Fig 1 a



Fig 2



Fig 2 a



Fig 2. b



Fig 3



Fig 3 a

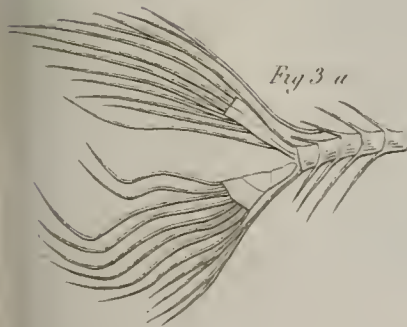


Fig 1

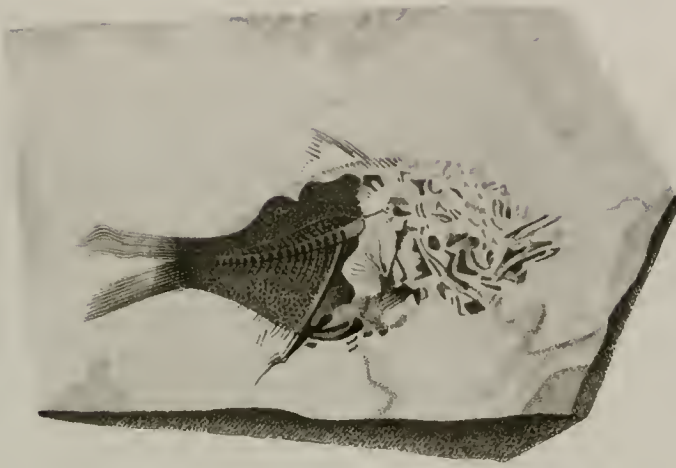


Fig 1 a



Fig 1 b



Fig 2

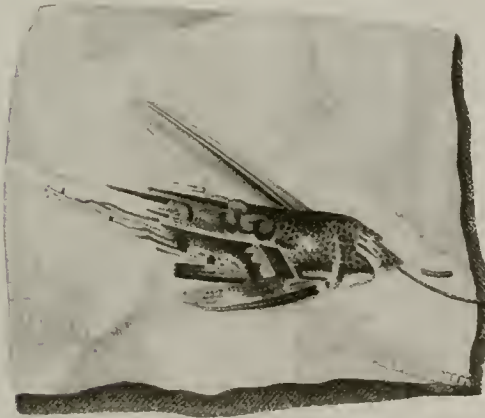


Fig 2 a



Fig 2 c



Fig 2 b

Fig 3



FORAMINIFERI FOSSILI

DELLA MARNA BLÙ DEL VATICANO

DEL SOCIO ORDINARIO

O. G. COSTA.

I Foraminiferi , diffusi in tutti gli strati dell'epidermide terrestre, si trovano tanto più abbondevoli per quanto più si scosta dall'epoca secondaria , passando ai più recenti depositi terziari. Costituiscono essi soli uno degl'importanti caratteri paleontologici , poichè , fra le numerose specie di cui la classe intiera si compone , ve ne à di quelle che sono esclusive di certe formazioni , altre mancano affatto in una, e sono frequenti nell'altra. Più , le dimensioni alle quali arrivarono quelle di un'epoca è diversa da quella delle altre. In fine, taluno degli ordini, mancando affatto quà , è cospicuo colà , come spesso si vede intervenire. Quindi lo studio di questi perissemata della creazione acquista ogni giorno un valore tanto maggiore , per quanto più si avvanza nella loro ricerca , e per quanto meglio si approfondisce la loro struttura e la loro variabile forma.

Nell'ultimo trentennio di questo secolo la cifra delle specie è cresciuta oltre il decuplo , senza arrestarsi ; che anzi sembra che si andasse elevando coi giorni : e crescerebbe ancor più se si cercasse con sedulità e diligenza. Se nonchè , essendo troppo penosa la loro investigazione , e richiedendo condizioni difficili a riunirsi contemporaneamente in un solo , pochi son quelli che vi diriggon la mente, pochissimi coloro che possono perseverare.

Avendo recentemente ripreso questo ramo di studi , interrotto per dar opera alle tante altre ricerche delle naturali produzioni patrie , e

ciò pel duplice oggetto, della Zoologia e della Paleontologia, o della Fauna moderna e dell'antica; ò esaminato all' uopo meglio che dugento località diverse del regno. M' impegnava a questa molteplice disamina un fatto, del quale avventurosamente mi avvidi assai di buon ora. Questo è, come altrove si è detto, che ciascuna località si fa distinguere, o per la presenza di un genere che manca altrove, o pel predominio di una specie, che in altre parti scarseggia, o per l'apparizione di un genere nuovo, o per la deficienza di molte specie di un genere che n'è dovizioso, e che facilmente s'incontra in diverse altre località; finalmente per un certo complesso di esteriorità, per cui le spoglie testacee identiche prendono un aspetto tale da rendersi notevoli e caratteristiche di alcuni terreni più o meno limitati. Istruito da molti esempi di tal fatta, rilevati nel regno, passava mano a mano a sentire il bisogno di conoscere quelli di contrade contigue. Ed a ciò pur mi spingevano talune altre considerazioni di maggiore interesse per la geologia. I terreni del regno di Napoli sono separati da quelli del limitrofo stato romano per confini ideali, o convenzionali; ma essi sono naturalmente congiunti, anzi gli uni non sono che continuazione degli altri; così proseguendo per la Italia tutta, della quale il terreno meglio esplorato è il senese, per opera del paziente Soldani.

Dopo aver quindi ricercati molti depositi terziari degli Abruzzi, mi è paruto convenevole passare a quelli del patrimonio di S. Pietro. A ciò mi pressava ancora un'altra interessante circostanza della stessa natura. Mi era già noto, che nella marna blù del Vaticano si trovavano ben spesso due specie del genere *Cleodora*, scoperte da Riccioli, e descritte dal sig. Calandrelli. Io trovava pertanto in una similgiante marna di Notaresco, nello Abruzzo ulteriore secondo, segni non dubbj della presenza di questo *pteropode*, per qualche piccola parte della sua conchiglia. Scoprii poscia di tali avanzi nelle marne di Reggio nella Calabria estrema; dalle quali marne, per la somma fragilità di tali spoglie, si ottengono esse stritolate per modo che, senza una previa ed estesa nozione di tal sorta di spoglie, e senza l'abitudine di saperle distinguere in mezzo a tritumi di diverse altre genie di testacci, difficilmente si possono riconoscere. Or le relazioni che si stabilivano per un genere così raro nello stato fossile, non meno che nella Fauna attuale, m'incitavano a conoscer quella ch'e-

sister potrebbe tra i foraminiferi di queste tre diverse località, racchiusi nelle medesime marne.

Non senza ostacoli, e dopo un lungo attendere vanamente, ò potuto procacciarmi un saggio della marna con *Cleodore* del Vaticano; e lo debbo alla cortesia del sig. Volpicelli, Segretario Perpetuo dell'Accademia de' Lincei, e troppo chiaro nella serie de' geometri viventi. Egli mi forniva un grande esemplare di quella marna gremita delle due *Cleodore*, *Vaticana* e *Riccioli*, seppur sono veramente due specie distinte, di che ò ragioni fortissime da dubitare. Dal quale saggio, distaccati alcuni straticelli, e qualche angolosità irregolare, li sottoposi a conveniente esame. E sebbene, per la pochezza del materiale, dir non mi posso pienamente soddisfatto; pure questo primo tentativo mi à offerto 17 specie nuove, fra le 29 che intutto vi ò potuto finora discernere. Il seguente specchietto ne dimostra la distribuzione e le proporzioni fra cinque ordini, mancando affatto di un rappresentante l'ordine quarto, generalmente scarso di specie, e troppo rare

O. I. Monostegi	Orbulina	2
	Nodosaria	3
O. II. Sticostegi	Dentalina	3
	Marginulina	2
	Rimulina	1
	Cristellaria	4
	Robulina	2
	Nonionina	1
O. III. Elicostegi	Rotalina	1
	Globigerina	3
	Rosalina	1
	Siphonina	1
	Clavulina	1
O. IV. Entomostegi		0
O. V. Enalllostegi	Bigenerina	1
	Textularia	2
O. VI. Agatistegi	Spiroloculina	1
	Totale	29

La descrizione delle specie nuove forma il subietto del presente lavoro, il quale, uscendo dai confini della Paleontologia del regno, serve a contribuire a quella della Italia intiera. Nel tempo medesimo dimostrerà come realmente il numero delle specie si aumenta da gior-

no in giorno, ed a seconda che crescono le ricerche; e come finalmente si mutano le proporzioni, tra il numero degl'individui e quello delle specie de' diversi generi. Verità tutte queste che saranno riconosciute con successivi lavori, che mi propongo sottoporre al sapiente giudizio di questo nostro consesso.

ORD. I. MONOSTEGI

Genere ORBULINA

1. *Orbulina universa* — var. a) Cos.
— var. b) id.
2. — *hirta*, Cos.
- O. undique regulariter hirta, alba*. — Diam. = 0,5 mill.
Rara.

ORD. II. STICOSTEGI

Genere NODOSARIA.

1. *Nodosaria tetragona*, Cos. — Tav. 1. fig. 1, A, C.

Testa gracilis, subconica, compressa; loculis 8? elongatis, parum inflatis, tetragonis, angulis carinatis, carina exerta; apertura ovato oblonga; superficie laevigata.

Conchiglia delicata, appena conica; composta di molte cavità (8 o più), allungate, un poco ristrette nei loro estremi, le cui suture molto sensibili; la prima cavità è ovale, le altre sono compresse, quadrangolari, i cui spigoli squisitamente rilevati e taglienti; la superficie è liscia; l'apertura ovale allungata nel senso stesso della compressione.

Lunghezza = 1,8 mill.

Abbiamo di questa specie più esemplari, ma tutti in monconi di 3, 4 e 5 cavità; un solo con 8, ed è quello che si è rappresentato, e sopra del quale si è fatta la descrizione. Tra i monconi ve ne è taluno, il cui diametro accenna dimensioni molto maggiori; ed un di essi pare che fosse appartenuto al medesimo individuo rappresentato.

2. *Nodosaria gramen*, Cos. Tav. 1. fig. 3 A.

Testa gracillima, cilindracea; loculis pluribus inaequalibus, geniculatis, laevibus; apertura rotunda.

Conchiglia sottilissima, quasi di ugual diametro in tutta la sua lunghezza; composta di più cavità (5 a 6), disuguali in lunghezza e congiunte tra loro in zig zag; le suture esteriormente appena apparenti nelle prime cavità, e scancellate in seguito; la superficie è liscia; l'apertura rotonda.

Lunghezza = 1, 1/4 mill.

Rara.

Genere DENTALINA.

1. *Dentalina adunca*, Cos. Tav. 1. fig. 1'.

Testa gracili, elongata, laevigata, recta, apice adunco; loculis 15 oblongis, inferne parum inflatis, suturis distinctis; primoribus gracilissimis incurvatis, reliquis rectis, ultimo?

Conchiglia gracile e piccolissima, composta di 15 e più cavità allungate, alquanto più tumide in sul principio che in fine, levigate; le prime minutissime e molto incurvate, le sette maggiori congiunte in linea retta; l'ultima non si conosce, essendo evidentemente monca.

Simile alla *scripta* di D'Orbigny, dalla quale è solo diversa per la curvatura, e maggiormente per la superficie uguale, che in quella è per lo lungo striata.

Lunghezza = 1,2 mill.

2. *Dentalina nepos*, Cos. Tav. 1 fig. 2'.

Testa elongata arcuata, laevigata; loculis 11 ovato-elongatis, parum inflatis, primo tumidore, mucronato.

Conchiglia allungata, mezzanamente gracile, levigata; composta di 11 cavità allungate, un poco ovali, essendo appena tumide nel mezzo, ben distinte negli estremi dalle suture; la prima cavità è più rigonfiata, e guernita da un mucrone altrettanto lungo quanto la cavità medesima; l'ultima manca.

Lunghezza = 1,8 mill.

Troviamo di questa specie un esemplare ugualmente incompleto, nel quale le prime quattro cavità sono brevissime e confuse tra loro

a segno , ch' esternamente appariscono quasi fosse una sola , un poco più lunga delle due che succedono insieme prese ; e le quali son pure più corte che larghe. Gl' interni sepimenti con la loro opacità lasciano distinguere la sua composizione.

Differisce dalla *consobrina* di D'Orhigny pel numero e proporzione diversa delle cavità , com' è facile ravvisarlo comparandone le rispettive figure.

Genere MARGINULINA.

1. *Marginulina inaequalis*, Cos. Tav. 1, fig. 2 A.

Testa elongata, arcuata, laevigata, postice compressa, carinata; loculis 7 convexiusculis, inaequalibus, alternis majoribus, gradatim crescentibus; primo subgloboso, lateraliter carinato, carina usque ad quintum decurrente, quarto, sexto, septimoque acumine carinae opposito ornato; ultimo producto, pyriforme; apertura denticulata.

Conchiglia composta di sette cavità ben distinte da sutura profonda , disuguali ed alternativamente crescenti ; la prima quasi globosa ; la seconda di un diametro alquanto minore , ma di lunghezza uguale ; la terza in diametro uguale alla prima , ma un poco più lunga ; la quarta maggiore della precedente , più tumida dal lato concavo , ed avente una punta al suo termine dal lato opposto , ch' è quasi dritto ; la quinta simile alla terza , ma appena di quella maggiore ; la sesta maggiore della quarta e molto più tumida di quella dallo stesso lato concavo , con la punta sul lato opposto e nel suo mezzo ; la settima finalmente , maggiore di tutte , uguale in diametro alla precedente , prolungata anteriormente in senso opposto alla curva dell' asse ideale , sì che prende la forma di pera , avente ancor essa un acume sul mezzo della sua convessità e sull' opposto lato della sua maggiore intumescenza ; alla cui estremità è l' apertura , ampia e dentellata nel margine. Una carena , o costola , comincia a sorgere dal lato compresso sulla prima cavità , e scorre sopra le altre facendosi da più in più delicata ; essa si dilata sulle suture , e si cancella sul prolungamento dell' ultima cavità. La superficie è liscia.

Lunghezza = 1,1 mill.

2. *Marginulina triangularis*, d'Orb. Tav. 1, fig. 9.

Testa oblongo-clongata, luevigata, nitida, subtriangulari, postice obtusa; loculis 6-8 compressis, lateribus angulatis; ultimo triangulari, antice attenuata.

Conchiglia allungata, archeggiata, le cui prime cavità molto compresse e spiralmemente attortigliate, le altre triangolari, angolose nei lati; l'ultima, maggiore di tutte e triangolare, prolungasi in punta ottusa, nel cui estremo è l'apertura rotonda e semplice; superficie levigatissima e splendente.

Lunghezza = 0,8 mill. — Rara.

Marginulina triangularis, d'Orbig. Foram, di Vienna, pag. 71, Pl. III, f. 22 e 23.

Osservazioni. Non par dubbia l'identità di questa nostra marginolina con quella descritta dal D'Orbigny nel citato luogo, e proveniente dal Bacino di Vienna. Che se non vi corrisponde il numero delle cavità, contandosene 8 in quella e 6 nella nostra, ciò può dipendere dall'età, essendo ancor la nostra minore dell'esemplare che n'ebbe il sullodato scrittore di 2/10 di millimetro.

Tuttavia a noi sembra, che potrebbe l'una come l'altra riferirsi meglio al genere seguente *Cristellaria*, a cagione della spira ben apparente: nel qual pensiero siamo di accordo col signor D'Orbigny. Vedi Gen. *Marginulina*, 1. c. pag. 66.

Genere RIMULINA.

1. *Rimulina bicaudata*, Cos. Tav. 1, f. 11, A,B,C.

Testa elongata, compressiuseula, dorso arcuato, convexo, lateris antico recto, antice oblique truncata, postice bifida; lateris dextro complanata, subtriplicata, fossulis duabus mediis; transversalibus, involutis; involucri ultimo antice longitudinaliter aperto, supra plicato.

Conchiglia di forma allungata, tre volte e mezzo più lunga che larga, archeggiata dalla parte dorsale, dritta dalla parte opposta o ventrale, compressa alquanto ne' lati, quasi piana dal lato destro, ove si generano tre rughe e due fossetti mediocri nel mezzo; anteriormente quasi troncata in senso obliquo; posteriormente biforcuta con estre-

mità acute ; composta di molte cavità anguste trasversali , un poco oblique, che s' involuppano successivamente ; l' ultimo invoglio sul sinistro lato si estende fino all'origine della biforcazione , e sul destro forma una piega quasi alla metà della lunghezza , e sul lato anteriore o ventrale lascia una lunga rima, che nella estremità si chiude per una piega increspata : come la si vede in *C*. La superficie è liscia ; bianca ed opaca n' è la sostanza.

Lunghezza = 1,5 mill.

Osservazione. Di un tal genere non si conosce che una sola specie vivente nell'Adriatico , secondo le assicurazioni di D'Orbigny, che l' assumeva a tipo generico. Noi non avevamo incontrato ancor fossile veruno esempio: e questo che ora adduciamo vi si può riferire per la sola condizione della *rima longitudinale*; ma per l'abito è molto distinta e lontana.

ORDINE III. ELICOSTEGI

Genere CRISTELLARIA.

1. *Cristellaria Volpicellii*, Cos. Tav. I. fig. 4, *A*, *B*.

Testa breviuscula crassa, parum arcuata, compressa, laevigata; postice magis compressa; antice inflata, trigona, planulata; lateribus medio depressis, dorso carinato; loculis angustatis, subarcuatis, complanatis, ultimo supra planulato; apertura parva, rotundata, simplici.

Conchiglia corta e molto dilatata , compressa nei lati con una sensibile depressione nel mezzo , che si aumenta verso il maggiore incremento della conchiglia ; anteriormente inarcata, indi un poco obliqua ; composta di 8 cavità , delle quali le tre prime sono rivolte in spirale , le altre successivamente si raddrizzano serbando sempre una sensibile inclinazione sull'asse ideale; l'ultima è appianata , obliqua, un poco tumida nella faccia anteriore, acuminata nell'angolo posteriore e supremo, ove diviene pure un poco rugosa, avendo nel centro l'apertura rotonda e semplice. La superficie è levigatissima e splendente ; la sostanza vetrosa e trasparente , sì che lascia vedere le interne cavità a traverso delle sue pareti , come la immagine sua le rappresenta.

Lunghezza=1,5 mill. — Rara.

2. *Cristellaria contracta*, Cos. Tav. I. f. 5, A, B.

Testa tumida, ventricosa, contracta, medio inflata ac elata, antice valde compressa, postice acuminata; latere dorsali cultrato; apertura rotundata, simplici.

Conchiglia molto abbreviata, contratta per effetto della cavità mediana che mostruosamente dilatasi, estuberando dalla faccia ventrale; le prime cavità sono compresse e rivolte in spira; l'ultima è triangolare ed acuminata, con l'apertura in cima dell'apice, rotonda, e semplice. Superficie liscia e splendente; la sostanza è opaca.

Lunghezza = 1, null.

3. *Cristellaria obesa*, Cos. Tav. I. fig. 7.

Testa ovato oblonga, compressiuscula, antice rotundata, inflata, ventricosa, postice pyramidata, vertice obtuso; loculis 6-7 triangularibus, latere inflatis, viz distinctis; superficie laevigata; apertura simplici.

Conchiglia composta di 6 a 7 cavità, la prima delle quali rivolta in spira, triangolari, poco compresse, e poco tra loro distinte; l'ultima si protende in forma di cono ottuso ed obliquo, nel cui vertice vi è l'apertura semplicissima; la superficie è levigata; la sostanza quasi opaca.

Lunghezza = 0,8 mill. Rara.

4. *Cristellaria pulchella*, Cos. Tav. I. f. 8.

Testa involuta, compressa, laevigata, carinata, carina lamellosa; loculis angustatis, complanatis, obliquis; ultimo supra convexiusculo, postice acuminato; apertura rotundata, simplici.

Conchiglia ovato-acuminata, compressa, liscia, con una spira molto squisita, composta di tre giri, l'ultimo de' quali con 9 cavità anguste, oblique, ed appena distinte da sutura delicatissima; ornata sul dorso di una lamina angusta, che v' a perdersi sopra l'antipenultima cavità, mostrandosi più squisita nel mezzo; l'ultima cavità, più angusta delle altre, si prolunga posteriormente in punta, nel cui estremo è l'apertura rotonda e semplice; la superficie è splendente; la sostanza vetrosa, trasparentissima.

Lungh. = 0,6 mill.

Genere ROBULINA.

1. *Robulina Vaticana*, Cos. Tav. I. fig. 17, A, B.

Testa orbiculata, nitida. convexiuscula; margine carinata; loculis quatuor marginalis, triangularibus, complanatis, transversim subtilissime striatis; apertura apiculi, simplici.

Conchiglia discoidale, compressa, convessa sul mezzo delle sue cavità, avente sul perimetro una carena laminare, angusta, e tagliente. con 4 a 5 punte acute sul mezzo del dorso di ciascuna cavità; composta di quattro cavità nell'ultimo giro della spira, distinte da una costola rilevata sulla sutura, riunite nel centro, ove lasciano un picciolo marchio di umbillico; sulla faccia opercolare dell'ultima cavità scorre un risalto dalla punta per tutta quasi la sua lunghezza nel mezzo.

Diametro = 0,6 mill.

Questa specie del tutto simile alla *R. calcar* à le strie trasversali della *echinata*, essendo poi dall'una come dall'altra diversa pel numero delle cavità, la presenza dell'umbillico, e la convessità della conchiglia intiera.

2. *Robulina austriaca*, d'Orb. Tav. I. fig. 10, A, B, C.

Testa orbiculato-compressa, laevigata, disco centrali, non convexo, ornata, margine angulata, non carinata; loculis 10 angustatis, arcuatis, subcomplanata.

Conchiglia discoidale, compressa, avente nel mezzo un disco non estuberante, senza carena, ma solo angolosa nella periferia; composta di 10 cavità nell'ultimo giro della spira, anguste, archegiate, oblique, appianate, senza alcuno rilievo nelle suture; apice dell'ultima cavità increspato, con apertura angustissima sulla faccia esterna.

Diametro = 1 a 2 mill. Non rara.

Robulina Austriaca, d'Orb. Foram. di Vienna, pag. 103, Tav. V, fig. 1 e 2.

Genere SIPHONINA.

1. *Siphonina fimbriata*, Res.

Testa suborbiculari, lobata, depressa, utrinque convexa, extus

acute carinata, et subtiliter fimbriata, non umbilicata, tuberculato-perforata; anfraetibus tribus latiusculis; loculis 5 fimbriatis, rectiusculis, subtrigonis; siphunculo, aperturam generato, depresso, circumlabiato.

Conchiglia discoidale depressa con spira mezzanamente elevata, composta di tre giri, ed avente nel centro un tubercolo perforato, cinque cavità in ciascun giro, a foggia di settore circolare, guernite sul contorno di un lembo minutamente dentellato a guisa di frangia; dalla faccia opposta alquanto convessa, liscia, con 5 lobi appena estuberanti; un piccolo sifone depresso, slargato sull'apertura, spicca dall'ultima cavità e dal lato della spira, nè si estende oltre il margine della conchiglia.

Diam. = 0,4 mill. Non rara.

Siphonina fimbriata, Reuss. Foram. di Vienna, pag. 372. Tab. 47, f. 6 a.b.

Rotalina reticulata, Czizek—Beitrag zur Kenntn. der fossilen Foramin. des Wiener Beckens. p. 10. Tab. 13, fig. 7 a 9.

Specie incontrata per la prima fiata in Tegel di Baden presso Vienna, e sulla quale è stato fondato il genere dal sig. Reuss. Noi l'abbiamo scoperta nella Marna del Vaticano, ove non è molto rara.

Genere NONIONINA.

1. *Nonionina helicina*, Cos. Tav. 1, fig. 18, A,B,C.

Testa compressa, orbiculata, laevigata, margine subangulata, supra umbilicata; loculis 12 arcuatis, convexis, ultimo paulisper elato semiovato; apertura angustata.

Conchiglia discoidale, compressa, levigata, un poco angolosa nel perimetro; composta di dodici cavità nell'ultimo giro della spira; molto archeggiate, convesse, riunite nel centro, lasciandovi un piccolo disco da una faccia, ed un largo umbilico dall'altra a cagione della obliquità della spira; l'ultima cavità dilatata nel peristoma, più dall'uno che dall'altro lato, formando anteriormente una curva quasi parabolica a rami disuguali; apertura un poco ristretta.

Diametro = 0,5 millim. Rara

Simile alla *Boueana* di D'Orbiguy, dalla quale si diparte per

essere meno compressa sul perimetro, e principalmente per la obliquità della spira, onde risultano le due facce dissimili, generandosi l'umbilico dall'una ed un piccolo disco dall'altra, mentre in quella l'umbilico è in ambo le facce uguali. Spesso l'ultima cavità non è chiusa, come l'abbiamo effigiata in *C*; il labro è però costantemente dilatato. Differisce ancora dalla *Bulloides*.

Rarissima.

Genere ROTALINA.

1. *Rotalina meridionalis*, Cos. Tav. I. fig. 13 *A, B, C*.

Testa orbiculata, depressa, laevigata; subtus convexa, vix umbilicata; spira complanata, anfractibus? unico periferico distincto; externe rotundata; loculis 14, partim sutura distinctis, supra oblongis, subtus triangularibus, vix arcuatis et explanatis.

Conchiglia orbicolare depressa, levigata, superiormente quasi piana, dove apparisce un solo giro di spira esteriore, composto di 14 cavità, distinte in parte da sutura; nel resto gli anfratti sono spianati e la sutura scancellata affatto. Dalla inferior parte mezzanamente convessa, e le cavità in parte apparenti sono appena inarcate, scancellandosi la sutura nel mezzo, e mostrandosi le ultime soltanto più o meno distinte; nel centro lasciano appena un vestigio di umbilico, che sovente manca del tutto; la superficie è tutta finamente punteggiata da punti impressi,

Diametro da 0,5 ad 1 mill. Non rara.

Affinissima alla *R. Soldani* d'Orb., ma più depressa di quella, e distinta per la quasi assoluta mancanza di umbilico, per un maggior numero di cavità nell'ultimo giro della spira (9 nella *Soldani*), e tutte poco distinte, specialmente nel mezzo del disco; ugualmente che scompaiono gli anfratti nella faccia superiore, eccetto che nell'ultimo giro.

ORD. V. ENALLOSTEGI.

*Genere GUTTULINA.*1. *Guttulina Romana*, Cos. Tav. I. fig. 6 *A, B.*

Testa ovata, antice parum compressa, postice rotundata, loculis tribus elongatis, subrectis, suturis vix excavatis; apertura oblonga, marginata; vitrea.

Conchiglia di forma perfettamente ovale, anteriormente un poe compressa, posteriormente rotondata; composta di tre cavità apparenti, involte nel senso dell'asse maggiore, lasciando un piccolo marchio umbilicale posteriormente; ed anteriormente l'apertura sulla faccia opposta; apertura lineare, allungata, coi margini laterali rilevati; superficie levigatissima splendente; sostanza vitrea trasparente.

Diametro maggiore = 0,5 mill. Rarissima.

*Genere TEXTULARIA.*1. *Textularia sagittula*. Cos. Tav. I. fig. 16,

Testa sagittiformis, compressa, lateraliter subexcavata, marginibus acutis; antice dilatata, medio producta; postice subaeuminata; loculis angustatis, transversis, complanatis, obscure alternantibus.

Conchiglia di forma sagittata, compressa, lateralmente incavata, coi margini acuti e dentellati; anteriormente prolungata nel mezzo, concava ne' lati; posteriormente prolungata in punta ottusa, maggiormente ristretta ne' lati; cavità anguste, trasversali, spianate, appena alternanti, e non ben distinte; superficie levigata.

Lunghezza = 0,6 mill.

2. *Textularia corrugata*, Cos. Tav. I. fig. 15.

Testa brevis, irregulariter contracta, antice rhombea, postice obtusissime angulata, lateribus acutis, denticulatisque; loculis brevissimis, explanatis, vix alternantibus; anterioribus flexuose arcuatis.

Conchiglia molto abbreviata, larga tanto quanto lunga, anterior-

mente i due piani laterali ed obliqui costituenti un rombo, acuta ne' margini laterali, e dentellata finalmente, posteriormente i due piani medesimi formano un angolo ottuso; cavità angustissime, poco od appena alternanti, distinte da delicatissima e poco profonda sutura, le ultime anteriori obbliquamente ed irregolarmente inarcate; superficie levigata.

Lunghezza = 0,5 mill. Rara.

ORD. VI. AGATISTEGI

Genere SPIROLOCULINA.

1. *Spiroloculina celata*, Cos. Tav. I. fig. 14.

Testa ovata, compressa, rudis, externe carinata, carina obtusiuscula; loculis magnis, arcuatis, lateribus rotundatis, suluris indistinctis; antice producta; apertura rotundata, unidentata; dente brevi, acuminato.

Specie molto affine alla *Triloculina oculina* del d'Orbigny, dalla quale si distingue per la mancanza totale delle suture apparenti, per la ineguaglianza e rozzezza della superficie, e per i lati non carenati, nè prolungati nelle due estremità: nell'ultima delle quali v'è l'apertura rotonda, con un dente semplice.

L' interna struttura però evidentemente ci mostra una *Spiroloculina*, mentre la esterna rimane sempre equivoca.

Diametro maggiore = 1 mill.

Spiroloculina, Cos. Palcont. III. Tav. XXVI. fig. 5. *A, B, C.*



FORAMINIFERI FOSSILI

DELLE MARNE TERZIARIE DI MESSINA

DEL SOCIO ORDINARIO

O. G. COSTA.

Alle ragioni esposte nella mia precedente memoria sullo stesso argomento , per le quali mi spinsi a ricercare, oltre i confini del regno, i Foraminiferi della marna del Vaticano, un'altra se ne aggiunse, assai più potente di quelle; la quale mi determinò a far le stesse ricerche sulla prossima Sicilia isolare; e con ispecialità nelle marne terziarie della propinqua Messina.

Vi à chi crede, che l' Isola di Sicilia fosse stata un tempo congiunta alla terra ferma , precisamente pel calcio Zancleo e la punta estrema delle Calabrie. La qual cosa essendo vera, deve esistere analogia troppo stretta fra quei due opposti terreni, ove pur non si trovassero identici affatto. Se ciò sia, o se differenze vi esistano, e quale ne fosse la loro importanza , non è questo il luogo nel quale io penso discuter la quistione in tutta la sua latitudine; fermandomi soltanto ai caratteri paleontologici, e per ora ai soli Foraminiferi. Laonde, dopo aver minutamente esplorati i terreni da Monteleone fino a Capo-Pellaro; e dopo aver con ispecialità esaminate le marne de' contorni di Reggio, ed i banchi sabbionosi di Terreti, Naziti, fin sopra il piano della Melia, passava a far lo stesso per le marne che stanno

a ridosso della Città di Messina. Un primo saggio de' risultamenti comparativi ottenuti trovasi inserito nei *Cenni Paleontologici* per l'anno 1853 esibiti all'Accademia Pontaniana. Le investigazioni ulteriori però, più estese e più accurate, mi hanno condotto a risultamenti sì grandiosi, da esigere una scala più larga sotto la quale l'argomento debba trattarsi.

Fattone quindi il soggetto del presente lavoro, lo sommetto al giudizio di quest'Accademia, la quale, trovandolo plausibile, le darà quello avviamento che crederà convenevole, dichiarando innanzi tempo, che quantunque molto esteso, esso non dee tenersi che come un saggio. Perocchè sono le marne di Messina sì doviziose di Foraminiferi, che quel tanto a cui sono arrivato dopo un anno di studio, non è la metà delle specie fin qui scoperte. Onde darne una idea molto precisa, eccovi un calcolo analiticamente compiuto. Un pollice cubico di quella marna, diligentemente esaminata, rende cinque ventiquattresimi di foraminiferi de' diversi ordini, e di generi differenti. In tale quantità $1/20$ solo vien costituito dallo insieme de' diversi generi, ed i rimanenti $19/20$ sono di *Orbulina universa* di ogni dimensione; cioè del diametro di $1/10$ millimetro a quello di un millimetro intero. E numericamente calcolati gl'individui spettanti a ciascun genere, nel pollice cubico suddetto abbiain trovato

Nodosarie	—	3
Dentaline	—	5
Marginuline	—	3
Vaginuline	—	3
Frondicolarie	—	8
Biguerine	—	1
Opercoline	—	1
Uvigerine	—	2
Testolarie	—	2
Orbulina	—	28

277, 290

Totale = 277, 318

Da questo specchio apparisce in qual proporzione stanno i diversi generi tra loro; ma convien ricordare, che non in tutta la massa esi-

stano ugualmente le specie de' generi nominati ; e che in taluni punti manca l'uno ed apparisce l'altro genere. L'*Uvigerina* p. e., che nel pezzo servitomi per tale sperienza si presenta con due individui, non mi si era offerta ancora in un mezzo piede cubico precedentemente esplorato. Dal lato opposto, nel pollice cubico è mancato il genere *Truncatulina*, che dà frequente una delle specie; come pure il genere *Robulina*. L'un genere dunque rimpiazzando l'altro può ritenersi come costante la proporzione.

E scendendo ai particolari di tale enumerazione, è degno di nota l'enorme abbondanza di *Orboline*. Fra tutte le marne del regno, e fra quelle del resto della Sicilia, del Vaticano e del Senese, di cui posso render conto, non ve n'è una comparabile per questo lato alla marna di Messina. Che anzi, comparando quello da me ottenuto dalla suddetta marna, calcolo di cui mi rendo garante, col simile sperimento fatto dal d'Orbigny sopra il terreno di Gentilli presso Parigi, e che l'autore riporta come esempio il più eclatante per dovizia di Foraminiferi, questo si trova di gran lunga inferiore a quello di Messina. Perciocchè, da un pollice cubico di quel terreno il d'Orbigny non ottenne che poco più di 55 mila individui; mentre la marna di Messina ne contiene 277,318; cioè dà la proporzione di 1:4 7/10.

Passando al confronto de' Foraminiferi de' due terreni, di Reggio e di Messina, l'*Orbulina universa*, si abbondante in quest'ultimo, è appena rappresentata da qualche individuo nel primo. Per opposto le marne reggiane ridondano di *Biloculine*, che nelle messinesi non appaiono punto; anzi lo intiero ordine degli AGATISTEGI figura appena per una *Spiroloculina* ed una *Quinqueloculina*.

Nell'ordine degli STIGOSTEGI si avverte la stessa discrepanza; senochè nei messinesi abbonda di numero e di specie il genere *Margulinula*, che fra i reggiani non figura punto. Il genere *Lingulina* vien rappresentato ugualmente in ambo i terreni, ma con una diversa specie. Soprattutto poi distingue le marne Messinesi la presenza, il numero delle specie, e la frequenza degl'individui del genere *Frondicularia*, che in tutta l'Italia è appena emblemato, e di cui fin qui non è incontrato nel regno, che una dubbia specie soltanto e sommamente rara. Queste mi hanno porto altronde argomento di speciale lavoro. Perocchè, talune specie sono state riguardate come spe-

tanti al genere *Cristellaria*, per essersi limitati i miei predecessori al solo aspetto esteriore. Un esame più accurato sull'intima loro struttura mi à svelata la genesi comune colle *Frondicolarie* degli Autori, e mi à fatto pure conoscere qual sia l'intima loro organica differenza. D'onde è risultato che, sottratte quelle specie dal genere *Cristellaria*, le *Frondicolarie* vanno distribuite in tre sezioni delle *Unilaterali* (*Cristellaria* d'Orb.), delle *Bilaterali*, e delle *Innormali* (*Frondicolarie* dello stesso autore). Perciocchè le cavità delle prime sono più sviluppate da un lato, e pochissimo dall'altro dell'asse ideale; in altre si sviluppano ugualmente d'ambo i lati; ed in talune finalmente, per un certo ripiegamento angolare de' due lati opposti, appaiono distribuite sopra tre lati. Da ultimo n' emerge che un tal genere sia malamente riposto nell'ordine degli *SSIGOSTEGI*, e che con maggior proprietà debba traslocarsi agli *ENALLOSTEGI*; come verrà dimostrato.

Nello stess' ordine secondo, il genere *Vaginulina* figura con 4 specie, con frequenza d'individui, laddove in tutto il regno si è trovato soltanto qualche raro esempio di esse; e nel resto della Sicilia non incontrasi affatto.

Nell'ordine successivo *ELICOSTEGI*, il genere *Cristellaria* à una sola specie nel reggitano, mentre nel messinese ne conta nove, e ne avanza ancora qualche altra un poco dubbia. Per compenso mancano nella marna di Messina i generi *Nonionina* ed *Opereulina*, che nella reggiana sono rappresentati da 3 specie il primo, e da una il secondo, il quale generalmente poco figura. L'ordine sesto finalmente ne porge il contrapposto del primo; perciocchè esso non conta per Messina che rarissimi esemplari della *Quinqueloculina obvelata*, Cos., mentre in Reggio ridondano quasi tutti i generi di specie e di esemplari, specialmente del genere *Biloeulina*.

Nè queste diverse proporzioni è tutto quello che rende notevole la differenza fra le due località; ma vi prende ancor parte la fisonomia, che nei Foraminiferi di Messina è tale, che, ove mancasse la coscienza della loro pertinenza, si direbbe esser propri della creta bianca del bacino di Parigi. La quale simiglianza di aspetto vien fortemente sostenuta dal quasi identico predominio di generi e di specie; e bastar può l'esempio del genere *Frondicularia*, che poco in altri

luoghi figura, e la mancanza in entrambi di generi spettanti all'ordine degli *Agatistegi*. Le stesse identiche specie che si trovano in Reggio ed in Messina si annunziano allo sguardo con tal diversa sembianza, che si direbbero affatto diverse.

Dalle quali cose dunque, se si volesse trarre argomento per la soluzione del problema premesso, saremmo condotti a giudicare che quei due terreni sono diversi affatto di origine e di età. Però conviene qui ricordare quel che altrove si è fatto notare in proposito, che siffatte discrepanze si avverano da passo in passo tra i Foraminiferi delle località diverse del regno, ed anche di una stessa località (1). Laonde a me pare che le differenze rilevate in quanto a tal classe di organici avanzi, isolatamente considerate, si possano ritenere come locali, e prodotte dalla diversità di condizioni sotto le quali vissero tali perissemia della creazione. Nè questi soli ci addimostrano tali differenze da luogo a luogo, ma simiglianti ne trovi in genio di animali di altro ordine, e delle classi ancor superiori; come lo vedremo negli Echinodermi, nei Crostacei, e nei Pesci; fatto che si avvera benanche nella Fauna attuale.

Prima di scendere alla descrizione delle specie è indispensabile far precedere alcune avvertenze, onde schivare gli equivoci ne' quali, in questa classe specialmente, è facilissimo incorrere. Oltre la variabilità de' giudizi secondando la mente di coloro che giudicano, grandemente concorre a riportare diversa sentenza intorno alla novità delle specie il facile e molteplice mutamento di forma di tali spoglie calcari. Per dimostrarlo chiaramente, e senza molte parole, togliamo un esempio dal genere *Dentalina*. Le specie di tal genere, quando si cercano fra molti individui, è ben malagevole cosa il discernerele. La stessa specie, considerata per la sua intima e regolare struttura, sopra individui di diversa età, e di statura diversa, si appresenta allo sguardo tanto diversamente, da non potersi più definire. Coloro che hanno avuto il campo libero e non preoccupato, hanno ben potuto scegliere le più distanti fra loro, e formarne il tipo delle specie. Ma per noi che lo troviamo già signoreggiato dai predecessori, scelti gl'individui identici a quelli, rimangono gl'intermedi; i quali, non potendoli

(1) Cenni per l'anno 1853.

più ai medesimi assimilare, o convien discostarsi dalle norme stabilite, o creare tante altre specie per quante sono le modificazioni avvertibili. Prendesi in dimostrazione la *Dentalina sulcata* e l'*acuta* del d'Orbigny, che per noi sono *Nodosarie*. L'una come l'altra è gracile, allungata, e composta di cavità numerose, non oblique, per la maggior parte poco distinte, longitudinalmente costate, la prima con 10 a 13 cavità, la seconda con 9. Sottraendo dunque tutti questi come caratteri comuni ad entrambe, che rimane per nota distintiva specifica? Uno strangolamento che precede l'ultima cavità, maggiore nell'*acuta* che nella *sulcata*; al che si aggiunge per conseguenza, che l'ultima cavità sia in quella più convessa, ed in questa meno, compensandosi col maggiore suo prolungamento. Ora non vi è cosa tanto mutabile nelle specie di tal genere quanto il maggiore o minore strangolamento delle loro cavità, od almeno delle ultime; e quindi lo indispensabile mutamento di forma, più tumida in quelle meglio divise, più allungata quando la loro separazione è meno profonda. In ultimo si vuol considerare la presenza di una punta acuta, o mucrone, nella prima cavità; e questo ancora, o manca naturalmente, senza che nulla si mutasse nel resto di tutta la conchiglia, o si perde per l'uso e stropicciamento che soffre vivendo, od essendo nella terra sepolta. Gli esempi di tal fatta sono frequentissimi in tutte le specie di qualunque genere che posseggono di tali delicatissime appendici. Non consideriamo qui il caso non raro, se non frequentissimo, di trovarsi monca la conchiglia dell'una o dell'altra estremità; quando la sua determinazione riesce assolutamente impossibile, partendo da siffatti principii.

Si ascolti ora lo stesso d'Orbigny, che à costituite le due summentovate specie, e vi dirà, che la *D. sulcata* non differisce dalla *Cuvieri* (tuttora vivente nell'Adriatico), che per essere le costole più acute e la conchiglia tutta proporzionalmente un poco più allungata! Qual mente può concepire il valore di questi più o meno? da qual limite si fa partire la comparazione? ed è tutto questo l'espressione di un mutamento reale dell'organismo per tenersi, zoologicamente parlando, per carattere immutabile di una specie? A me pare, che per le *Dentaline*, come per le *Nodosarie*, intervenghi quello stesso che è fatto avvertire per i *Dentali* (1). Ed in comprova lo stesso A. ne por-

(1) Vedi la Monografia di questo genere nella Fauna del regno.

ge l'esempio, senza uscire dalle specie poste a confronto. Parlando della *sulcata* egli avverte, che in taluni individui le costole si raddoppiano, per altrettante che tramezzano alle prine. E pure su questa maggiore o minor frequenza di costole, che inversamente si mutano ancora nella grossezza, si fondano molte delle specie. Proseguendo quest'analisi si troverà tale continuità di anelli, che dal primo all'ultimo si passa agli estremi senza avvertirsene; e pure i due estremi appaiono differentissimi. Chi si trovasse alle mani uno di tali anelli intermedi, è naturale il supporre, che non potendolo assimilare nè al primo nè all'ultimo, deve crearne una novella specie: ed in tal guisa le specie si vanno moltiplicando all'infinito; ed i giudizi debbono quindi variare secondo il numero delle nozioni che si posseggono.

Un esempio chiarissimo di ciò abbiamo esibito nella Paleontologia del regno, trattando della *Nodosaria hispida*; e saremmo nel caso di fare altrettanto per moltissime delle specie note, e di quelle che a me rimangono a descrivere. Ma un tal lavoro, per ogni lato utilissimo, essendo più grafico che fonico, esige tempo e dispendio, di cui potrà altri disporre.

Abbiassi intanto presente la digressione premessa, quando altri sarà per giudicare se bene o male mi sono avvisato nel definire le specie nuove, sia in questo, e sia negli altri lavori, ove tralasciato avessi avvertirlo, onde non ripeter sovente e con noia le cose stesse.

ORDINE I MONOSTEGIA

Genere ORBULINA, d'Orb.

Orbulina universa; d'Orb.

O. testa bullata, sphaerica, irregulariter minutissime perforata; apertura circolari.

Specie così abbondante nel luogo detto gli *Scoppi*, che costituisce quasi un decimo della intiera massa terrosa. Si trova di tutte le grandezze, dall'infinitamente piccola al diametro di 0,1 millim. Tutta di un bianco nitido, tanto più per quanto è più piccola. Rarissimi sono gl'individui colorati di fulvo o di bruno.

ORDINE II STICOSTEGIA

FAMIGLIA 1^a EQUILATERALI*Genere* GLANDULINA, d' Orb.*Glandulina apiculata*, Reus.

———— Cost. Paleont. del Regno di Nap. II. pag. 131, Tav. XI,
fig. 22 A, C.

Rarissima nel l. d. gli Scoppi.

Genere NODOSARIA, d' Orb.

1. *Nodosaria bacillum*, De Fr. Tav. I. fig. 7 a, B, C.

N. testa elongata, cylindracea, longitudinaliter 7-vel 11-costata; costis obtusis; loculis 14 aequalibus, antice convexis, sphaericis, postice complanatis; primo magno, mucronato; apertura rotundata, radiata.

Conchiglia assai lunga, e tutta quasi di ugual diametro, ornata per lo lungo di 7 ad 11 costole ritondate, e ben rilevate; composta di molte cavità (14 a 22) tutte uguali in larghezza e lunghezza, o con piccola differenza; le prime sono quasi spianate, non estuberanti, le ultime convesse, pressochè sferiche, e ben distinte; la prima è inoltre più grossa delle successive, avendo un lungo mucrone per lo più ritorto; l'ultima cavità si termina ottusa, e con un forame nel centro, al quale giungono le costole prolungate, e le danno un aspetto raggiato.

Si assegna a questa specie la lunghezza di 11 millimetri; ma l'esemplare che abbiamo trovato nella marna di Messina, ben conservato, raggiunge 22 millim. Il numero delle sue cavità è di 18.—Ne abbiamo degli altri monchi di 6 a 9 cavità di minor diametro. In quanto alle altre variazioni si consulti la *N. grossecostata* della nostra Paleontologia del regno.

2. *Nodosaria mutabilis*, Costa. Tav. 1, fig. 1 e 2.

N. testu subeonica, vix incurvata; loculis 11, posterioribus indi-

stinetis 5-costatis, anterioribus sutura mediocri discretis 10-costatis; loculo ultimo coarctato; apertura centrali simpliciter.

— Costa, Paleont. del R. di Napoli II, pag. 154, n. 13. Tav. XIII, f. 1. Lungh. = 4, 7 mill. — 6 mill.

N. B. I Foraminiferi del Regno di Napoli, che qui si citano, sono impressi, ma non ancor pubblicati; laonde debbono tenersi gli uni come gli altri quali specie tuttora sconosciute.

La figura 2 della citata tavola rappresenta un individuo completo, nel quale si trovano soltanto 9 cavità, e sulla prima un prolungamento a foggia d'aculeo. Tali appendici sogliono mancare sopra individui d'identica specie, sì per essere fragili, e sì ancora normalmente non ingenerati. Il numero e la disposizione delle costole è il migliore e più costante carattere sul quale si può calcolare. Anche l'apertura, che in essa è cinta da un delicato risalto è carattere di non valore, indicando esso la interruzione, non il compimento delle cavità.

3. *Nodosaria abbreviata*, Cos. (an *praececedentis varietas*?)

Differisce dalla *mutabilis* per avere due cavità di meno, e per esser queste più tumide e quasi contratte. Nel resto convengono, specialmente con quella effigiata al n. 2.

Lungh. = 4 mill.

4. *Nodosaria contracta*, Cos. Tav. I, fig. 3.

N. testa compressiuscula, loculis 7 abbreviatis, tumidulis; 6-10 costata; costis acutis, irregularibus; apertura radiata, ovata.

Conchiglia alquanto più stretta posteriormente, crescendo in diametro le cavità con poca differenza, essendo tutte più corte che larghe, le prime con sei e poi sette costole, le ultime con 10, tutte grossolane, con spigolo acuto, un poco irregolari; 7 cavità ben distinte da profonda sutura, sopra la quale le costole s'interrompono; l'ultima cavità si prolunga alquanto, inclinando anche verso uno de' lati stretti; l'apertura è ovoidica, per effetto della compressione di tutta la conchiglia, ed il suo contorno guernito di delicati e brevissimi raggi.

Lungh. = 4 mill.

5. *Nodosaria siphunculoïdes*, Cos. Tav. I, fig. 27.

N. testa elongata, vix arcuata, tumidula, longitudinaliter 12-costata; costis obtusis non interruptis; loculis 11, posticis complanatis,

primo parum inflato, rotundato, mucronato, ultimo convexo, strangulato, antice producto, non acuminato, parum obliquato.

Conchiglia allungata, mezzanamente grossa, alquanto incurvata, guernita di costole longitudinali non molto rilevate, ottuse, non interrotte sopra le suture, al numero di 11 a 12, talvolta anche 13, composta di 11 cavità, le posteriori delle quali poco distinte, la prima quasi rotonda, un poco più tumida, ed avente un mucrone (che talvolta manca), le anteriori sono meglio distinte, l'ultima à una strangolatura or più or meno grande, ed anteriormente si protende a foglia di pera, declinando alquanto sopra il lato (1).

Lungh. = 7, 6 mill.

Non rara; ma difficile a trovarsi intiera, quantunque solida a bastanza.

6. *Nodosaria acuta*, Cost.

N. testa oblungata, arcuala, longitudinaliter 9 - costata; costis quandoque obtusis, non interruptis; loculis plurimis, sepe complanatis; primo inflato, mucronato, ultimo convexo, strangulato, antice producto.

Conchiglia molto allungata, non sempre gracile, a bastanza solida, guernita di 9 costole longitudinali ben rilevate, talvolta ottuse, acute ne' maggiori individui, ma non mai interrotte; composta di molte cavità per lo più poco distinte, e regolarmente crescenti in diametro dalla prima all'ultima, la prima delle quali suol essere più tumida delle susseguenti, ma talvolta è angusta assai più, onde la estremità risulta acutissima, specialmente lorchè il mucrone esiste; l'ultima d'ordinario è convessa, preceduta da un forte strangolamento, e prolungata anteriormente quando più, quando meno, ma sempre a dirittura, seguendo la direzione dell'asse ideale; l'apertura è semplice e tonda.

Lungh. = 3 a 6 mill.

Dentalina acuta, d'Orb. Foram. de Vienn. pag. 56 n. 39. Pl. II, f. 40 a 43.

(1) Per la piccola curvatura di tutta la conchiglia, e per la obbliquità del prolungamento dell'ultima cavità essa andrebbe riposta tra le *Dentaline*, secondo i principii del sig. d'Orbigny. Ma noi abbiamo diversamente valutato tali caratteri, come può vedersi consultando questo articolo nella Paleantologia del Regno.

Osserv. Il d'Orbigny descrisse questa specie sopra esemplari non maggiori di 3 millimetri in lunghezza; quindi la disse *molto gracile*, con *costole ottuse*. Noi troviamo questa specie anche d'una lunghezza doppia, di solidità maggiore, e con le costole acute; ed in questi individui talvolta la prima cavità non è più tumida delle altre. Forsi alle mani del sullodato autore questi esemplari sarebbero riferiti ad altra specie; ma io non vi trovo caratteri bastevoli per separarne, se n'eccectui la statura.

In quanto al mutamento generico, si consulti il luogo indicato dalla precedente nota; e però faremo qui notare, che l'apertura non è punto laterale, nè il prolungamento inclinato sull'asse ideale. Non rimane dunque che la sola curvatura della conchiglia, carattere insufficientissimo per la determinazione generica delle Dentaline.

7. *Nodosaria excentrica*, Cos. Tav. I, fig. 21.

N. testa conoidea, solida, breviuscula, compressiuscula; loculis 7 explanatis, rude costatis; costis 6-10 latere altero irregulariter interruptis, altero continuis, oblusissimis; loculo primo mucrone brevi munito; ultimo parum antice producto; apertura excentrica, oblonga, peristomate elevato cineta.

Conchiglia assai solida, corta, e di forma quasichè conica; composta di 7 cavità appena distinte, molto più corte che larghe; guernita per lo lungo di 6 a 10 costole grossolane; le quali s'interrompono svariatamente sopra uno de' lati della conchiglia, dove le cavità si elevano o gonfiano maggiormente, ed a misura che crescono; dal lato opposto le costole sono continue, molto grosse e ben rilevate; tutte poi si prolungano sopra l'ultima cavità fino a congiungersi con un risalto che cinge l'apertura. Siccome la conchiglia è più gonfia in uno de' lati, e tal rigonfiamento va crescendo dalla 4 alla 7 cavità, così ne prosegue che questa ultima acquista la forma trasversalmente ovale, e l'apertura segue la stessa norma, trovandosi più prossima al lato retto e regolare della conchiglia, come la fig. C la dimostra. Lungh. = 0,5 mill.

8. *Nodosaria spinulosa*, Cos. Tav. 1, fig. 28 A, B, C, D. (*Citri-*

tus) var. $\left\{ \begin{array}{l} a \text{ cultrata, fig. C.} \\ b \text{ spinulosa, fig. A.} \\ c \text{ contorta} \end{array} \right.$

N. testa torulosa, contracta, nunc recta, nunc magis minusve incurvata, longitudinuliter grosse costata; costis cultratis, sepius interruptis, et denticulatis aut spinulosis; loculis 6-7 brevissimis, planulatis vel strangulatis; primo quandoque compresso, cultrato et denticulato, quandoque acuminato, sepiusque obtuso; ultimo aliquando minore, inflato, strangulato, antice in siphonem cylindraceum producto, sepiusque obtuso, detruncato. Facie citrulli.

La frequenza di questa specie ci à dimostrato la variabilità dei suoi caratteri, non diversamente di quel che accade in tutte le specie ch' eccessivamente si moltiplicano, come nella *N. hispida*. Isolando certi individui si sarebbe condotto a definirli del genere *Margimulina*; altri si direbbero col d'Orbigny *Dentalina*; ma il dominante carattere delle cavità tutte regolarmente trasversali sull'asse rettilineo o un poco incurvato, e l'uscita del prolungamento dell'ultima cavità sempre sulla linea media normale dell'asse, conducono necessariamente al genere *Nodosoria*.

Essa è sempre molto crassa e guernita di costole grossolane e molto rilevante; si compone di 6 a 7 cavità sempre più corte che larghe; e poco regolarmente crescenti dalla prima all'ultima, nè sempre, nè ugualmente ben distinte. Tutto si muta dall'uno all'altro individuo. L'aspetto suo è proprio di un *citrinolo*, come quello mutandosi nella forma e negli accidenti od appendici.

Le cavità cominciano talvolta dall'essere sensibilmente compresse; ed in tal caso le due opposte costole si continuano sopra la estremità della prima, e vi formano una carena acuta, or continuata e tagliente, f. C, ora dentellata, fig. A, oppure è tonda e prolungata in acume, fig. D. Le costole d'ordinario sono interrotte, ma senza norma veruna, e non di rado spinolose; quà mancano, là si raddoppiano, o altra se ne interpone. L'ultima cavità in certe si prolunga a foggia di pera, ed il sifone vi si protende come un corto pedicello. In talune altre rimane strangolato, londeggiante, di minor diametro, come nella fig. B della medesima tavola.

Il prolungamento del sifone talvolta è centrale e normale all'asse; tal'altra è un poco laterale e ripiegato; spessissimo poi manca affatto, terminandosi bruscamente quasiché fosse interrotto.

Lungh. magg. = 2,5 mill.

Specie frequentissima.

9. *Nadosoria deiseeus*, Cost. Tav. 1, fig. 6.

N. testa solida, longitudinaliter 10-costata; costis acutis antice evanescentibus; loculis ovato-convexis, postice magis inflatis, ultimo minime acuminato, apertura radiata, anulo cineta.

Conchiglia di solida struttura, guernita di 10 costole longitudinali, mezzanamente rilevate ed acute, le quali sulle suture si spianano; composta di cavità ovoidi che posteriormente dilatansi alquanto più che nella parte anteriore; l'ultima meglio distinta per un collareto liscio sulla sutura, è anche minore delle precedenti, e terminata bruscamente; l'apertura è raggiata, e cinta da un anello rilevato al quale metton capo le costole.

Il moncone che ne possediamo à tre sole cavità, ed è lungo 4, 5 mill.

10. *Nodosaria inflata*. Cos. Tav. 1, fig. 18.

N. subcylindrica, loculis 3-4 inflatis, sutura profunda distinctis, primo subacuto, ultimo pyriformi, longitudinaliter costatis, costulis 7-8 latiusculis.

Tal'è il tipo di questa specie che noi trovammo nella marna argillosa di Taranto; ma essa come ogni altra varia nella squisitezza delle suture, e nel numero delle costole, che nell'individuo qui effigiato si trova maggiore, ingenerandosene taluno per mezzo nell'ultime cavità; le altre mostrano qualche irregolare interruzione.

Lungh. = 2 mill. Rara.

— *varietas*. Tav. I, f. 17.

Ritengo come semplice varietà della precedente quest'altra, nella quale due sole cavità si trovano compiute, con 7 costole. Tutt'altro è identico.

Lungh. = 0,8 mill.

— Costa, Paleont. del regno di Napoli, II. pag. 157. Tav. XIII, f. 4.

11. *Nodosoria anulata*. Reuss. Tav. I, fig. 16.

Il prelodato autore assume per carattere specifico l'anello che cinge il prolungamento del sifone; ma siccome noi troviamo frequente tale specie ci siamo assicurati che manca per lo più, senza variar punto negli altri caratteri, non eccettuata la grandezza. Esso non è dunque da ritenersi qual carattere essenziale per la specie.

12. *Nodosoria sulcata*. Cos. Tav. I. fig. 4.

N. testa elongata, gracili, recta, loculis rotundatis, longitudinaliter sulcatis, sulcis 16; loculo ultimo oblique produeto transversaliter et concentricè striato; foramine parvo rotundo cineto.

Conchiglia gracile molto allungata, composta di cavità quasi globose, poco diverse in diametro; longitudinalmente marcata da solchi larghi e profondi che lasciano delicate elevatèzze al numero di 16. L'ultima cavità si prolunga obliquamente, come nelle dentaline, mentre la conchiglia è retta, e la sua superficie nella faccia superiore è striata sottilmente e concentricamente. L'apertura è piccolissima, semplice, rotonda, e cinta da una elevatèzza circolare.

13. *Nodosoria subaequalis*. Cos. Tav. I, fig. 5.

N. testa subaequali, loculis 7 globosis, laevibus, minutissime punctatis.

Conchiglia composta di 7 cavità, quasi uguali tra loro, crescendo alquanto in diametro quelle di mezzo, e pochissimo differendo le prime dalle ultime; tutte quasi sferiche e ben distinte da sutura profonda; la superficie è minutamente punteggiata di punti impressi; l'apertura è centrale e rotonda.

Lungh. = 1,4 mill.

Nodosaria hispida, d'Orb. Tav. I. fig. 10.

— D'Orbigny, Foram. de Vienn. pag. 35, Tab. I, fig. 24 e 25.

— Costa, Palcont. del reg. di Nap. II, pag. 135.

Le numerose varietà di questa specie sono state già notate nell'opera citata. Qui ne abbiamo effigiate due sole, le meno frequenti altrove, più però nella marna di Messina. Nè sapremmo quanto l'*a-culeata* del medesimo autore, l. c. fig. 26 e 27 sia da questa distinta! L'A. vi considera solo il ravvicinamento delle cavità, che nella *hispida* sono separate da uno strangolamento molto sensibile.

L'*a-culeata* è soggetta alle stesse variazioni pel numero e disposizione delle cavità; e talune in sulle prime ripiegansi quasi in spirale, come in quelle delle quali il d'Orbigny à fatto la sua *Marginulina hirsuta*! Tab. III, fig. 17.

Come à fatto la *M. rugosa-costata* da una simile variazione della *Nodosaria spinosa*.

15. *Nodosaria ovularis*, Cos. Tav. I, fig. 8, 9 e 9'.

N. testa clongata, recta, laevigata; oculis 2-4, convexis, pyriformibus, distinctissimis; suturis excavatis, quandoque limbatis; loculo ultimo antice acuminato; apertura minima rotunda, radiata aut simplici.

Conchiglia allungata, dritta, levigatissima, ed un poco trasparente, anteriormente acuminata, posteriormente rotondata ed ottusa; composta di due, tre e quattro cavità ovoidee, separate da una sutura profonda, talvolta larga quasi che fosse un collare liscio e spianato, non mai però cinto da risalti di sorta; l'ultima cavità si prolunga in avanti a modo di pera, terminando in acume, con apertura angustissima, rotonda, talvolta raggiata, tal altra semplice.

Lunghezza de' maggiori individui = 2,7 mill. — de' minori = 1, 3 mill. (con 2 cavità). Piuttosto frequente.

Osserv. Il d'Orbigny descrive una specie col nome di *limbata* simile affatto a quella da noi effigiata nella Tav. I, fig. 9. In essa trova l'autore un *risalto* che separa ciascuna cavità dal collaretto intermedio. Noi troviamo il collaretto ben distinto in taluni esemplari, in altri nò, ma il risalto limitatore non mai. Ed è notevole che gli esemplari da noi esaminati anno dimensione più che doppia di quella degl' individui che l'A. trovava a Mendon presso Parigi (2/3 di mill.). Vuole in quella l'apertura raggiata, che noi non troviamo costantemente. In fine dice distinguersi la sua *limbata* dalla *radicola* propria del Mare Adriatico pel *solo risalto trasversale che si lascia distinguere sulle suture*. A noi sembra che l'una come l'altra non siano che semplici modificazioni accidentali di una medesima specie; e che gli esemplari fossili della marna di Messina si distinguono solo per la loro maggiore statura. Laonde, per allontanare gli equivoci, l'abbiamo distinta col nome di *ovularis*, tal essendo la forma delle sue cavità così ben separate le une dalle altre.

Genere GLANDULINA, d'Orb.

1. *Glandulina oblonga*, Cos. Tav. II, fig. 1.

G. testa parvula, ovato-oblonga, laevigata; oculis tribus, suturis vix distinctis; duobus primis subaequalibus, tertio minimo hemisphaerico; apertura simplicissima minima.

Conchiglia piccolissima, composta da tre sole cavità, che tutte insieme costituiscono un corpo ovale-allungato, simile a nocciolo di oliva; le due prime cavità son quasi uguali tra loro, e distinte da sutura poco profonda, la terza è piccolissima, ed a modo di coperchietto emisferico è sovrapposta alla precedente; nel suo mezzo è l'apertura piccolissima, rotonda, e semplice.

Lungh. = 0,7 di mill.

2. *Glandulina pusilla*, Cos. Tav. II, fig. 2.

G. testa minima, dimidio longiore quam ampla; loculis tribus, brevissimis, varimode costatis; costis irregularibus, longitudinalibus, obliquis.

Conchiglia piccolissima, assai tozza, composta costantemente di 3 cavità brevissime, e quasi l'una contro l'altra compressa, il doppio più larghe che lunghe, distinte da sutura poco profonda, ed ornate di alcune costole irregolarmente disposte per lo lungo, quale più, quale meno obbliquamente; talvolta si trova un appendice allo estremo della prima cavità; tal altra l'ultima presenta tracce di un proseguimento; l'apertura è rotonda ed un poco increspata.

3. *Glandulina pyrula*, Cos. Palcont. II. Tav. XXVII. fig. 25. Rara.

4. *Glandulina rudis*, Cos. Tav. I, fig. 12.

Gl. testa conoidea, magna, rudi, crassa; loculis 5 indistinctis, superficie scabra; ultimo antiec tubuloso; apertura rotunda minima.

Conchiglia di forma tendente al cono, ottusissima nel vertice, molto solida; ruvida e spesso scabrosa allo esterno; composta di 5 a 6 cavità non apparenti allo esterno per essere tutta la conchiglia quasi interamente incrostata; l'ultima cavità à un prolungamento tuboloso, nel cui centro apresi un angusto forame, ordinariamente ostrutto.

Lungh. = 1,5 mill. — Frequente.

Senza aprire, o dividere per metà questa conchiglia, è impossibile assicurarsi della sua organizzazione, e quindi del genere al quale spetta.

Genere DENTALINA d'Orb.

Diamo qui la serie di talune delle specie di tal genere, le meglio

determinate, riserbando le molte altre per la proposta *Monografia*, ove ne saran date le note differenziali con metodo abbreviato e chiarissimo, schivando così le lunghe ed inutili ripetizioni.

Dentalina clavata, Cos.

D. — irregularis.

D. — arundinacea, Cos.

D. — pleura, Cos.

D. — scripta, d'Orb. — mancano le strie piccole ed interrotte.

D. — triquetra, Cos.

D. — nodosa, d'Orb. — Par.

D. — aequalis, Cos.

D. — acicularis, Cos.

D. — antennula, d'Orb. — Vien.

D. — exilis, Cos.

D. — communis, d'Orb. — Par.

D. — gracilis, d'Orb. — Par.

D. — Lorneiana, d'Orb. — Par.

Genere VAGINULINA d'Orb.

1. *Vaginulina Italica*, Cos. Tav. II: fig. 15, *A, B, C*.

Imponiamo un tal nome alla più gigantesca delle specie di tal genere, la quale si mostra pure molto frequente nel terreno al quale appartiene, comechè vien essa con le sue congeneri a documentare ampiamente la preferenza di questo genere nei terreni terziarii inferiori. Noi ne avevamo già prodotti due esempi nella Paleontologia del regno, ma troppo rari. Nella Marna di Messina gli esempi sono rilevanti per numero di specie, per abbondanza d'individui, e per nitidezza di caratteri.

Il d'Orbigny, nella *Paleontologia stratigrafica*, fra le 14 specie note, ne cita una sola de' terreni terziarii del N.E. della Germania. Dei terreni terziarii d'Italia non ce ne porge alcun simbolo: e pure il Soldani, nella Tav. VI, fig. 44 del suo Saggio Orittografico, nettamente ne rappresenta una: ed è bello il sentir da quello scrittore la sua definizione — *Orthoeruta vaginulum gladii referentia* (pag. 108): ed il d'Orbigny, mentre adotta lo stesso nome radicale di *Vaginula*, ridu-

cendolo all'unità di linguaggio in *Vaginulina*, per non ricordarne la provenienza da questo italiano scrittore, che, secondo lui lavorava per semplice microscopico divertimento, dice, che il nome ch'egli assegna a tal genere ricorda la forma di guscio di leguminosa. La specie descritta da Soldani proviene dal terreno posto all'oriente di Monte chino.

Io non conosco in natura la specie effigiata dal Soldani; ma dalla immagine si può ben giudicare, che sia differente assai dalla nostra: e però posso con fiducia esibirla come specie non conosciuta.

Essa è simile ad un baccello di fagiolo bianco nostrale, avendo una lunghezza decupla della sua larghezza; si compone di 20 e più cavità (talune anche meno, 14) tutte distinte da un cordone rilevato sopra le suture, molto obblique, e più corte che larghe; dal lato dorsale è carenata, sovente con carena tripla: la prima cavità à un'appendice o mucrone non molto lungo, che spesso manca del tutto; l'ultima cavità è maggiore di tutte, e sull'angolo ascendente si aguzza più o meno, presentando un'angusta apertura, la quale il più delle volte trovasi ostruita, o naturalmente oblitterata.

Lungh. = 6 a 7 mill.

In taluni individui i risalti suturali sono spianati, ed in vece le cavità sono per lo lungo striate. Ciò si avvera in tutti gl'individui che cominciano per una forma più acuta, ed in tal caso manca il mucrone. Vedi fig. *B* della citata tavola.

Per altri sarebbe essa forse una distinta specie!

2. *Vaginulina lens*, Cos. Tav. II. fig. 16, *A*, *B*.

Conchiglia assai breve proporzionalmente alla sua lunghezza, molto compressa, levigata; composta di 4 a 5 cavità, le cui suture si scancellano o si spianano; la prima cavità à alcune rughe longitudinali ed obblique, che si scancellano sopra la seconda, ed un'appendice cilindrica molto lunga, che ne rappresenta il peduncolo; le cavità successive, dilatandosi gradatamente si spianano da più in più, e l'ultima si termina con un breve prolungamento laterale, al cui estremo è l'apertura; il lato ventrale è curvo, e fatto a spigolo ottuso, il dorsale à tre ottusi cordoni (fig. *B*).

Lungh. = 1,6 mill.

3. *Vaginulina sulcata*, Cos. (an *Arpula*?). Tav. II. fig. 17 A, B.

Conchiglia molto crassa, solida, nitida, anteriormente più larga, ritondata ed un poco carenata; posteriormente più angusta e ripiegata a foggia di rostro; le cavità sono indistinte; e tutte profondamente e grossolanamente solcate per lo lungo, i quali solchi si scancellano prima di raggiungere l'ultima cavità; questa è soltanto distinta per un leggiero strangolamento, è levigata, triangolare, e si protende incurvandosi leggermente sul lato dorsale; al suo apice è l'apertura rotonda e semplice.

Lungh. = 1,6 mill. Frequente.

4. *Vaginulina clavata*, Cos. Tav. II, fig. 18, A, B.

Specie che fa il passaggio al genere *Marginulina*; talchè non si può che con dubbio registrare sotto l'uno o l'altro de'due generi. L'ultima cavità non è convessa come nelle *marginoline*, e le prime mentiscono l'esordio della nostra *Spirolina clavicola*. Le *marginoline* come si sa si stringono con quest'ultimo genere. La natura non à confini tanto precisi, quanto noi li vorremmo!

La conchiglia è brillantissima, alquanto trasparente, nitida, levigata e senza risalti o solchi di sorta.

Lungh. = 3,4 mill.

Genere *TRIPLASIA* Reuss

Conchiglia libera, regolare, drilla, di forma ovale, od anche più allungata; composta di cavità sovrapposte l'una all'altra, ricuoprendosi, infilate ad un asse ideale dritto, senza veruna sporgenza al contorno; l'ultima cavità terminata da un prolungamento centrale, al cui estremo è l'apertura rotonda.

Lungh. = 3,2 mill.; 10 concamerazioni.

Triplasia Murchissoni.

Osserv. Il Reuss, a cui dobbiamo la conoscenza di questo nuovo genere, lo fondava sopra una specie per lui trovata nella marna di Edelsbach, la quale specie intitolava al Ch. Murchisson. Egli ne dà la descrizione e figura in una sua Memoria sopra i *Caratteri degli scisti marnosi* delle Alpi occidentali della Boemia, inserita nel VII. volu-

me delle Memorie dell' Imp. e R. Accademia di Scienze Naturali pag. 65, — 1854.

Una seconda specie di tal genere noi troviamo nelle Marne di Messina, assai da quella distinta.

Dessa à forma molto più allungata di quella, e può dirsi lanceolare; l'estremo inferiore od anteriore è acuminato e rugoso, dissipandosi le rughe dopo piccolo tratto sulla prima cavità; le sue tre facce sono sensibilmente incavate, ma non uguali in larghezza, una essendo men larga delle altre due uguali tra loro, sicchè il taglio trasversale presenta la figura di un triangolo isoscele; vi si scorgono solo alcune oscurissime ondolazioni o pieghe longitudinali, senza veruna traccia di suture; l'ultima cavità è meno acuta della prima, ed al suo estremo è l'apertura rotonda e semplice.

Io non ne ò trovato finora che un solo individuo; onde può tenersi come sommamente rara; ma forse potrò ottenerla in seguito d'iterate ricerche.

Lungh. — 0,9 mill.

Genere LINGULINA d'Orb.

Lingulina multicosata, Cos. Tav. II, fig. 6. *A*, *B*.

L. testa ovato-subrotunda, antice dilatata, postice obtusa, longitudinaliter costata; costis viginti obtusis, antice obrupte evanescentibus, majoribus minoribusque alternantibus; loculis duobus transversis; ultimo sub-acuminato; apertura lineari.

Conchiglia ovale, un poco compressa, ornata di 20 costole quasi ritondate, le quali si arrestano sul contorno anteriore di ciascuna cavità, crescendo però di numero a misura che le cavità si moltiplicano, e quindi aumentano in diametro; perciò stesso le successive costole sono meno rilevate ed alternano con le maggiori; succede a queste sensibile depressione, e a mano a mano elevandosi forma un mammellone, in cima al quale è l'apertura lineare ed angusta; questo spazio è liscio.

Lungh. = 1,5 mill. Rara.

Affinissima è questa nostra specie alla *L. costata* d'Orb. (Foram. de Vienn. pag. 62, Tab. III, fig. 1-5); dalla quale differisce per essere meno compressa, senza carena laterale, e guernita di un mag-

gior numero di costole, avendone quella 7 per lato. E poichè i due esemplari, che noi abbiamo trovati per ora, non hanno che due cavità ciascuno; e siccome vediamo crescere un tal numero a misura che si aumentano le cavità, e cresce quindi il loro diametro; così è da credere che negli adulti un tal numero fosse ancora maggiore.

Forse col crescere della conchiglia svanisce quella brusca interruzione delle costole sul perimetro della seconda cavità. Però nella *costata* del d'Orbigny, anche nell'individuo che à 2 sole cavità, le costole si protendono e svaniscono gradatamente sulla faccia anteriore

MÉMOIRES MATHÉMATIQUES

PRESENTATE

DA' SOCI ALL' ACCADEMIA NELL' ANNO 1856

E DA ESSA APPROVATE.

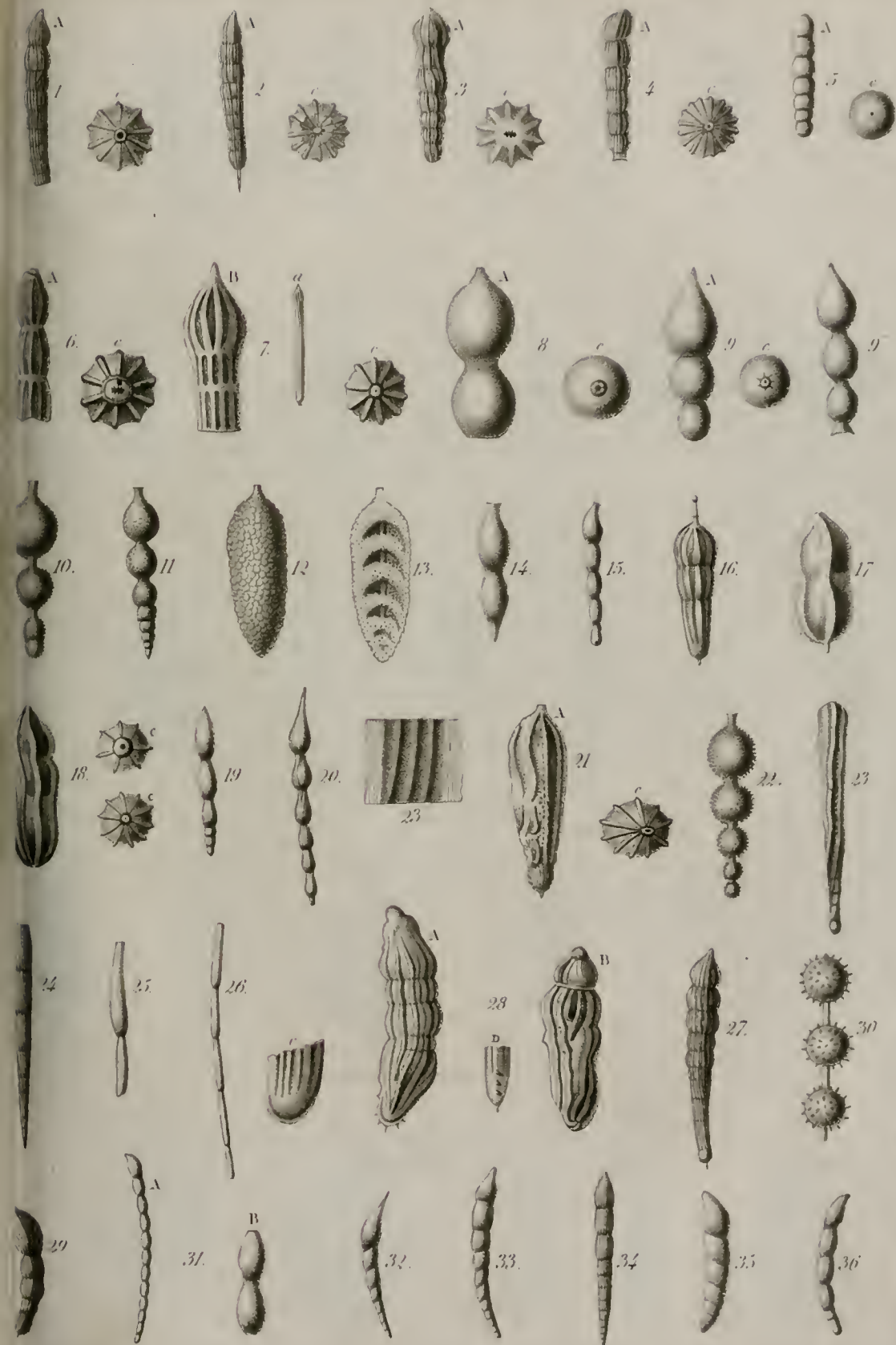
FORMOLE E TAVOLE
PER LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA
DI KEPLERO

DEL SOCIO ORDINARIO

CAV. A. DE GASPARIS

Pochi sono in Astronomia problemi più spesso risolti, e di maggior importanza del problema di Keplero. Esso consiste in una relazione, semplicissima in apparenza, fra l'anomalia media, l'eccentrica, e l'eccentricità, relazione che conduce ad una equazione trascendente allorchè l'incognita è l'anomalia eccentrica. Non starò qui a ricordare i lavori de' Geometri e degli Astronomi per risolverla. La più parte di essi vi perviene collo sviluppo in serie, ed altri suggeriscono regole pratiche. Onde portiate giudizio di tutti dirò che il Gauss non esita a credere che tutti i metodi che poggiano sulle serie si trovano essere impraticabili per poco che l'eccentricità sia sensibile. Dal suo canto propone una regola veramente preziosa, attualmente seguita da tutti gli astronomi, e che pe' pianeti finora conosciuti (eccetto alcuni planetoidi) non lascia a desiderare di più. Affinchè la regola di Gauss possa mettersi in pratica è necessario conoscere di già il valore approssimato dell'incognita, ed invero pochi e facili tentativi bastano a ciò, nella più parte de' pianeti ora noti. Intanto l'astronomia va sempre più accrescendo il catalogo delle comete periodiche, le orbite delle stelle doppie giungono al di là di trenta, la famiglia de' planetoidi, fra i quali parecchi hanno orbita abbastanza eccentrica, cresce ogni anno scoprendosi nuovi individui, ed in tutti questi casi la regola di Gauss è di penosa applicazione. Infatti la differenza fra l'anomalia media e l'eccentrica che pe' pianeti antichi non oltrepassa i cin-

que o sei gradi , ne' casi ora menzionati può giungere a 57 , ed è precisamente tal differenza che fa d' uopo prossimamente conoscere per applicare la regola del Gauss. Si aggiunga che tal regola , quando l' eccentricità è quale ordinarariamente si ravvisa ne' corpi celesti testè nominati , oltre i molti tentativi che richiede ad ottenere un valor prossimo dell' incognita , vuole altresì una terza ed anche una quarta approssimazione, onde fissare il valor esatto dell' incognita stessa. Nel lavoro che ora presento all'Accademia mi son proposto di togliere tale ostacolo , di far cioè in guisa *che il problema sia risoluto con operazioni numeriche dirette, spedite, ed elementarissime*, evitando lo sviluppo in serie , o la penosa via delle prime false posizioni, come finora si è praticato. Vi sono pervenuto col trovare le soluzioni diverse che può ammettere l' equazione fondamentale del problema nel caso che l'anomalia media, e l' eccentrica variano di grado in grado, e che l' eccentricità non superi l' unità. Tali soluzioni si potrebbero ottenere con calcolo elementarissimo , ma condurrebbe ad operazioni lunghissime, stantechè le soluzioni in parola sono circa 7000. Il modo col quale vi son pervenuto è singolarmente semplice, e tanto più rimarchevole in quanto che si può egualmente applicare ad una classe estesissima di equazioni trascendenti. Ho scritto lungo una riga orizzontale i logaritmi de' numeri da 1 a 57 ed in un' altra i risultati della sottrazione de' logaritmi de' seni da 1° a 90° da un numero costante, ch' è il logaritmo di 1° in parti del raggio. Dopo ciò non resta che sommare , con data regola i logaritmi della prima serie con que' della seconda, onde avere immediatamente i logaritmi delle eccentricità che corrispondono alle soluzioni in parola. Il poter preparare con tanta facilità e sicurezza i dati del lavoro, non solo fa evitare i sbagli numerici (possibilissimi in sì lungo calcolo) ma ancora ne fa vedere l' estensione anche prima di attuarlo ; ed io sono fermamente convinto che ove tal ripiego si fosse presentato agli Astronomi, il lavoro che ora sottopongo al giudizio de' miei colleghi, sarebbe già eseguito. Le seguenti formole mostreranno la giustezza di ciò che finora ho asserito , e la tavola numerica fa vedere che per qualsivoglia valore dell' eccentricità , si ha dalla sola ispezione il valore dell' incognita approssimato entro un grado, e con semplicissime proporzioni, approssimato entro una frazione di minuto primo.





Formole servite per calcolo della tavola

I valori delle costanti $c_1, c_2, \dots, c_{\varphi}$ intendansi dedotte dalle seguenti equazioni

$$1^{\circ} = c_1 \text{ sen } 1^{\circ} = c_2 \text{ sen } 2^{\circ} = c_3 \text{ sen } 3^{\circ} \dots = c_{\varphi} \text{ sen } \varphi = c_{\varphi+1} \text{ sen } (\varphi+1) \dots$$

Ciò posto, una di esse $1^{\circ} = c_{\varphi} \text{ sen } \varphi$ può scriversi nelle seguenti maniere, cioè

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi + 1 &= c_{\varphi} \text{ sen } \varphi, & \varphi + 2 - \varphi - 1 &= c_{\varphi} \text{ sen } \varphi, & \varphi + 3 - \varphi - 2 &= c_{\varphi} \text{ sen } \varphi \\ \varphi + m - \varphi - m + 1 &= c_{\varphi} \text{ sen } \varphi \end{aligned}$$

dalle quali si deduce

$$\varphi + 1 = \varphi + c_{\varphi} \text{ sen } \varphi, \quad \varphi + 2 = \varphi + 1 + c_{\varphi} \text{ sen } \varphi \dots \varphi + m = \varphi + m - 1 + c_{\varphi} \text{ sen } \varphi$$

mettendo nella seconda il valore di $\varphi + 1$ preso dalla prima, nella 3^a quello di $\varphi + 2$ dato dalla seconda, e così successivamente sorgeranno le altre

$$\begin{aligned} \varphi + 1 &= \varphi + c_{\varphi} \text{ sen } \varphi, & \varphi + 2 &= \varphi + 2 c_{\varphi} \text{ sen } \varphi, & \varphi + 3 &= \varphi + 3 c_{\varphi} \text{ sen } \varphi \\ \varphi + 4 &= \varphi + 4 c_{\varphi} \text{ sen } \varphi \dots \varphi + m &= \varphi + m c_{\varphi} \text{ sen } \varphi \end{aligned}$$

Queste ultime equazioni mostrano che essendo data l'equazione $M = E + c \text{ sen } E$, se se ne vogliano le soluzioni pe' casi in cui M supera E di $1^{\circ} 2^{\circ} 3^{\circ} m^{\circ}$, cioè che si abbiano a risolvere le equazioni

$$\varphi + 1 = \varphi + c \text{ sen } \varphi, \quad \varphi + 2 = \varphi + c \text{ sen } \varphi \dots \varphi + m = \varphi + c \text{ sen } \varphi$$

e vedere quale sarà per ciascuna di esse il valore di c che vi soddisfa, tali valori saranno dati da $c_{\varphi}, 2c_{\varphi}, 3c_{\varphi} \dots mc_{\varphi}$ basterà cioè sommare i logaritmi della prima serie col logaritmo di c_{φ} , della seconda.

Volendosi costruire una tavola più estesa facendo variare M ed E

di $15'$ in $15'$ si calcoleranno i valori di e_1, e_2, \dots dalle equazioni

$$15' = e_1 \text{ sen } 15' = e_2 \text{ sen } 30' = e_3 \text{ sen } 45' \dots e_n \text{ sen } 90'$$

questi sarebbero i termini della seconda serie, quelli della prima sarebbero i logaritmi de' numeri da 1 a 228.

È facile vedere che le stesse precedenti considerazioni avrebbero luogo ove si volesse costruire una tavola per l'equazione $p = u - q\varphi(u)$ essendo φ una funzione qualunque, di cui però si abbiano le tavole, come le linee trigonometriche. Tutto procederebbe allo stesso modo, solo la funzione *seno* sarebbe rimpiazzata dalla funzione φ . La natura della funzione indicherebbe l'estensione de' valori di p , e la esigenza pratica della questione fisserebbe i limiti di q .

Onde rinvenire con tutta la precisione richiesta il valore dell' incognita è d'uopo che, fatte le proporzioni, si calcoli una semplicissima formola di correzione della quale si hanno già gli elementi numerici calcolati dalle operazioni precedentemente fatte. Infatti chiamando E il valor approssimativo, e ΔE la correzione, dalla equazione fondamentale

$$M = E + \Delta E - e \text{ sen } (E + \Delta E)$$

avremo per calcolare la correzione ΔE la formola

$$\Delta E = \frac{M - E + e \text{ sen } E}{1 - e \cos E}$$

Esempio— sia proposta l'equazione $62^{\circ}27'54'' = E - 0,73465 \text{ sen } E$

Per $M = 62^{\circ}$ e per la variazione di e , si ha $E_1 = 103^{\circ}01'13''$

per $M = 63^{\circ}$ e per la variazione di e , si ha $E_2 = 103^{\circ}86'47''$

Dunque, per la stessa eccentricità, la variazione di 1° in M porta nell'anomalia eccentrica la variazione di $0^{\circ}85'33''$; quindi per la variazione di M di $0^{\circ}27'54''$, la variazione di E sarà $0^{\circ}23'50''$. Onde viene $E = 103^{\circ}24'43''$, risultato esatto entro $0^{\circ}001$ di grado. Dopo ciò si trova $\Delta E = +0^{\circ}001215$ e quindi $E = 103^{\circ}24'7649''$, esatto entro $0,000001$ di grado.

Saggio della tavola

M	e	E	M	e	E	M	e	E	M	e	E
62°	0,65382	99°	62°	0,99346	114°	63	0,25077	77°	63	0,50646	92°
62	0,67346	100	62	1,02065	115	63	0,26765	78	63	0,52132	93
62	0,69342	101	63	0,01942	64	63	0,28448	79	63	0,54237	94
62	0,71373	102	63	0,03852	65	63	0,30128	80	63	0,56064	95
62	0,73441	103	63	0,05732	66	63	0,31808	81	63	0,57913	96
62	0,75548	104	63	0,07584	67	63	0,33487	82	63	0,59787	97
62	0,77696	105	63	0,09442	68	63	0,35169	83	63	0,61687	98
62	0,79889	106	63	0,11217	69	63	0,36854	84	63	0,63615	99
62	0,82129	107	63	0,13001	70	63	0,38544	85	63	0,65574	100
62	0,84417	108	63	0,14767	71	63	0,40241	86	63	0,67564	101
62	0,86757	109	63	0,16516	72	63	0,41945	87	63	0,69589	102
62	0,89152	110	63	0,18251	73	63	0,43660	88	63	0,71650	103
62	0,91606	111	63	0,19972	74	63	0,45386	89	63	0,73749	104
62	0,94120	112	63	0,21683	75	63	0,47124	90	63	0,75890	105
62	0,96699	113	63	0,23384	76	63	0,48877	91	63	0,78074	106

L'intera tavola numerica si è pubblicata ne' numeri 1082-83-84 delle *Astronomische Nachrichten*.

IL PROBLEMA DI KEPLERO

RISOLUTO DAL FU ILLUSTRE GEOMETRA

N. FERGOLA

ESTRATTO DA' SUOI MSS., DAL SOCIO V. FLAUTI.

L'illustre geometra *N. Fergola*, di cui non fu ultimo pregio quello di non aver avuto a guida altro maestro, nell'apprendere e perfezionarsi nelle Matematiche, che il proprio ingegno, ed i classici autori antichi, e moderni de' suoi tempi, svolgendoli e meditandoli assiduamente (1); mentre al contrario ebbe formata una scuola, dalla quale uscirono valorosi geometri, che ebbero onorato ed onorano il nome napoletano presso lo straniero, e l'ebbe fin dal principio corredata delle necessarie istituzioni, di che a que' tempi mancavano anco alcune grandi e coltissime nazioni (2).

(1) Egli mi ebbe più volte detto, che studiando su' *Principii matematici del Newton*, e sulla *Geometria del Cartesio*, ebbe talvolta durata fatica di mesi per sciogliersi qualche difficoltà, non avendo a chi ricorrere.

(2) La scuola fu da lui aperta all'incirca il 1775; ed è ben noto, che a quell'epoca non v'erano per l'Italia altre istituzioni di Analisi sublime, che quelle di *M. Gaetana Agnesi*: le altre di *V. Riccati* e *Saladini* non potevano servire di libro elementare; e delle une, e delle altre non era il prezzo conveniente ad uso di scuola; e n'era anco tale la scarsezza nelle scuole di Francia, che il *Bossut* si vide costretto a tradurre in francese, e pubblicare quelle dell'*Agnesi* (*Traité élémentaire de Calcul*

Tra queste ebbero luogo nel 1791 le *Prelezioni d'Principii matematici della Filosofia Naturale del cav. Isacco Newton*, pubblicate, senza il di lui nome, per comando superiore ricevutone, *ad uso dell' Università interna del Real Convitto del Salvatore*; nel vol. I, delle quali, dopo aver esposto il problema diretto e l' inverso delle forze centrali, passando a trattar delle *Anomalie de' Pianeti*, così esprimevasi, nella nota alla proposizione LXXVIII. « Uno de' più pre-
 « clari ed utili problemi, che suol proporsi in Astronomia è quello
 « di ritrovare il luogo di un Pianeta, dato il tempo, da che ei si
 « è partito dall' afelio. Questo problema, nell' ipotesi che i Pianeti
 « si rivolgano in orbite ellittiche intorno al Sole, impiantato in un
 « comune umbilico di essi, riducesi ad indagarne dall' anomalia me-
 « dia la coequata, o (convertendolo in geometrico) a dividere una
 « semiellisse in una data ragione, per una retta che passi per un
 « di lei fuoco; o finalmente a dividere nella stessa ragione il di-
 « lei semicercchio eccentrico, per mezzo di una retta che passi
 « per quel fuoco. Or non potete immaginarvi quai smarrimenti ab-
 « bia, nello spirito degli astronomi, un tal problema cagionati! Il sa-
 « gace Keplero, per l' eterogeneità, com' ei diceva, degli archi e dei
 « seni, o piuttosto pel trascendente rapporto, ch' evvi tra essi, non
 « si fidando scioglierlo *a priori*, andò a tentoni risolvendolo con la
 « regola del falso. Altri astronomi, dal non saperlo sciogliere diretta-
 « mente, conchiuser male, ch'ei non si potesse geometricamente dis-
 « nodare: e più stranamente ne inferirono, che l'ipotesi Kepleriana,
 « avvegnachè poco favorita dalla Geometria, dovesse proscriversi dal
 « sistema de' Pianeti. Infatti Ismaele Bulialdo, e Set-Ward, due famo-
 « si astronomi oltramontani, supposero, che ciascun Pianeta si volgesse

différentiel, et de Calcul intégral, traduits de l' italien de Mademoiselle Agnesi, avec des Additions, Paris 1773). L'approvazione data a tale traduzione, l' è da d'Alembert, Condorcet e Vandermonde, ed essa fu posta sotto privilegio accordato all'Accademia Reale delle Scienze. Le *Addizioni* dell' editore restringonsi in 18 pag. in fine del volume, la I^a delle quali riguarda il *Calcolo delle quantità angolari*; la II^a *Alcune osservazioni sulle integrazioni delle equazioni differenziali del primo ordine*. Ed un tal libro si è reso di una rarità estrema, di tal che non v' ha forse in Napoli altro esemplare che quello da me posseduto, che apparteneva al *Fergola*, il quale dovè probabilmente acquistarlo all' epoca che fu stampato.

« se in un' orbita ellittica intorno al Sole posto in un di lei umbili-
 « co , e che gli angoli descritti intorno all' altro fuoco, e non le aje
 « intorno al Sole fossero proporzionali ai tempi. Ed in tal modo, con
 « un metodo agevole, ed approssimante risolvevan essi cotesto proble-
 « ma delle *Anomalie*. Ma il gran *Newton*, avendo dimostrato a pri-
 « ori l' ipotesi Kepleriana, pensò di scioglier lo stesso problema com-
 « piutamente ; onde , dopo averlo costruito con la combinazione del
 « circolo e della cicloide, come l'aveva anteriormente risoluto l'illustre
 « cav. *Wren*, propose, nello *scolio del probl. 22 del lib. I.*
 « de' *Principii Matematici*, una serie di angoli convergenti, che fu
 « da' signori *Davide Gregori*, e *Gio. Keill* illustrata. Dopo di ciò i va-
 « lentissimi astronomi *Filippo de la Hire*, *Cassini*, e *Pietro Hor-*
 « *rebow* ne diedero altre soluzioni, nelle *Mem. dall' Accad. di Parigi*
 « an. 1710, 1719; e nel vol. VI suppl. di *Lipsia*; e *Giae. Herman-*
 « *no*, nel vol. I. degli atti antichi di *Pietroburgo*, non pure volle ri-
 « solverlo geometricamente, insiem combinando il cerchio e la qua-
 « dratrice di *Tschirnausen*; ma con un' approssimazione adattata a-
 « gli usi astronomici (qual è quella, che ho quassù rapportata) ne
 « guidò a fine una facilissima soluzione. Finalmente i sommi analisti
 « *Lionardo Eulero*, e *Luigi de la Grange*, sonosi ancor essi ingegnati
 « resolver tutt' i problemi delle *Anomalie*, per mezzo delle equazio-
 « ni differenziali, che le dinotano.

« Ma qui da ultimo giova esibirvi quella formola proposta dal
 « *Machin*, nelle *Transazioni anglicane*, an. 1738, ond' ei dall' anomalia
 « media raccoglie la coequeta, tanto nelle orbite di poca eccen-
 « tricità, che nelle molto eccentriche. Eccone i risultamenti.

« Il semiasse di un' orbita, la di lei eccentricità, e la differenza di
 « quello e di questa dicansi t, f, p , e sia $n = \sqrt[4]{5 + \sqrt{25 + \frac{p}{f}}}$,
 « la qual grandezza nelle orbite assai eccentriche, come son quelle delle
 « Comete, è presso a poco uguale a $\sqrt{10}$. Inoltre sieno T e P ri-
 « spettivamente ugualia $\frac{2t}{n^2 t - (n^2 - 1)p}$, ed a $\frac{pT}{t}$, ed M esprima il
 « numero de' gradi dell' anomalia media computata dal perielio, e
 « sia $R = 57^\circ, 2937$, $N = \sqrt[4]{\frac{3TM}{nR}}$; finalmente sia

$$Q = N \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{p^2}{N^2}}\right)} + N \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{p^2}{N^2}}\right)}$$

« ed $A = \text{arc. sen. } \varphi$; sarà prossimamente nA la ricercata *Anomalia*
« *eccentrica*. Egli stabilisce certe limitazioni, ed illustra questa for-
« mola con molti esenpli, che quì, per brevità, ometto. »

Fin quì il *Fergola*, nella suddetta nota, della quale può leggersene la continuazione, da chi brami istruirsi di quanto siesi operato posteriormente intorno a tal problema, in quella nota aggiunta dal *Mon-tucla* al lib. V. parte IV. della 2^a ediz. della sua *Histoire des Mathématiques*, pubblicata nell' anno VII (1799), ove accenna delle soluzioni datene dal *Bossut*, *Klugel*, *Simpson*, *Lorgna*, *Trembley*, e finalmente dal *Cagnoli*.

Ma posteriormente gli astronomi non tralasciarono occuparsi di sì importante problema, cercandone lo scioglimento più conveniente, per le vie, che ne somministra l'Analisi sublime, finchè essi convennero in adottare, come la più propria la formola data dal *Gauss*.

Da me s' ignora l' epoca precisa in cui questo sommo geometra ed astronomo insigne ebbe data tale formola; e però se essa era già nota quando il *Fergola* occupavasi a dare ancor egli una soluzione analitica di tal problema. Posso solamente rispetto a questa significare, che egli, nel 1801 distratto da altre occupazioni e dal suo stato di salute egra e dolente, decisi ad abbandonare il suo studio privato, volle che io il continuassi, ed essendo mancata l' edizione delle *Prelezioni*, che formavano l' istituzione di *Meccanica* per la nostra scuola, avendogliene parlato per ristamparle, con quelle modificazioni che stimasse convenienti, offrendomigli in ajuto in ciò ch' egli credesse, mi rispose, aver altra volta con quelle voluto facilitare l' intelligenza de' *Principii matematici del Newton*, poichè il tempo e le circostanze ciò esigevano, ma che ora tutt' altro si richiedeva, ed esser sua intenzione comporre un trattato di *Meccanica analitica*; e dopo aver data una scorsa a quelli più accreditati, che in questo intervallo di tempo se n' erano pubblicati, pose finalmente mano al lavoro; e che vi avesse adempito lo attesta, da che ritrovandomi io nel 1816 incaricato di una riforma fondamentale per l' Accademia di Ma-

rina, nella quale fu chiamato a professar la Meccanica il di lui allievo, già mio condiscipolo nella sua scuola, e finalmente nostro distinto collega *Gius. Seorza*, il *Fergola* passò nelle costui mani tali suoi MSS., che furono miseramente involati, in morte dello *Seorza*, da un giovane, ch' egli aveva accolto in sua casa, e nelle cui mani era ogni sua cosa; e sol pochi brani essendone rimasti tra' MSS. del *Fergola*, da me acquistati, molto tempo dopo la costui morte, mutilati e guasti, tra essi vi ebbi ravvisato, in fogli diversi, il problema delle *Anomalie*, che la circostanza del faticoso lavoro, a vantaggio degli astronomi presentatovi dal nostro valente geometra cav. *de Gasperis*, sovvenutomene, mi sono determinato a presentarvelo, affinchè, se l'Accademia lo stima, potesse alla parte pratica cui mira il *de Gasperis* accompagnarsi la ricerca diretta dell'argomento; e sperimentarsi da' coltivatori dell'Astronomia empirica se qualche vantaggio possa ottenersi dalla soluzione data dal *Fergola* (*).

E dee notarsi, che ad essa perviensi senza integrazioni, e senza eliminazioni d'incognite.

E comechè egli, seguendo le orme del *Newton*, ne dava di tal problema la geometrica composizione per mezzo della cicloide, non ho stimato fuori proposito recarvi ancor questa per compimento del presente lavoro, tanto più che essa può ben condurre alla costruzione di uno strumento anomalistico, per la precisa soluzione di sì importante problema. Finalmente mi conviene avvertire, che presento originalmente tali lavori del *Fergola*, di suo carattere, perchè si rilevi, che altro egli intendeva aggiugnere alla soluzione del problema *Kepleriano*, avendovi appositamente lasciato, com'era suo costume, un buon pezzo in carta bianca, prima d' inserirvi altra proposizione.

(*) A ciò soddisfa ampiamente il parere datone dal *de Gasperis*, che vedesi inserito nelle notizie preliminari al presente vol. a pag. XVI, XVII e XVIII.

PROBLEMA DI KEPLERO

§ 1. Dato il semicerechio PQA (fig. 1) dividerlo in una data ragione per una retta, che passi per lo dato punto S del suo diametro.

Soluz. Sia PBQ l'arco richiesto, onde pongasi $PBQ = \varphi$, $QG = x$, e $CA=1$. Inoltre sia $SC=e$, ed essendo $CQ:QG::CS:SN$ (fatta la costruzione che ne appare) cioè $1:x::e:SN$, sarà $SN=ex$. E sarà quindi il triangolo $SQC = \frac{1}{2} ex$ $1 = \frac{ex}{2}$, il settore $PCQ = \frac{1}{2} \varphi$ $1 = \frac{1}{2} \varphi$, e 'l trilineo $PSQ = PCQ - SCQ = \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{2} ex$. Per la qual cosa, esprimendo per π la semicirconferenza PQA, e per $m:n$ la ragione data di PSQ a PQA, dovrà esser $PSQ = \frac{m\pi}{2n}$. Ed uguagliando questi due valori del detto trilineo sarà

$$\varphi - ex = \frac{m\pi}{n} A.$$

A tal oggetto si sa esser *sen.* $\varphi = x$, e *cos.* $\varphi = -\sqrt{1-x^2}$; e può farsi *cos.* $\frac{m\pi}{n} = -e$. Inoltre considerando la grandezza ex come un arco, sarà *sen.* $ex = ex - \frac{e^3x^3}{6} + \dots$; e *cos.* $ex = 1 - \frac{e^2x^2}{2} + \dots$, trascurando in questi due valori le potenze superiori alla seconda per esser la e picciolissima nelle orbite de' Pianeti. Ma *cos.* $(\varphi - ex) = \text{sen.} \varphi$. *sen.* $ex + \text{cos.} \varphi$. *cos.* ex . Dunque ponendo i valori di queste grandezze di già indicati, sarà

$$x \left(ex - \frac{e^3x^3}{6} \right) - \left(1 - \frac{e^2x^2}{2} \right) \sqrt{1-x^2} = -e B$$

Intanto si liberi da' radicali l'equazione B, come suol farsi, e vi si trascurino le potenze della e superiori alla seconda; sarà, fatte le debite riduzioni,

$$(2ex + 1 + e^2) x^2 = 1 - e^2,$$

e quindi

$$x = \sqrt{\left(\frac{1-e^2}{2ex + e^2 + 1} \right)} C$$

Supponendo $PQ' = \varphi$, $Q'G' = x$, etc, si troverà come qui sopra, esserne $SPQ = \frac{1}{2}\varphi - \frac{ea}{2}$: e quindi $\varphi - ex = \frac{m}{n}\pi$. E adoperando i medesimi artifizi del precedente caso, ne otterremo in quest' altro

$$x = \sqrt{\left(\frac{1-ec}{-2ec+e^2+1}\right)} \dots D$$

Ed essendo $e < 1$, sarà $2e > 2ec$. Ma l'è poi (7. *El. II.*) $1+ee > 2e$; dunque sarà maggiormente $1+ee > 2ec$; quindi per esserne $1+ee-2ec$ grandezza positiva, sarà reale la seguente espressione $\sqrt{\left(\frac{1-e^2}{1+ee-2ec}\right)}$

TEOREMA

Coll'asse AP (fig. 2) uguale al diametro del semicerchio ABP intendasi descritta la cicloide volgare PLF, e vi si descriva la semiellisse AKP, che abbia per asse minore l'anzidetto diametro, e per semiasse maggiore la CK uguale alla SA, ch'è il segmento maggiore di quel diametro diviso in S: io dico essere il trilineo circolare PSQ proporzionale alla FH parte della corrispondente semiordinata della cicloide tagliatavi dall'ellisse.

Dimostrazione. Pongasi, come in tali ricerche si suol fare, il raggio $CA = CB = 1$, e la $CS = e$; sarà $CK = AS = 1 + e$. Inoltre sia l'arco $PBQ = \varphi$, ed il suo seno $QG = x$. Sarà il settore circolare $PCQ = \frac{1}{2}\varphi$ $1 = \frac{1}{2}\varphi$. E sarà poi il triangolo $QSC = SC \frac{1}{2} QG = \frac{1}{2} ex$; e quindi dovrà essere il trilineo circolare $PSQ = PCQ - SCQ = \frac{1}{2}(\varphi - ex)$.

Ciò posto, per la natura dell'ellisse AKP, sta $CB : CK :: GQ : GH$, cioè, $1 : e + 1 :: x : GH$, onde sarà $CB : BK :: GQ : QH$, cioè $1 : e :: x : QH = ex$. Ma è poi per la natura della descritta cicloide la $QF = PQ = \varphi$; dunque sarà $FH = FQ - QH = \varphi - ex$; e quindi il trilineo PSQ proporzionale alla FH*. Cioè il detto trilineo uguale al rettangolo della metà del raggio del cerchio, e della FH.

§. *Scol.* Questo teorema contiene i principii da poter comodamente

dividere un semicerchio in una data ragione per una retta, che passi per un dato punto del diametro. Del che eccone la soluzione.

PROBLEMA

Dato il semicerchio AQP (fig. 2), ed il punto S nel suo diametro, dividerlo in modo per una retta SQ, sicchè stia AQP ad ASQ, come n ad m.

Soluzione. Si chiami π la semicirconferenza AQP, e ritengansi i medesimi simboli del precedente teorema, sarà il semicerchio AQP = $\pi \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \pi$. E dovendo essere AQP:PSQ :: n:m, sarà ASQ = $\frac{m\pi}{2m}$. Ma l'è poi, pel teorema precedente, PSQ = $\frac{1}{2} (\varphi - ex)$; dunque sarà $\varphi - ex = \frac{m\pi}{n}$, cioè FH = $\frac{m\pi}{n}$.

Quindi il presente problema ridurrassi ad applicare tra le date curve PLF e PKH la data FH, con un dato sito. Lo che può geometricamente ottenersi.

Scol. Un tal problema sebbene ritrovisi risoluto dal *Fergola*, e resane pubblica la soluzione nel volume degli *Opuscoli* della sua scuola, da me e dal mio collega ab. *Giannattasio* editi fin dal 1811 (*Opuse. IX*), pure giova qui recarlo, per essersi resa assai rara quella raccolta.

PROBLEMA

Date di posizione due qualunque curve, applicare tra' perimetri di esse una retta di data grandezza, e parallela ad un'altra data di sito.

Soluz. Le curve date di sito sieno le ANB, QSD (fig. 3), ed R la grandezza della retta da applicarsi tra esse, parallelamente all'altra CD data di posizione. A ciò ottenere dinoti la retta AC l'asse della curva ANB, e condotta da un qualunque punto A di tal retta la Aa parallela alla CD, ed uguale alla data R, si tiri per a la ae parallela

al detto asse. Poi intorno ad ac intendasi descritta la curva anb identica all'altra ANB , e similmente posta; sicchè le ordinate NM, nm , che in esse corrispondono alle uguali ascisse AM, am non solamente sieno uguali, ma vi sieno benanche per diritto (1).

Inoltre da un punto n ove segansi le curve QSD, anb , (lo che dee assolutamente verificarsi se tal problema sia possibile) si conduca la nN parallela alla CD ; sarà questa la retta addimandata.

Dim. Imperocchè essendo uguali le due nm, NM , aggiuntavi la mN di comune, sarà l'intercetta nN uguale alla mM , cioè alla Aa , o alla data R . Ma è pure essa nN parallela alla Cd data di posizione. Dunque essa soddisfa alle condizioni del problema.

(1) Qui potremmo immaginarci, che la curva ANB passi nel sito anb con moto a se parallelo, talchè il punto A cammini per Aa , conducendovi la AC con la medesima inclinazione ad Aa . Questo principio, che dal *Fergola* escogitato fu detto di *Trasposizione rettilinea o angolare*, e che fu da lui proposto, nell'anno 1787, all'Accademia delle scienze di Napoli di quell'epoca, fu riproposto, nell'anno 1787, all'Accademia attuale delle scienze, ed anche annunziato nella sua *Arte Euristica*, che da me rifatta, su que' MSS., che n'ebbi potuto recuperare; e mi giova nutrir la speranza, che se per altro tempo la vita non mi abbandona, continuando a pubblicare questo trattato, di cui n'ebbi pubblicato il vol. I, cioè la parte elementare di esso, possa far conoscere di quanta utilità riesca applicare e risolvere problemi, che senza di esso, si rimarrebbero insolubili.

METODO

PER RINVENIRE L'ANOMALIA ECCENTRICA, DATA LA MEDIA

DEL FU NOSTRO SOCIO ORDINARIO

GIUSEPPE SCORZA

PROP. I. — TEOREMA

Se Φ dinota l'anomalia media di un pianeta, Ψ la sua eccentrica, dovrà essere sempre $\Phi = \Psi + n. \text{sen } \Psi$, ove la n dinoti il rapporto dell'eccentricità al semiasse maggiore dell'orbita ridotto in gradi.

Dim. In fatti (Fig. 1.), gli archi AD, ed AB ne rappresentino rispettivamente le proposte anomalie Φ , e Ψ del Pianeta, ch'è in M: T ne dinoti il tempo in che egli è quivi pervenuto dall'Afelio, e P sia il suo tempo periodico. Dovrà essere T a P, come l'arco AD alla circonferenza ADPQ, e come il settore ACD al cerchio ADPQ. Ma per le teorie Newtoniane è anche T a P, come l'aia ellittica ASM all'intera ellisse AMPR, cioè come l'aia circolare ASB al cerchio ADPQ, la qual cosa è nota da' conici, dunque sarà il settore ACD al cerchio ADPQ, come l'aia circolare ASB al medesimo cerchio. E sarà quindi l'aia circolare ASB uguale al settore ACD. E toltone di comune il settore BCA, dovrà rimanervi il triangolo BSC uguale al settore DCB, e quindi reciprocando le basi coll'altezza sarà $EB : BD :: CB : CS$; e ponendo $CS = e$ $CB = r$, ed $EB = \text{sen } \Psi$, sarà $r : e :: \text{sen } \Psi : \frac{e}{r} \text{sen } \Psi$ che ne sarà uguale all'arco BD; ma l'arco AD è uguale agli archi AB, e BD, dunque sarà $\Phi = \Psi + n. \text{sen } \Psi$, ove la n ne dinoti il rapporto dell'eccentricità al semiasse dell'orbita ridotto in gradi C. B. D.

Corol. 1.° Da ciò che si è dimostrato è chiaro, che il seno dell'anomalia eccentrica stiane alla sua differenza dalla corrispondente anomalia media, in una costante ragione, come n'è il semiasse maggiore all'eccentricità dell'orbita. E quindi essendo data l'anomalia eccentrica Ψ , ne sarà data facilmente l'anomalia media Φ ; poichè dev'essere $\Psi + n. \text{sen } \Psi = \Phi$.

Corol. 2.° Inoltre essendo data cotesta anomalia eccentrica AB, sarà ancora dato l'angolo al centro ACB, e con ciò il suo conseguente BCS; ma son dati i lati BC, CS che nel triangolo BCS il comprendono, dunque dalla risoluzione di questo triangolo se ne rileverà facilmente l'angolo BSA; ma la tangente di questo angolo stà alla tangente dell'angolo MSA, siccome BE:ME, cioè nella data ragione dell'asse maggiore dell'ellisse al di lei asse minore, dunque sarà anche dato quest'altro angolo MSA. Vale a dire, dalla *data anomalia eccentrica di un pianeta l'è molto facile il rinvenire la vera* e viceversa.

Scol. Or quanto l'è facile in coteste anomalie il rilevarne la media e la vera dall'eccentrica, altrettanto n'è poi malagevole il Probl. inverso, quello cioè di rinvenire dalla media l'eccentrica, e quindi la vera, ch'è il celebre Problema delle anomalie proposto dal sagacissimo Giovanni Keplero. In fatti dovrebbe per tal ricerca dividere il dato arco AD in modo nel punto B, che stiane la parte BD al seno BE dell'altra, nella data ragione di $e:r$.

PROP. II. — TEOREMA.

Le differenze BC, e CD (Fig. 2.) delle anomalie medie AB, AC, AD, son prossimamente proporzionali alle differenze EF, FG delle loro anomalie eccentriche rispettive AE, AF, AG, purchè queste differenze siano molto piccole.

Dim. Si abbassino le perpendicolari EK, FL, GM, al diametro AP, dagli estremi delle proposte anomalie eccentriche, e pe' punti E, ed F si conducano EI, FH parallele ad AP. E poichè AB è l'anomalia media di AE, sarà per lo Coroll. 1.° Prop. preced. $EK:EB::QP:QS$, e per la stessa ragione sarà $FL:FC::QP:QS$. Dunque avremo $EK:EB::FL:FC$, e quindi dovrà esserne FI differenza degli antecedenti, alla differenza de' conseguenti EB, CF, siccome l'antecedente EK al suo con-

seguinte EB. Ma la differenza di EB, e CF (aggiuntavi, o toltavi di comune la FB, secondochè la EB è minore, o maggiore di EF) è quanto quella di EF, e CB. Dunque avremo FI alla differenza di EF, e CB, siccome EK ad EB, ovvero come QA : QS. Similmente si dimostra essere GH alla differenza di FG, e DC :: QA : QS. Dunque sarà FI alla differenza di EF, e CB, siccome GH alla differenza di FG, e CD. E permutando sarà FI : GH, siccome la differenza di EF, e CB alla differenza FG, e CD. Ma per la picciolezza dell'arco EG, i due triangoli EFI, FHG, si possono avere per rettilinei e simili tra loro; onde abbiamo FI : GH :: EF : FG. Dunque sarà ancora EF : FG, siccome la differenza di EF, e CB alla differenza di FG, e CD, onde in fine sarà EF : FG :: BC : CD, e quindi BC : BD :: EF : EG — C. B. D. (a).

Corol. Nella dimostrazione di questo teorema si è veduto essere FI : GH :: CF—EB : DG—CF. Se dunque supponesi FI uguale a GH, sarà anche CF—EB, uguale a DG—CF. E quindi le EB, CF, DG ecc. saranno aritmeticamente proporzionali. Onde ponendo EB=ω, FC=ω+D; sarà GD=ω+2D, e così appresso. Vale a dire, se i seni delle anomalie eccentriche prendansi aritmeticamente proporzionali, si avranno facilmente le corrispondenti anomalie medie, dovendosi a tal uopo impiegare le prime regole dell'Aritmetica Volgare, sempre però nella ipotesi che la differenza sia molto piccola.

(a) Ciò è anche vero per una funzione qualunque. Infatti posto $y=f(x)$ avremo

$$y+m=f(x+h)=fx+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{2} \dots$$

$$y+n=f(x+k)=fx+f'(x)k+f''(x)\frac{k^2}{2} \dots$$

essendo m, n gli aumenti della funzione corrispondenti ad h, k , aumenti della variabile indipendente. Onde avremo $m=f'(x)h$, $n=f'(x)k$, supposto che h e k siano quantità sì piccole da poter trascurare i termini che ne contengono i quadrati, e le potenze superiori. Da queste ultime relazioni si dedurrà $\frac{m}{n}=\frac{h}{k}$ che è il teorema proposto.

PROP. III. — TEOREMA.

La differenza EF delle anomalie eccentriche AE, AF, niuna delle quali superi il quadrante, è minore della BC, differenza delle di loro anomalie medie AB, AC, ed ella è maggiore della metà di questa medesima differenza BC. E se ciascuna delle anomalie eccentriche AE, AF sia maggiore di 90 gradi, dovrà la loro differenza EF, esser maggiore di quella delle corrispondenti anomalie medie AB, AC.

Dim. Cas. 1.° E poichè per ipotesi l'arco AE, non supera il quadrante, come ancora l'arco AF, sarà EK, seno dell'arco minore AE, tuttavia minore di FL seno dell'arco maggiore AF. Ma si è conchiuso nel principio della dimostrazione precedente essere $EK : EB :: FL : FC$. Dunque sarà EB anche minore di FC; ed aggiuntovi, ovvero toltovi di comune BF, secondochè EB sia minore o maggiore di EF, sarà EF minore di BC. Inoltre essendo per la dim. prec. $FI : CB - EF :: QA : QS$; sarà FI maggiore di $CB - EF$, del pari di QA, ch'è maggiore di QS. Ma EF è maggiore di FI, come l'è chiaro. Dunque sarà molto di più EF maggiore di $CB - EF$. Ed aggiuntovi di comune EF, sarà 2EF maggiore di CB; e quindi EF maggiore della metà di CB.

Cas. 2.° Che se poi ciascuna delle anomalie eccentriche AE, ed AF superi il quadrante, in tal caso EK seno dell'arco minore AE, dovrà esser maggiore di FL, seno dell'arco maggiore AF, onde essendo per la dim. prec. $EK : EB :: FL : FC$, sarà ancora EB maggiore di FC. E quindi aggiuntovi, o toltovi di comune BF, secondochè EB è minore o maggiore di EF, sarà tuttavia EF maggiore di BC.—C.B.D.

Coroll. Quindi se suppongasi l'arco EF metà dell'arco BD, sarà pel cas. 1.° l'arco BC maggiore della metà dell'arco BD; e con ciò il rimanente DC, sarà minore della detta metà di BD. Vale a dire se vi sieno due anomalie medie, la di cui semidifferenza, una coll'anomalia eccentrica della minore di esse non superi il quadrante, sarà detta somma un'altra anomalia eccentrica tale che la di lei anomalia media ne manchi della maggiore delle due proposte, per un'arco minore della loro semidifferenza.

PROP. IV. — PROBLEMA.

Data l'anomalia media Φ di un Pianeta, ritrovare tale anomalia eccentrica, che la di lei media corrispondente ne differisca dalla data Φ per un arco non maggiore di 45' minuti.

Soluz. Caso 1.° Quando la data anomalia media Φ non sia maggiore di 90°. 1.° si tolga $n \text{ sen. } \Phi$ dalla data anomalia Φ ; e detto Ψ' un tal residuo, si prenda di quest'anomalia eccentrica l'anomalia media Φ' . Sarà Ψ' la richiesta anomalia eccentrica, se mai vi sia la $\Phi - \Phi'$ non maggiore di 45'. Altrimenti aggiungasi $\frac{1}{2}(\Phi - \Phi')$ alla prima anomalia eccentrica Ψ' , e poi dalla risultante anomalia eccentrica $\Psi' + \frac{1}{2}(\Phi - \Phi')$, che chiamisi Ψ'' , se ne ritrovi l'anomalia media Φ'' ; sarà Ψ'' la richiesta anomalia eccentrica, se mai la Φ'' differisca dalla data anomalia per un arco non maggiore di 45'. Che se ciò non si avveri, dovrà procedersi nell'istessa guisa, finchè dopo poche di queste operazioni otterrassi l'intento.

Dim. Suppongasì essere Ψ' l'anomalia eccentrica della data media Φ , che sarà com'è chiaro minore di $\frac{1}{2}\pi$. E poichè per l'operazione fatta la prima anomalia eccentrica $\Psi' = \Phi - n \text{ sen. } \Phi$, sarà $\Psi' + n \text{ sen. } \Phi = \Phi$, e $\Psi' < \Phi$; ma per ipotesi l'arco Φ non supera il quadrante: dunque sarà $\text{sen } \Psi' < \text{sen. } \Phi$, ed $n \text{ sen } \Psi' < n \text{ sen } \Phi$. Aggiunlovi Ψ' di comune, sarà $\Psi' + n \text{ sen } \Psi' < \Psi' + n \text{ sen. } \Phi$. Ma per la prop. 1.^a $\Psi' + n \text{ sen } \Psi' = \Phi'$, che dinota l'anomalia media di Ψ' , e $\Psi' + n \text{ sen } \Phi = \Phi$. Dunque sarà $\Phi' < \Phi$, e con ciò l'anomalia eccentrica di quella, sarà minore dell'eccentrica di questa, vale a dire $\Psi' < \Psi$. Ma $\frac{1}{2}(\Phi - \Phi')$ dee esser minore di $\Psi - \Psi'$ (Prop. 3.^a). Dunque aggiunlovi Ψ' di comune, sarà $\Psi' + \frac{1}{2}(\Phi - \Phi') < \Psi$, e quindi molto minore di $\frac{1}{2}\pi$. Ma la seconda anomalia eccentrica Ψ'' , per l'operazione fatta, uguaglia $\Psi' + \frac{1}{2}(\Phi - \Phi')$ di cui l'anomalia media n'è disegnata da Φ'' ; dunque sarà, pel coroll. prop. 3.^a, $\Phi - \Phi'' < \Phi - \Phi'$. Similmente si mostrerà essere $\Phi - \Phi''' < \frac{1}{2}(\Phi - \Phi'')$;

quindi molto più sarà $\Phi - \Phi''' < \frac{1}{4}(\Phi - \Phi')$. E così appresso. Dunque dovrà finalmente ottenersi la differenza $\Phi - \Phi^{(n)} < 45'$.

Caso 2.° Quando poi la data anomalia media Φ sia maggiore di 90° , e minore di 180° , in tal caso prendasi dal quadrante $\frac{1}{2}\pi$ l'anomalia media $\frac{1}{2}\pi + n$, che sarà maggiore, o uguale, o minore della data Φ . Se mai siavi $\frac{1}{2}\pi + n > \Phi$, si dovrà prendere $\frac{1}{2}\pi - n$ per la prima anomalia eccentrica, praticandovi tutto il resto della costruzione come nel caso precedente. Se poi sia $\frac{1}{2}\pi + n = \Phi$, allora sarà $\frac{1}{2}\pi$ la richiesta anomalia eccentrica. Se finalmente sia $\frac{1}{2}\pi + n < \Phi$ in tal caso si dovrà prendere $\Phi - n$ per la prima anomalia eccentrica, che si chiami Ψ' , e di questa se ne ritrovi la media Φ' , sarà Ψ' la richiesta anomalia eccentrica, se mai $\Phi - \Phi'$ non sia maggiore di $45'$. Altrimenti aggiungasi $\Phi - \Phi'$ alla prima anomalia eccentrica Ψ' , e poi dall'arco $\Psi' + (\Phi - \Phi')$, che chiamisi Ψ'' , se ne prenda l'anomalia media Φ'' , la quale se mai differisca da Φ per un arco non maggiore di $45'$, sarà Ψ'' la dimandata anomalia eccentrica. E qualora si ritrovi $\Phi - \Phi'' > 45'$ dovrà procedersi nell'istessa guisa, finchè dopo poche di queste operazioni vedrassi ottenere l'intento.

Dim. Poichè l'anomalia media dell'eccentrica Ψ' , n'è disegnata da Φ' , sarà $\Phi' = \Psi' + n \text{ sen } \Psi'$ (*Prop. 1^a*). Ma per l'operazione fatta $\Psi' = \Phi - n$. Dunque sarà $\Phi' = \Phi - n + n \text{ sen } \Psi'$; ma n è maggiore di $n \text{ sen } \Psi'$, come è chiaro; dunque sarà $\Phi' < \Phi$, e molto più sarà $\Psi' < \Phi$. Or per l'operazione fatta Ψ'' non è minore di $\frac{1}{2}\pi$; dunque dovrà essere $n \text{ sen. } \Psi' > n \text{ sen } \Phi$: e supposto che siavi $n \text{ sen } \Phi > 45'$, altrimenti la stessa Φ ne sarebbe la richiesta anomalia, sarà molto più $n \text{ sen } \Psi' > 45'$. Aggiuntovi Ψ' di comune, sarà $\Psi' + n \text{ sen } \Psi' > \Psi' + 45'$. Ma $\Psi' + n \text{ sen } \Psi' = \Phi'$. Dunque avremo $\Phi' > \Psi' + 45'$. Così si dimostra essere $\Phi'' > \Psi'' + 45'$. Ma per l'operazione fatta $\Psi'' = \Psi' + \Phi - \Phi'$. Dunque sarà ancora $\Phi'' > \Psi' + \Phi - \Phi'' + 45'$. Or $\Phi - \Phi'$ supponesi $> 45'$. Quindi avremo molto più $\Phi'' > \Psi' + 2.45'$. E così appresso. Per la qual cosa togliendo queste grandezze rispettivamente da Φ , sarà 1.° $\Phi - \Phi' < \Phi - \Psi' - 45'$, 2.° $\Phi - \Phi''$

$\angle \Phi - \Psi' = 2.45'$, cc. Laonde è chiaro che con questo progresso debbasi trovare finalmente una delle divise differenze $\Phi - \Psi^{(n)} < 45'. \text{C.B.D.}$

PROP. V. — PROBLEMA.

Data l'anomalia media Φ di un Pianeta, rinvenire la corrispondente anomalia eccentrica.

Soluz. Caso 1.^o Quando la data anomalia Φ non superi 90° , si assuma l'anomalia eccentrica Ψ' la di cui media Φ' sia minore della data Φ per un arco non maggiore di $45'$ (*Probl. pree.*), indi si aggiunga alla Ψ' un arco minore di $\Phi - \Phi'$; e di questa risultante anomalia eccentrica, che dicasi Ψ , se ne prenda l'anomalia media Φ , che sarà minore del quadrante. Si avranno tre anomalie medie Φ, Φ', Φ . Or se facciasi come $\Phi' - \Phi : \Phi - \Phi :: \Psi' - \Psi : \Psi'' - \Psi'$; vale a dire la differenza della prima e seconda di queste anomalie medie, alla differenza della prima e terza, così la differenza delle assunte anomalie eccentriche Ψ , e Ψ' ad un quarto proporzionale $\Psi'' - \Psi'$. Sarà Ψ'' l'anomalia eccentrica della data Φ .

Dim. Suppongasi che Φ'' ne disegni l'anomalia di Ψ'' . E poichè Φ e Φ' sono le rispettive anomalie medie dell'eccentriche Ψ e Ψ' , sarà $\Phi' - \Phi > \Psi' - \Psi$ (per la *prop. 3.^a*) Ma per costruzione $\Phi' - \Phi : \Phi - \Phi :: \Psi' - \Psi : \Psi'' - \Psi'$; dunque sarà ancora $\Phi - \Phi > \Psi'' - \Psi'$: ed è per ipotesi $\Phi - \Phi$ non maggiore di $45'$; dunque molto meno ne sarà maggiore la $\Psi'' - \Psi'$. Per la qual cosa le tre anomalie eccentriche Ψ, Ψ', Ψ'' son tali, che la differenza della prima e terza non supera $45'$. Dunque, per la *prop. 2.^a*, le differenze delle mentovate anomalie eccentriche Ψ, Ψ', Ψ'' , saran proporzionali a quelle delle rispettive anomalie medie Φ, Φ', Φ , vale a dire sarà $\Psi' - \Psi : \Psi'' - \Psi' :: \Phi' - \Phi : \Phi'' - \Phi$. Ed è, per l'operazione fatta, $\Phi' - \Phi : \Phi - \Phi :: \Psi' - \Psi : \Psi'' - \Psi'$. Dunque sarà $\Phi' - \Phi : \Phi'' - \Phi :: \Phi' - \Phi : \Phi - \Phi$. E quindi $\Phi - \Phi = \Phi'' - \Phi$, e $\Phi' = \Phi$. E però la Ψ'' dovrà essere l'anomalia eccentrica corrispondente alla data Φ . C.B.D.

Caso 2.^o Che se poi la data anomalia media Φ sia maggiore di 90° , e minore di 180° ; in tal caso si ritrovi, per la *prop. 4.^a*, l'anomalia eccentrica Ψ' , la di cui media Φ , sia minore di Φ per un arco minore di $45'$. Or se la Ψ' non superi il quadrante, si procederà come

nel caso precedente, altrimenti si aggiunga un arco maggiore di $\Phi - \varphi$, e minore di $45'$, e chiamando Ψ' l'anomalia che ne risulta, se ne trovi di questa la media φ' , che sarà maggiore di Φ (prop. 3.^a) : poi si faccia nella stessa guisa $\varphi' - \varphi : \Phi - \varphi :: \Psi'' - \Psi'$ ad un quarto proporzionale $\Psi'' - \Psi'$, sarà Ψ'' la richiesta anomalia.

Dim. Imperciocchè essendo per l'operazione fatta $\varphi' > \Phi$, e $\Phi > \varphi$, sarà $\varphi' - \varphi > \Phi - \varphi$. Ma $\varphi' - \varphi : \Phi - \varphi :: \Psi'' - \Psi' : \Psi'' - \Psi'$; dunque sarà ancora $\Psi'' - \Psi' > \Psi'' - \Psi'$; e $\Psi' - \Psi'$, per l'operazione fatta non supera $45'$. Dunque molto meno $\Psi'' - \Psi'$ sarà $> 45'$ ec. E perciò le tre anomalie eccentriche Ψ , Ψ' , Ψ'' hanno le condizioni della prop. 2.^a Onde si concluderà, come qui sopra esserne Ψ'' l'anomalia eccentrica, che alla data Φ ne corrisponde.

Caso 3.^o Se poi la data anomalia Φ sia eguale a 180° , è chiaro che in questo caso, l'anomalia eccentrica dovrà pareggiare la data Φ . Che se finalmente l'anomalia media Φ superi 180° ; in questo caso della loro differenza si dovrà prendere l'anomalia eccentrica, e poi questa si dovrà sottrarre da 360° ; sarà un tal residuo la richiesta anomalia eccentrica.

COROLL. Essendo φ , e φ' le rispettive anomalie medie di Ψ , e Ψ' avremo per la prop. 1., $\varphi = \Psi + n \text{ sen. } \Psi$, e $\varphi' = \Psi' + n \text{ sen. } \Psi'$, e $\varphi' - \varphi = \Psi' - \Psi + n(\text{sen. } \Psi' - \text{sen. } \Psi) = \Theta \pm n \omega$; ponendovi per brevità di calcolo Θ in luogo della differenza delle assunte anomalie Ψ , e Ψ' ; ed ω in luogo della differenza de' loro seni. Ma si è veduto esserne $\varphi' - \varphi : \Phi - \varphi :: \Psi' - \Psi : \Psi'' - \Psi'$. Dunque sarà $\Psi'' - \Psi' = \frac{(\Phi - \varphi) \Theta}{\Theta \pm n \omega}$, fattevi le sostituzioni. Quindi sarà la richiesta anomalia eccentrica $\Psi'' = \Psi' + \frac{(\Phi - \varphi) \Theta}{\Theta \pm n \omega}$.

NOTA alla soluzione del problema di Keplero data dal eh. prof.
NICOLA FERGOLA.

Meditando sul procedimento analitico tenuto dal profondo geometra Nicola Fergola nella soluzione da costui data del problema di Keplero, mi è riuscito, seguendo le sue stesse tracce, di rinvenire altra equazione che pur risolve il problema, ma in un modo assai più generale. Ragione di ciò si è che mentre il Fergola ritiene i termini fino alla seconda potenza dell'eccentricità, io ho spinto le approssimazioni fino ai termini contenenti la quarta inclusa, donde n'è derivato che mentre la prima soluzione vien fornita da una equazione di primo grado, questa dipende da una equazione di secondo.

Sia da trovarsi E nell'equazione $M = E - e \text{ sen } E$ e pongasi $\cos M = e$, $\text{sen } E = x$, onde ritenere gli stessi simboli del Fergola, e seguire l'indole della soluzione da lui proposta. Sarà

$$\cos M = e = \cos (E - e \text{ sen } E)$$

intanto si sa essere

$$\cos . e \text{ sen } E = \cos ex = 1 - \frac{e^2 x^2}{2} + \frac{e^4 x^4}{24}$$

$$\text{sen} . e \text{ sen } E = \text{sen } ex = ex - \frac{e^3 x^3}{6}$$

sostituendo adunque tali valori nella precedente equazione verrà

$$e - x \left(ex - \frac{e^3 x^3}{6} \right) = \left(1 - \frac{e^2 x^2}{2} + \frac{e^4 x^4}{24} \right) \sqrt{1 - x^2}$$

ed innalzando ambi i membri a quadrato, sarà, dopo aver fatto le debite riduzioni

$$\frac{ce^3 - e^4}{3} x^4 + (1 + e^2 - 2ce) x^2 = 1 - e^2$$

nella quale, dopo aver sostituiti per e , ed x i loro valori $\cos M$, e $\text{sen } E$, si deduce

$$\text{sen}^4 E + \frac{3(1 + e^2 - 2e \cos M)}{e^3 \cos M - e^4} \text{sen}^2 E = \frac{3 \text{sen}^2 M}{e^3 \cos M - e^4}.$$

Ora l'incognita del problema essendo E, l'equazione ora ottenuta mostra che il valore di $\text{sen}^2 E$ si può avere da una equazione di secondo grado. Per risolverla con maggiore semplicità di quello che potrebbe farsi per le vie ordinarie, pongasi

$$\operatorname{tang} A = \frac{2 \operatorname{sen} M (e^3 \cos M - e^4)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3(1+e^2-2e \cos M)}} \text{ e verrà } \operatorname{sen} E = \frac{\sqrt[4]{3(\operatorname{sen} M \operatorname{tang} \frac{1}{2} A)^{\frac{1}{2}}}}{(e^3 \cos M - e^4)^{\frac{1}{4}}}.$$

L'angolo A figura come quantità ausiliaria, e non insisto su queste formole, essendo noto il metodo di ottenere con funzioni trigonometriche le radici delle equazioni di secondo e terzo grado.

ESEMPIO NUMERICO.

Sia da risolvere l'equazione $27^{\circ}45' = E - 0,66482 \operatorname{sen} E$

con questi dati si trova $\log.(e^3 \cos M - e^4)^{\frac{1}{2}} = 9.405430$

$$\log. 2 \operatorname{sen} M (e^3 \cos M - e^4)^{\frac{1}{2}} = 9.374487$$

come pure $\log. \sqrt{3(1+e^2-2e \cos M)} = 9.662251$

onde si ricava $\log. \operatorname{tang} A = 9.712236$

da cui $A = 27^{\circ}16'17''$, $\frac{1}{2}A = 13^{\circ}38'9''$.

Avremo dunque finalmente $\log \operatorname{sen} E = 9.943011$, ed $E = 61^{\circ}17'7''$.

Ove questo valore di E venga sostituito nella equazione proposta, si troverà il tenue errore di $7'42''$.

Applicandovi la correzione data dalla formola

$$\Delta E = \frac{M - E + e \operatorname{sen} E}{1 - e \cos E}$$

si trova $\Delta E = -11'18''$, e perciò il valor corretto di E risulta $61^{\circ}5'48''$, il quale differisce dal vero per meno di un secondo di arco.

Dal valore dell'eccentricità assunto nell'esempio numerico testè proposto, si rileva essersi trattato il caso più difficile. Ed invero è noto che le difficoltà presentate da questo celebre problema si son vinte tanto per le molto piccole, come per le molto grandi eccentricità, ma non così ne' casi in cui l'eccentricità medesima ha un valore medio.

La serie stessa di Lagrange, comunque prolungata, qui sarebbe in difetto. Infatti e supera $0,662742$, limite oltre il quale detta serie non è più applicabile. Aggiungo l'equazione di terzo grado che si ha spingendo le approssimazioni fino alle seste potenze dell'eccentricità incluse. Posto $\operatorname{sen}^2 E = y$ viene

$$y^3 + \frac{60(\cos M - e)}{e^2(8e - 3 \cos M)} y^2 + \frac{180(1 + e^2 - 2e \cos M)}{e^3(8e - 3 \cos M)} y = \frac{180 \operatorname{sen}^2 M}{e^3(8e - 3 \cos M)}$$

da questa si ha $E = 61^{\circ}7'6''$ con l'errore $+1'18''$.

A. DE GASPARIS

Forgerla

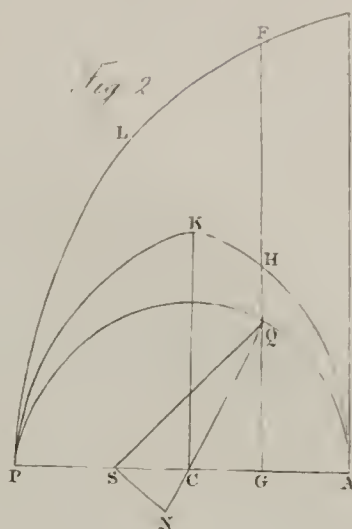
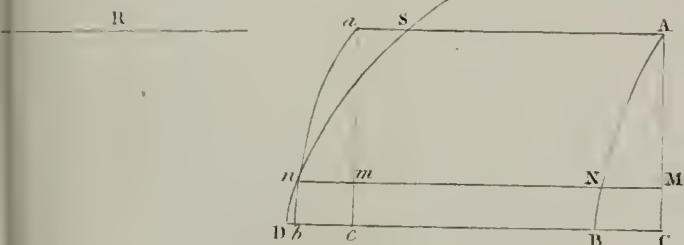


Fig. 3.



James

Fig. 1.

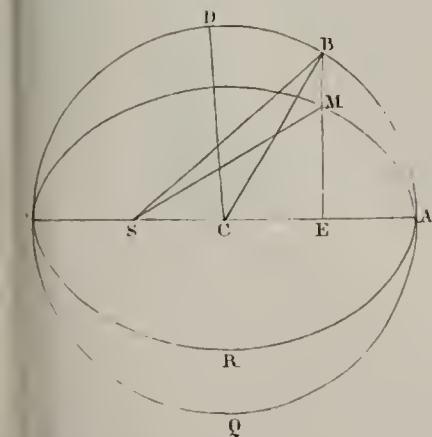
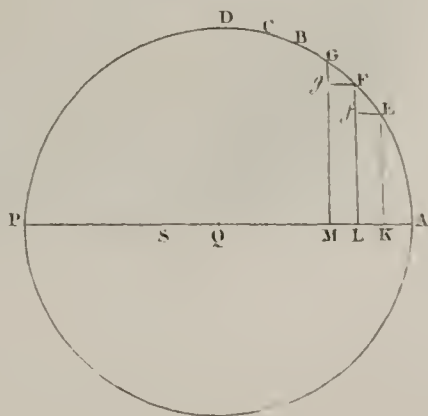


Fig. 2.



SULLA DIPENDENZA SCAMBIEVOLE DELLE FIGURE

MEMORIA

DEL SOCIO CORRISPONDENTE

G. BATTAGLINI

Nello stato attuale della scienza dell'estensione, la molteplicità dei risultamenti ottenuti dai Geometri sulle proprietà delle figure fa sentire l'importanza dei metodi generali di ricerca, che raggruppando intorno a pochi principii, ed ordinando in sistema le verità geometriche, più agevole rendono al pensiero l'abbracciarne il complesso, e seguirne la dipendenza scambievole. Tali metodi possono distinguersi in due grandi classi, in algoritmici cioè, ed in geometrici: fondati sui concetti primitivi del numero e dello spazio, ciascuno di essi racchiude virtualmente un sistema di verità; ma essendo i metodi algoritmici generalmente più adatti alla ricerca delle proprietà metriche delle figure, ed i geometrici a quella delle grafiche, essi si completano a vicenda, e concorrono insieme a costituire la totalità della scienza. Esaminando ora particolarmente i metodi geometrici, troveremo che possono ridursi in fine alla teoria generale della trasformazione delle figure, e questa può dirsi ristretta finora, benché già feconda d'importantissimi risultati, quasi unicamente alla trasformazione omografica, o collineare che voglia dirsi, ed alla trasformazione per figure correlative. Meditando su questo soggetto, dopo lo studio

delle opere di Poncelet, Chasles, Moëbius, e Steiner, mi è sembrato potersi modificare, e dare maggiore estensione ad alcune teorie trattate dai suddetti illustri geometri: confidando quindi nell'indulgenza dell'Accademia, nè sapendo altrimenti ringraziarla dell'onore accordatami col nominarmi suo socio corrispondente, ardisco sottoporre al suo savio giudizio il risultato delle mie ricerche sulle seguenti questioni, che formeranno l'oggetto di altrettante comunicazioni da farle.

1.^a Stabilire la dipendenza omografica delle figure, semplicemente sugli elementi di geometria, ed indipendente dalla considerazione del rapporto anarmonico.

2.^a Esaminare la serie indefinita di trasformazioni omografiche di una stessa figura, e le proprietà che risultano dalla considerazione del complesso del loro sistema. Ciò mi ha condotto a stabilire una serie indefinita di involuzioni, di cui l'involuzione ordinaria ne è un caso particolarissimo.

3.^a Esporre una teoria della trasformazione omografica delle figure nello spazio, non ancora, per quanto io sappia, trattata completamente.

4.^a Stabilire la dipendenza più generale tra due figure, affinché i punti e le rette si corrispondano scambievolmente, o alternatamente in modo unico, sì direttamente che inversamente. Questa dipendenza è importantissima; racchiude come casi particolari l'omografia e l'inversione, mostrandone il loro legame e l'origine comune, difficile altrimenti a riconoscersi; comprende ancora questa trasformazione come caso particolare quella per punti reciproci di Poncelet, ed è solo accennata da Steiner.

5.^a Stabilire finalmente l'analoga dipendenza per le figure nello spazio, non trattata, per quanto parmi, finora.

Nel presente lavoro esamineremo la prima quistione (1).

(1) Si sono omesse le figure, potendo ognuno, che abbia acquistata l'abitudine di leggere nello spazio, trovarle superflue: ciò serva anche per mostrare come lo studio dell'estensione si sia vantaggiato in semplicità, e generalità coi metodi dei geometri moderni. Le nostre dimostrazioni saranno sempre doppie, ritenendo il principio di dualità come primitivo, e dipendente dal doppio modo di potersi considerare le figure, come luoghi cioè, e come involuppi, e non già come conseguenza delle proprietà delle polari reciproche.

Divisioni omografiche, e fasci omografici.

1. Due punti p' e p'' variabili di posizione su due rette l' ed l'' , e dipendenti l'uno dall'altro in modo che ad *ogni* posizione di p' corrisponda una *sola* posizione di p'' , e *viceversa*, segnano su di l' ed l'' due divisioni omografiche D' e D'' (punteggiate collineari). Le rette l' ed l'' diconsi assi delle divisioni.

2. Due rette l' ed l'' variabili di posizione intorno ai punti p' e p'' , e dipendenti l'una dall'altra in guisa che ad *ogni* posizione di l' corrisponda una *sola* posizione di l'' , e *viceversa*, costituiscono due fasci omografici F' ed F'' (stelle collineari). I punti p' e p'' diconsi i centri dei fasci.

Segue evidentemente da tali definizioni che le rette λ' e λ'' tirate da due punti qualunque π' e π'' ai punti omologhi p' e p'' di due divisioni omografiche D' e D'' sugli assi l' ed l'' , siano raggi omologhi di due fasci omografici Φ' e Φ'' coi centri π' e π'' ; e viceversa che i punti d'incontro π' e π'' di due rette qualunque λ' e λ'' con i raggi omologhi l' ed l'' di due fasci omografici F' ed F'' con i centri p' e p'' , siano punti omologhi di due divisioni omografiche Δ' e Δ'' sugli assi λ' e λ'' . Inoltre due divisioni omografiche con una terza sono omografiche tra loro, e lo stesso vale per due fasci omografici con un terzo.

3. Due punti omologhi di due divisioni omografiche sullo stesso asse che coincidono, diconsi punti doppii; e due raggi omologhi coincidenti in due fasci omografici concentrici, raggi doppii.

4. I punti doppii sono due, reali, coincidenti, o immaginari. In fatti: siano nelle divisioni omografiche D' e D'' sull'asse l , p' il punto di D' omologo del punto all'infinito di D'' , e p'' il punto di D'' che corrisponde al punto all'infinito di D' ; siano poi p' e p'' due punti omologhi qualunque. Variando la loro posizione i punti p' e p'' , essi dovranno percorrere la retta l o *sempre* nella stessa direzione, o *sempre* in direzione opposta, altrimenti a due posizioni diverse di un punto in una delle divisioni corrisponderebbe una *stessa* posizione del punto omologo nell'altra, cioè che è contrario alla definizione della dipendenza omografica dei due punti. Ora se p' e p'' percorrono l in

direzione opposta, passando p' con legge di continuità da $p'_{i''}$ all'infinito, e dall'infinito nello stesso senso tornando a $p'_{i''}$, p'' passerà similmente con legge di continuità in senso opposto dall'infinito a $p''_{i'}$, e da $p''_{i'}$ all'infinito; vi saranno quindi necessariamente due punti doppii l'uno al di quà, l'altro al di là rispetto alle estremità $p'_{i''}$ e $p''_{i'}$ della parte $p'_{i''} p''_{i'}$ di l . Se poi p' e p'' percorrono l nello stesso verso, passando p' da $p'_{i''}$ all'infinito, e dall'infinito a $p'_{i''}$, passerà p'' , nello stesso senso, dall'infinito a $p''_{i'}$ e da $p''_{i'}$ all'infinito; quindi o p'' non raggiungerà mai p' , o lo raggiungerà tra $p'_{i''}$ e $p''_{i'}$ una sola volta, o raggiungendolo nello stesso intervallo una prima volta, sarà poi sorpassato da p' , anche tra $p'_{i''}$ e $p''_{i'}$, senza poterlo più raggiungere. Adunque i punti doppii sono solamente due.

5. I raggi doppii sono anche due, reali, o coincidenti o immaginari. Infatti siano nei fasci omografici F' ed F'' col centro p , l' il raggio di F' corrispondente ad un raggio qualunque l di F'' , ed $l'_{i'}$ il raggio di F'' che corrisponde al raggio l in F' ; siano poi l' ed l'' due raggi omologhi qualunque. Variando la loro posizione i raggi l' ed l'' , essi gireranno intorno al punto p , o *sempre* nello stesso verso, o *sempre* in verso contrario, altrimenti a due posizioni diverse di un raggio in uno dei due fasci corrisponderebbe una stessa posizione del raggio omologo nell'altro, il che è contrario alla definizione della dipendenza omografica tra i due raggi. Ora se l' ed l'' girano intorno a p in senso opposto, passando l' con legge di continuità da l' ad $l'_{i''}$, e da $l'_{i''}$ girando nello stesso senso, tornando ad l' , passerà similmente con legge di continuità l'' in senso opposto da l ad $l''_{i'}$, e da $l''_{i'}$ ad l ; vi saranno quindi necessariamente due raggi doppii, l'uno al di quà, l'altro al di là rispetto ai lati $l'_{i''}$ ed $l''_{i'}$ dell'angolo $l' p l''$. Se poi l' ed l'' girano intorno a p nello stesso senso, passando l' da

l' ad l , e da l tornando ad l' , passerà l'' girando per lo stesso verso i'' da l ad l'' , e da l'' ad l ; quindi o l'' non raggiungerà mai l' , o lo raggiungerà una sola volta tra l' ed l'' , o raggiungendolo nello stesso angolo una prima volta, sarà poi sorpassato da l' , anche tra l' ed l'' , senza poterlo più raggiungere. Ciò dimostra che i raggi doppi sono solamente due (1).

6. Tre coppie di punti omologhi determinano completamente due divisioni omografiche. Infatti, trasportate le divisioni sullo stesso asse, se con tre coppie di punti omologhi (p'_1, p''_1) , (p'_2, p''_2) , (p'_3, p''_3) potessero formarsi tre divisioni omografiche D' , D'' , e D''' , in modo che ad un punto qualunque p' della prima corrispondessero nelle due altre due punti diversi p'' , e p''' , le due divisioni D'' e D''' avrebbero tre punti doppi p''_1, p''_2, p''_3 , e le due divisioni D' e D''' i tre punti doppi p'_1, p'_2, p'_3 , il che è impossibile (4)—Adunque due divisioni omografiche che hanno tre punti doppi sono identiche.

7. Tre coppie di raggi omologhi determinano due fasci omografici. Poichè, ridotti i due fasci ad avere lo stesso centro, se con le tre coppie di raggi omologhi (l'_1, l''_1) , (l'_2, l''_2) , (l'_3, l''_3) potessero costruirsi tre fasci omografici F' , F'' ed F''' , cosicchè un raggio qualunque l' del primo avesse per omologhi due raggi diversi l'' ed l''' negli altri due, i due fasci F'' ed F''' avrebbero tre raggi doppi l''_1, l''_2 ed l''_3 , ed i due fasci F' ed F''' i tre raggi doppi l'_1, l'_2 ed l'_3 , risultando impossibile (5). Due fasci omografici che hanno tre raggi doppi sono dunque identici.

(1) Esprimendo simbolicamente la dipendenza tra i punti omologhi p' e p'' delle divisioni omografiche D' e D'' sull'asse l , o tra i raggi omologhi l' ed l'' dei fasci omografici F' ed F'' col centro p , si renderà evidente l'esistenza ed il numero dei punti e dei raggi doppi. Infatti essendo p_1 e p_2 i punti fondamentali di l ai quali si riferisce la posizione di p' e p'' , o $l\alpha$ ed $l\beta$ le rette fondamentali condotte per p , alle quali si riferisce la posizione di l' ed l'' , (x', β') , (x'', β'') le coordinate bilineari di tali punti o di tali rette, la loro dipendenza omografica sarà espressa da un'equazione della forma $(x'', x') \alpha' \alpha' + (x'', \beta') x' \beta' + (\beta'', x') \beta'' \alpha' + (\beta'', \beta') \beta'' \beta' = 0$, indicando con i simboli (μ, ν) dei coefficienti costanti. Ora per i punti doppi, o i raggi doppi dovrà essere $x' = x'' = x$, $\beta' = \beta'' = \beta$, si avrà quindi per determinarli l'equazione di 2° grado $(\alpha'', \alpha') \alpha^2 + [(x'', \beta') + (\beta'', x')] x \beta + (\beta'', \beta') \beta^2 = 0$.

Prima di passare all'ulteriore sviluppo di questi principii generali della dipendenza omografica delle figure, mostreremo come possa su di essi stabilirsi una teoria delle linee di 2° ordine e di 2ª classe e possano dimostrarsi facilmente le loro principali proprietà.

Linee di 2° ordine e di 2ª classe.

8. Siano due fasci omografici F' ed F'' , p' e p'' i loro centri; p_i il punto d'incontro de' due raggi omologhi l'_i ed l''_i ; C la linea, luogo geometrico di p_i . I raggi omologhi l'_i ed l''_i intersecano una retta arbitraria l in due punti p'_i e p''_i , omologhi di due divisioni omografiche sullo stesso asse: i due punti doppii di queste divisioni sono i punti d'incontro di l con C , sicchè tale linea non può essere intersegata da una retta in più di due punti: adunque la linea secondo la quale s'intersecano i raggi omologhi di due fasci omografici è di 2° ordine — C passa per i centri p' e p'' dei fasci; il raggio di F' omologo del raggio che congiunge i punti p' e p'' in F' è la tangente di C in p'' , ed il raggio di F' omologo dello stesso raggio in F'' è la tangente in p' .

9. Siano due divisioni omografiche D' e D'' ; l' ed l'' i loro assi; l_i la retta che unisce due punti omologhi p'_i e p''_i , C la linea involuppo di l_i . I punti omologhi p'_i e p''_i congiunti con un punto arbitrario p danno due rette l' ed l'' omologhe di due fasci omografici concentrici; i due raggi doppii di questi fasci sono le tangenti menate da p a C , sicchè a tale linea non possono tirarsi da un punto più di due tangenti; adunque la linea che involuppa le rette che congiungono i punti omologhi di due divisioni omografiche è di 2ª classe. C tocca gli assi l' ed l'' delle divisioni; il punto di D'' omologo del punto d'incontro di l' ed l'' in D' è il punto di contatto di C con l'' , ed il punto di D' omologo dello stesso punto d'incontro in D'' è il punto di contatto con l' — Viceversa i raggi l'_i ed l''_i menati da due punti p' e p'' di una linea C di 2° ordine ad un suo punto p_i sono raggi o-

omologhi di due fasci omografici F' ed F'' ; ed i punti p'_i e p''_i d' intersezione di due tangenti l' ed l'' di una linea di 2^a classe C con una sua tangente l sono punti omologhi di due divisioni omografiche D' e D'' .

10. I raggi l' ed l'' menati da un punto di una linea C di 2^o ordine ai due punti d'incontro p'_i e p''_i di C con una retta l condotta per un punto arbitrario p , sono raggi omologhi di due fasci omografici concentrici, in cui i due raggi doppi passano per i punti di contatto di C con le tangenti menate da p ; sicchè a tale linea non possono tirarsi da un punto più di due tangenti; adunque una linea di 2^o ordine è ancora di 2^a classe.

11. Viceversa: i punti d' incontro p'_i e p''_i di una tangente ad una linea C di 2^a classe con le due tangenti l' ed l'' di C tirate da un punto p di una retta arbitraria l , sono punti omologhi di due divisioni omografiche sullo stesso asse, in cui per i due punti doppi passano le tangenti di C nei punti d' incontro con l ; sicchè tale linea non può essere incontrata da una retta in più di due punti; adunque una linea di 2^a classe è anche di 2^o ordine.

11. Due fasci omografici sono determinati dai loro centri, e da tre coppie di raggi omologhi (7); sicchè la linea d' intersezione dei raggi omologhi di due fasci omografici è determinata da cinque suoi punti, due, centri dei fasci per i quali passa, e tre, punti d'incontro delle tre coppie di raggi omologhi; adunque cinque punti determinano una sola linea di 2^o ordine che passa per essi.

12. Similmente due divisioni omografiche sono determinate dai loro assi e da tre coppie di punti omologhi (6); sicchè l' involuppo delle rette congiungenti i punti omologhi di due divisioni omografiche è determinato da cinque tangenti, due assi delle divisioni omografiche ad esso tangenti, e tre, congiungenti delle tre coppie di punti omologhi; adunque cinque rette determinano una sola linea di 2^a classe ad esse tangenti.

13. Se due raggi omologhi dei due fasci omografici F' ed F'' sono coincidenti, cioè si confondono con la retta che congiunge i cen-

tri p' e p'' dei fasci, dei due punti doppi delle due divisioni omografiche segnate su di una retta arbitraria l dai raggi omologhi l'_i , ed l''_i , o sia uno dei due punti d'incontro di l con la linea C luogo geometrico dei punti d'intersezione p_i degli stessi raggi, si trova sulla congiungente dei centri p' e p'' dei fasci; sicchè C in questo caso si compone di tale retta congiungente, e di un'altra retta; adunque se tra i cinque punti che determinano una linea di 2° ordine tre sono in linea retta, tale luogo geometrico si ridurrà a questa retta, e a quella che passa per gli altri due.

14. Se due punti omologhi delle due divisioni omografiche D' e D'' sono coincidenti, cioè si confondono col punto d'incontro degli assi l' ed l'' delle due divisioni, uno dei raggi doppi dei due fasci omografici formati dalle rette menate da un punto arbitrario p ai punti omologhi p'_i e p''_i , o sia una delle due tangenti tirate da p alla linea C involuppo delle congiungenti li degli stessi punti, passa pel punto d'incontro degli assi l' ed l'' delle divisioni; sicchè C in questo caso si compone di tale punto d'incontro, e di un altro punto; adunque se tra le cinque rette che determinano una curva di 2ª classe, tre concorrono in un punto, tale curva si ridurrà a questo punto, ed al punto d'incontro delle altre due.

15. Se pel punto d'incontro p dei raggi omologhi l' ed l'' dei due fasci omografici F' ed F'' si tirano due rette arbitrarie L' ed L'' i punti d'intersezione P'_i e P''_i di queste rette con due raggi omologhi l'_i ed l''_i segneranno su di esse due divisioni omografiche, che hanno due punti omologhi coincidenti con p ; quindi (14) le congiungenti L_i dei punti omologhi P'_i e P''_i concorreranno in uno stesso punto P . Con tre coppie di raggi omologhi l'_i ed l''_i si determina il punto P , e quindi con questa proprietà si trovano facilmente quante altre coppie se ne vogliano; in altri termini dati cinque punti di una linea di 2° ordine se ne costruisce un sesto qualunque. Con lo stesso principio si costruiscono le tangenti della curva, poichè queste tangenti nei punti p' e p'' , centri dei fasci F' ed F'' , sono i raggi di F' e di F'' omologhi alla congiungente dei centri in F'' ed in F' . Se le rette arbitra-

rie L'' ed L' condotte per p , intersezione dei raggi omologhi l' ed l'' , coincidono con questi raggi, o sia passano per p' e p'' , le tangenti t' e t'' di C in tali punti sono le rette condotte da essi al punto P . Ciò dà luogo alla seguente proprietà delle linee di 2° ordine, di cui può farsi uso per descriverle per punti, e menarvi in essi le tangenti. Se per due punti p' e p'' di una linea C di 2° ordine si tirano a due altri suoi punti p_μ e p_ν due coppie di rette l'_μ ed l''_μ , l'_ν ed l''_ν , la congiungente $L_{\mu,\nu}$ del punto d'incontro $P'_{\mu,\nu}$ di l'_μ ed l''_ν e del punto d'incontro $P''_{\mu,\nu}$ di l'_ν ed l''_μ passerà pel punto di concorso P delle tangenti t' e t'' di C in p' e p'' .

16. Si possono $l'_\mu, l''_\nu; l'_\nu, l''_\mu$, e le due tangenti t' e t'' di C in p' e p'' considerare come tre coppie di raggi omologhi in due fasci omografici che hanno per centri p' e p'' , ed in cui i raggi omologhi s'intersecano sulla retta $L_{\mu,\nu}$ che passa per i tre punti di concorso $P'_{\mu,\nu}$, $P''_{\mu,\nu}$, e P di tali coppie di raggi omologhi; quindi per ciò che si è detto (15) le tre congiungenti dei punti di concorso di $l'_\mu, l''_\nu - l'_\nu, l''_\mu$, cioè p_μ e p_ν , $l'_\mu, t'' - l''_\nu, t'$, $l'_\nu, t' - l''_\mu, t''$, concorreranno in uno stesso punto con la congiungente dei punti p' e p'' . Ora se i due punti p_μ e p_ν ci confondono in un solo p determinato dai raggi omologhi l' ed l'' , delle tre congiungenti suddette la prima diverrà la tangente t di C in p , e le altre due si confonderanno con la congiungente dei punti di concorso di $l', t'' - l'', t'$; si avrà quindi la seguente proprietà. Le tangenti t', t'' e t in tre punti p', p'' e p di una linea C di 2° ordine incontrano rispettivamente le rette che uniscono i punti di contatto delle altre due in tre punti che sono per dritto. Con ciò conoscendo in due punti p' e p'' di C le tangenti t' e t'' , si costruisce facilmente la tangente t in p .

17. Se sulla congiungente l dei punti omologhi p' e p'' nelle due divisioni omografiche D' e D'' si prendono due punti arbitrarii P' , e P'' , le congiungenti L' , ed L'' , di questi punti con due punti omologhi p'_i e p''_i , formeranno due fasci omografici, che hanno due lati omologhi coincidenti con l ; quindi (13) i punti d'incontro P_i dei raggi

omologhi L'_i ed L''_i si troveranno su di una retta L . Con tre coppie di punti omologhi p'_i e p''_i si determina la retta L , e quindi con questa proprietà si trovano quante altre coppie se ne vogliano; in altri termini date cinque tangenti di una linea di 2^a classe se ne costruisce una sesta qualunque. Con lo stesso principio si costruiscono i punti della curva, poichè questi punti sulle tangenti l' ed l'' , assi delle divisioni D' e D'' , sono i punti di D' e di D'' omologhi del punto d'incontro degli assi in D'' ed in D' . Se i punti arbitrarii P'' e P' presi su di l , congiungente dei punti omologhi p' e p'' coincidono con questi punti, o sia si trovano su di l' e di l'' , i punti di contatto c' e c'' di tali rette con C sono i loro punti d'incontro con L . Ciò dà luogo alla seguente proprietà delle linee di 2^a classe, che può servire per menarvi le tangenti, e costruire su di esse i punti di contatto. Essendo le intersezioni di due tangenti l' ed l'' di una linea C di 2^a classe con due altre sue tangenti l'_μ ed l''_ν le coppie di punti $p'_\mu, p''_\mu; p'_\nu, p''_\nu$, il punto di concorso $P_{\mu,\nu}$ della congiungente L'_μ di p'_μ, p''_μ e della congiungente L''_ν di p'_ν, p''_ν si troverà sulla congiungente L dei punti di contatto c' e c'' di C con l' ed l'' .

18. Si possono $p'_\mu, p''_\mu; p'_\nu, p''_\nu$ e i due punti di contatto c' e c'' di C con l' ed l'' considerare come tre coppie di punti omologhi in due divisioni omografiche, che hanno per assi l' ed l'' , ed in cui l'involuppo delle congiungenti dei punti omologhi è il punto $P_{\mu,\nu}$ in cui concorrono le congiungenti L'_μ, L''_ν . L di tali coppie di punti omologhi; quindi per ciò che si è detto (17), i punti di concorso delle congiungenti di $p'_\mu, p''_\mu - p'_\nu, p''_\nu$, cioè di l'_μ ed $l''_\nu, p'_\mu, c'' - p'_\nu, c'$, $p'_\nu, c'' - p''_\mu, c'$ saranno per dritto col punto d'incontro di l' ed l'' . Ora se le due tangenti l'_μ ed l''_ν si confondono in una sola l , determinata dai punti omologhi p'_ν e p''_μ , dei tre punti di concorso suddetti il primo diverrà il punto di contatto c di C con l , e gli altri due si confonderanno col punto di concorso delle congiungenti $p'_\nu, c'' - p''_\mu, c'$; si avrà quindi la seguente proprietà. Le rette che congiungono i punti di contatto c', c'' e c di tre tangenti l', l'' ed l di una li-

nea di 2^a classe rispettivamente col punto d'incontro delle altre due concorrono in uno stesso punto. Con ciò conoscendo i punti di contatto c' e c'' di C con le tangenti l' ed l'' si costruisce facilmente il punto di contatto c con la tangente l .

Continuazione della precedente Memoria

19. Se per i due punti p' e p'' , estremità di una corda L di una linea C di 2° ordine, si tirano a due altri suoi punti p_μ e p_ν le coppie di raggi omologhi $l'_\mu, l''_\mu - l'_\nu, l''_\nu$, i punti di concorso $P'_{\mu,\nu}$ di l'_μ, l''_ν , e $P''_{\mu,\nu}$ di l'_ν, l''_μ si trovano per dritto, sulla retta $L_{\mu,\nu}$ col punto di concorso P delle tangenti t' e t'' di C in p' e p'' (15): inoltre variando sulla retta $L_{\mu,\nu}$ la posizione dei punti $P_{\mu,\nu}, P''_{\mu,\nu}$, la congiungente dei punti p_μ e p_ν , (siano o pur no tali punti su C), passerà sempre per uno stesso punto $P_{\mu,\nu}$ della retta L , che unisce i punti di contatto p' e p'' di C con le tangenti t' e t'' menate da P ; tale punto $P_{\mu,\nu}$ sarà anche il punto di concorso delle tangenti $t'_{\mu,\nu}$ e $t''_{\mu,\nu}$ di C nei due punti d'intersezione, reali o immaginari, $p'_{\mu,\nu}$ e $p''_{\mu,\nu}$ di C con la retta $L_{\mu,\nu}$ condotta per P . Ad ogni coppia di punti $P'_{\mu,\nu}, P''_{\mu,\nu}$ su $L_{\mu,\nu}$ corrisponderanno infinite altre coppie di punti analoghi $P'_{\mu_i,\nu_i}, P''_{\mu_i,\nu_i}$ sulla stessa retta, in modo che tirando ad essi per p' e p'' le coppie di raggi $l'_{\mu_i}, l''_{\nu_i} - l'_{\nu_i}, l''_{\mu_i}$, i punti di concorso p_{μ_i} di l'_{μ_i} ed l''_{ν_i} , p_{ν_i} di l'_{ν_i} ed l''_{μ_i} siano rispettivamente con p_μ e p_ν per dritto con P . Considerando tra i punti p quei soli che sono su C ,

si avrà in tale curva iscritto un quadrigono, in cui dei tre punti di concorso delle diagonali, e delle due coppie di lati opposti, due si troveranno su di L , e due su di $L_{\mu, \nu}$, uno essendo P , il secondo $P_{\mu, \nu}$, ed il terzo è il punto d'incontro delle rette L e $L_{\mu, \nu}$. Il punto $P_{\mu, \nu}$ dicesi polo nella retta $L_{\mu, \nu}$, ed $L_{\mu, \nu}$ la polare di $P_{\mu, \nu}$; similmente P è il polo di L , ed L la polare di P . Variando $L_{\mu, \nu}$, passando sempre per P , $P_{\mu, \nu}$ percorrerà la retta L ; adunque se più rette $L_{\mu, \nu}$ passano per uno stesso punto P , i loro poli $P_{\mu, \nu}$ si troveranno su di una stessa retta L , polare del punto P ; e viceversa se più punti $P_{\mu, \nu}$ si trovano su di una retta L le loro polari $L_{\mu, \nu}$ passeranno per uno stesso punto P , polo della retta L . Segue da ciò che il punto d'incontro delle due rette L ed $L_{\mu, \nu}$ è il polo della retta congiungente i due punti P e $P_{\mu, \nu}$. Il triangolo formato da L , $L_{\mu, \nu}$ e da tale congiungente dicesi triangolo polare; in esso ciascun vertice è il polo del lato opposto, e viceversa ciascun lato è la polare del vertice opposto; due lati di questo triangolo, come L ed $L_{\mu, \nu}$ diconsi polari coniugate, ciascuna di esse passando pel polo dell'altra; e similmente due vertici P e $P_{\mu, \nu}$ diconsi poli coniugati, ciascuno di essi trovandosi sulla polare dell'altro; i tre vertici ed i tre lati costituiscono un sistema di tre poli, e di tre polari coniugate. Risulta dalle cose dette la seguente proprietà: Se un quadrigono è iscritto in una linea di 2° ordine, i tre punti di concorso delle due diagonali, e delle due coppie di lati opposti sono i vertici di un triangolo polare.

Se per due poli coniugati p' e p'' della linea di 2° ordine C si tirano ad un suo punto p_i le rette l' ed l'' , che incontrano inoltre la curva in $p_{i'}$ e $p_{i''}$, queste due rette e la congiungente l dei due punti $p_{i'}$ e $p_{i''}$ si possono considerare come due lati ed una diagonale di un quadrigono iscritto, in cui dei tre punti di concorso delle diagonali, e delle coppie dei lati opposti, uno sia p' e l'altro p'' ; quindi l passerà pel terzo di essi, o sia pel punto p , polo della con-

giungente dei punti p' e p'' , che con essi determina un triangolo polare. Quindi se due lati di un triangolo, iscritto in una curva di 2° ordine, passano per due poli coniugati, il terzo lato passerà pel terzo polo coniugato: in altri termini, se per un punto p si tirino delle secanti di C , che l'incontrano nei punti p_i' e p_i'' , i punti di concorso p_i delle coppie di rette l' ed l'' , menate rispettivamente da p_i'' e p_i' ai due poli p' e p'' , coniugati con p , apparterranno a C . I lati del triangolo $p_i' p p_i''$ diconsi corde coniugate, e due di essi corde supplementari, quando uno dei lati del triangolo $p' p p''$ cade a distanza infinita.

20. Se le due tangenti l' ed l'' tirate ad una linea di 2ª classe C incontrano due altre sue tangenti l_μ ed l_ν nelle coppie di punti omologhi $p_\mu', p_\nu'' - p_\nu', p_\nu''$, le congiungenti L_μ' di p_μ', p_ν' ed L_ν'' di p_ν', p_μ'' concorreranno in un punto P sulla congiungente L dei punti di contatto e' e e'' di C con l' ed l'' (17); inoltre variando le rette L_μ', L_ν'' condotte per P , il punto d'incontro delle rette l_μ ed l_ν (siano o pur no queste rette tangenti di C), si troverà sempre su di una stessa retta L , che passa per P , punto di concorso delle tangenti l' ed l'' di C nei punti e' e e'' dove è incontrata da L ; tale retta L sarà anche la congiungente dei punti di contatto e_μ', e_ν'' di C con le tangenti l_μ', l_ν'' , reali o immaginarie, menate a C dal punto P di L . Ad ogni coppia di rette L_μ', L_ν'' tirate per P corrisponderanno infinite altre coppie di rette analoghe L_{μ_i}', L_{ν_i}'' condotte per lo stesso punto, in modo che le coppie dei loro punti d'incontro con l' ed l'' essendo $p_{\mu_i}', p_{\nu_i}'' - p_{\nu_i}', p_{\mu_i}''$, le congiungenti l_{μ_i}' di p_{μ_i}' e p_{ν_i}'' , ed l_{ν_i}'' di p_{ν_i}' e p_{μ_i}'' concorrano rispettivamente con l_μ ed l_ν in uno stesso punto su di L . Considerando tra le rette l le sole tangenti di C , si avrà a tale curva circoscritto un quadrilatero, in cui delle tre rette che congiungono le tre coppie di vertici opposti, due

passano per P , e due per $P_{\mu, \nu}$, una essendo L , l'altra $L_{\mu, \nu}$, e la terza la congiungente dei punti P e $P_{\mu, \nu}$. Si avranno qui le stesse proprietà dei poli e delle polari, trovate precedentemente (19), e la seguente proprietà; se un quadrilatero è circoscritto ad una linea di 2^a classe, le tre congiungenti delle tre coppie di vertici opposti costituiscono un triangolo polare.

Se due polari coniugate l' ed l'' di una linea di 2^a classe C incontrano una sua tangente l_i nei punti p' e p'' , dai quali inoltre partano alla curva le tangenti $l_{i''}$ ed $l_{i'}$, questi due punti ed il punto d'incontro p delle due rette $l_{i''}$ ed $l_{i'}$ si possono considerare come appartenenti alle tre coppie di vertici opposti di un quadrilatero circoscritto, in cui delle tre congiungenti di tali coppie di vertici una sia l' e l'altra l'' ; quindi p si troverà sulla terza di esse, o sia sulla retta l polare del punto d'incontro di l' ed l'' , che con esse determina un triangolo polare. Quindi se due vertici di un triangolo circoscritto ad una linea di 2^a classe percorrono due polari coniugate, il terzo percorrerà la terza polare coniugata. In altri termini, se sulla retta l concorrono in un punto p , due tangenti di C , $l_{i'}$ ed $l_{i''}$, le congiungenti l_i dei punti d'incontro p' e p'' di $l_{i''}$ ed $l_{i'}$ con le polari l' ed l'' coniugate con l , saranno anche tangenti di C . I vertici del triangolo $p'pp''$ dicansi punti coniugati.

21. Se il punto p' percorre una linea C' la sua polare l'' rispetto ad una linea di 2^o ordine, o di 2^a classe C , invilupperà una linea C'' ; viceversa se l'' tocca C'' , il suo polo p' percorrerà C' . Le curve C' e C'' dicansi polari reciproche: i punti p' di C' sono i poli delle tangenti l'' di C'' , e viceversa le tangenti l' di C' sono le polari dei punti p'' di C'' ; se C' è dell'ordine i , C'' sarà della classe i , onde se C' è di 2^o ordine, sarà anche tale C'' : quindi ad ogni proprietà di una linea di 2^o ordine ne corrisponde un'altra reciproca, cangiando i poli nelle polari e viceversa, come si è potuto osservare nelle cose dette, in cui ad ogni proprietà su i punti di una linea di 2^o ordine si vede corrispondere un'altra sulle tangenti di una linea di 2^a classe, e quindi anche di 2^o ordine. Per questa circostanza basta conoscere le prime proprietà per conchiuderne immediatamente le altre, e

viceversa, il che rientra nella teoria delle figure correlative, come si svilupperà in altro lavoro.

22. Siano p, p', p'' i vertici di un triangolo polare rispetto ad una linea C di 2° ordine, l, l' ed l'' i lati opposti, essendo p' e p'' i punti di concorso delle coppie dei lati opposti $L'_{\mu, \nu}, L'_{\nu, \mu} — L''_{\mu, \nu}, L''_{\nu, \mu}$ del quadrigono iscritto $\pi_{\mu, \nu} \pi_{\nu, \mu} \varpi_{\mu, \nu} \varpi_{\nu, \mu}$; p il punto d'incontro delle due diagonali L_{μ} ed L_{ν} ; l' la congiungente dei punti di contatto π_{μ} e ϖ_{ν} delle tangenti condotte a C da p' ed l'' la congiungente dei punti di contatto π_{ν} e ϖ_{μ} delle tangenti menate da p'' . Se la retta l cade a distanza infinita, il quadrigono iscritto diventa parallelogrammo, l' passa per i punti medii dei lati opposti $L'_{\mu, \nu}, L'_{\nu, \mu}, l''$ per i punti medii degli altri lati opposti $L''_{\mu, \nu}, L''_{\nu, \mu}$, e nel punto p si divideranno per metà le diagonali L_{μ} ed L_{ν} . Per queste proprietà l' ed l'' diconsi diametri coniugati, ciascuno di essi dividendo per metà le corde L' o L di C parallele all'altro, e p centro, dividendo per metà tutte le corde che passano per esso. Due diametri coniugati l' ed l'' sono paralleli a due corde supplementari L'' ed L' . I diametri coniugati ad angolo retto diconsi assi, e per determinarli si osserverà che facendo girare intorno al punto p i due lati L' ed L'' di un angolo retto, e le polari coniugate l' ed l'' , se L' ed l' coincidono, L'' ed l'' segneranno su di una retta arbitraria l due divisioni omografiche; per i punti doppii di queste divisioni passeranno gli assi di C . Nello stesso modo si potrebbero determinare due diametri coniugati che comprendano un angolo dato, o più generalmente due polari coniugate principali, cioè ad angolo retto, o ad angolo qualunque. Nel caso degli assi, o delle polari principali il problema è sempre possibile, in fatti supponendo che nel giro l' ed L' prendano la posizione di l'' , l'' si confonderà con l' , ed L'' si troverà essere passata da un lato di l'' all'altro, sicchè in una posizione intermedia L'' ed l'' coincideranno, e quindi determineranno un asse, o una polare principale.

23. Siano due fasci omografici F' ed F'' , che hanno i loro centri p' e p'' sulla retta L , tali che ai raggi $l', l'_{\mu}, l'_{\nu}, L$ del pri-

mo corrispondano rispettivamente L , l'_μ, l'_ν, l'' del secondo: i punti di concorso P di l' e l'' , P' di l'_μ ed l'_ν , P'' di l' ed l'_μ si troveranno su di una stessa retta L (15); sicchè l', l'_μ, l'_ν, L possono considerarsi rispettivamente come omologhi a l'', l'_ν, l''_μ, L in due altri fasci omografici che s'intersecano sulla retta L . Adunque se in quattro coppie di raggi omologhi di due fasci omografici, rimanendo gli stessi i raggi del primo, s'invertono due raggi del secondo, invertendo ancora gli altri due rimanenti, si avranno quattro coppie di raggi omologhi in due altri fasci omografici. Ciò posto, considerando la linea di 2° ordine C , intersezione dei due fasci omografici F' ed F'' , siano a quattro suoi punti $p_\alpha, p_\beta, p_\gamma, p_\delta$ menate le coppie di raggi omologhi $l'_\alpha, l''_\alpha - l'_\beta, l'_\beta - l'_\gamma, l'_\gamma - l'_\delta, l'_\delta$; saranno ancora $l'_\alpha, l'_\beta - l'_\gamma, l'_\gamma - l'_\delta, l'_\delta$ quattro coppie di raggi omologhi in due altri fasci omografici; quindi (15) la congiungente dei punti d'incontro di l'_α ed $l'_\beta - l'_\gamma$ ed l'_γ , cioè la retta $l_{\alpha, \beta}$ che congiunge i punti p_α e p_β , la congiungente dei punti d'incontro di l'_γ ed $l'_\delta - l'_\gamma$ ed l'_δ , cioè la retta $l_{\gamma, \delta}$ che passa per p_γ e p_δ , e la congiungente dei punti d'incontro $P_{\alpha, \gamma}$ di l'_α ed l'_γ e $P_{\beta, \delta}$ di l'_β ed l'_δ concorreranno in un medesimo punto P ; vale a dire nell'esagono $p'p_\alpha p'_\beta p'_\gamma p'_\delta p'$ iscritto in C , i punti di concorso $P, P_{\alpha, \gamma}, P_{\beta, \delta}$ delle coppie di lati opposti $l_{\alpha, \beta}, l_{\gamma, \delta} - l'_\alpha, l'_\gamma - l'_\delta, l'_\beta$ sono per dritto. Con questa proprietà si può anche descrivere per punti una linea di 2° ordine, conoscendone cinque, e menare in essi le tangenti, col supporre che due vertici consecutivi dell'esagono iscritto si riuniscano in un solo, e con ciò il lato corrispondente diventi tangente. Se tre lati alternativi dell'esagono si annullano, si avrà la proprietà delle tre tangenti di una linea di 2° ordine dimostrata in (16).

24. Siano due divisioni omografiche D' e D'' i di cui assi l' ed l'' incontrano nel punto P , tali che ai punti c', p'_μ, p'_ν, P della pri-

ma corrispondano rispettivamente P, p'', p'', c'' della seconda: le congiungenti L di c' e c'' , $L'_{\mu, \nu}$ di p'_μ e p'_ν , $L''_{\mu, \nu}$ di p''_μ e p''_ν concorreranno in uno stesso punto $P_{\mu, \nu}$ (17); sicchè c', p'_μ, p'_ν, P possono considerarsi rispettivamente come omologhi a c'', p''_μ, p''_ν, P in due altre divisioni omografiche, in cui le congiungenti delle coppie dei punti omologhi passano tutte per $P_{\mu, \nu}$. Adunque se in quattro coppie di punti omologhi in due divisioni omografiche, rimanendo gli stessi i punti della prima, s'invertono due punti della seconda, invertendo ancora gli altri due rimanenti, si avranno quattro coppie di punti omologhi in due altre divisioni omografiche. Ciò posto, considerando la linea di 2^a classe C , involuppo delle due divisioni omografiche D' e D'' , siano quattro sue tangenti $l_\alpha, l_\beta, l_\gamma, l_\delta$ menate per le coppie di punti omologhi $p'_\alpha, p''_\alpha - p'_\beta, p''_\beta - p'_\gamma, p''_\gamma - p'_\delta, p''_\delta$ saranno ancora $p'_\alpha, p''_\alpha - p'_\beta, p''_\beta - p'_\gamma, p''_\gamma - p'_\delta, p''_\delta$ quattro coppie di punti omologhi in due altre divisioni omografiche; quindi (17) il punto d'incontro delle congiungenti di p'_α e $p''_\alpha - p'_\beta$ e p''_β cioè il punto $p_{\alpha, \beta}$ d'incontro di l_α ed l_β ; il punto d'incontro delle congiungenti di p'_γ e $p''_\gamma - p'_\delta$ e p''_δ , cioè il punto d'incontro $p'_{\gamma, \delta}$ di l_γ ed l_δ ; ed il punto d'incontro della congiungente $L_{\alpha, \gamma}$ di p'_α e p''_γ ed $L_{\beta, \delta}$ di p'_δ e p''_β si troveranno in una stessa retta L ; vale a dire nell'esagono $l'_\alpha l'_\beta l''_\gamma l''_\delta l'_\gamma l'_\delta$ circoscritto a C , le congiungenti $L, L_{\alpha, \gamma}, L_{\beta, \delta}$ delle coppie di vertici opposti $p_{\alpha, \beta}, p_{\gamma, \delta}, p'_\alpha, p''_\gamma - p'_\delta, p''_\beta$ passano per uno stesso punto. Con questa proprietà si possono costruire le tangenti di una linea di 2^a classe, conoscendone cinque, e trovare su di esse i punti di contatto, col supporre che due lati consecutivi dell'esagono circoscritto si riducano ad un solo, e con ciò il vertice corrispondente diventi punto di contatto. Se tre vertici alternativi dell'esagono si riducono ai punti di contatto, si avrà la proprietà dei tre punti di contatto in una linea di 2^a classe, dimostrata in (18).

Ritorniamo ora alla teoria generale dell' omografia delle divisioni e dei fasci.

Divisioni omografiche e fasci omografici.

25. In due divisioni omografiche sullo stesso asse vi sono due coppie di punti omologhi, che serbano tra loro una data distanza. Infatti, considerando sulla retta l le due divisioni omografiche D' e D'' , si supponga che rimanendo fissa la divisione D'' a D' si faccia percorrere su di l in un certo senso che diremo diretto, la distanza δ ; si cangerà così D' in una divisione d' omografica con D'' , ed è chiaro che i punti doppi p'_1 e p'_2 di queste due divisioni, con i loro omologhi p'_1 e p'_2 in D' determineranno le due coppie di punti omologhi che in D'' e D' serbano tra loro la distanza δ . Queste coppie di punti del pari che i punti doppi di d' e D'' possono ridursi ad una sola coppia, o essere immaginarie. Rimanendo fissa la divisione D' , se a D'' si fa percorrere su di l in senso opposto al precedente, vale a dire in senso inverso, la distanza δ , si avrà un' altra divisione d'' omografica con D' , ed i punti doppi di queste due divisioni con i loro omologhi in D'' determineranno le stesse coppie di punti omologhi $p'_1, p'_1 - p'_2, p'_2$ di D' e D'' . Si osservi intanto che se, rimanendo fissa D'' , D' percorra nel senso inverso la distanza δ , o viceversa restando fissa D' , D'' percorra nel senso diretto l' intervallo δ , si determineranno come sopra due altre coppie di punti omologhi $p'_3, p'_3 - p'_4, p'_4$ di D' e D'' che serbano tra loro la stessa distanza δ , ma riflettendo alla posizione rispettiva di questi punti, la loro distanza scambievolmente riguardarsi come percorsa in senso opposto a quello della distanza tra le altre due coppie di punti omologhi $p'_1, p'_1 - p'_2, p'_2$, e quindi da non confondersi con essa.

26. In due fasci omografici concentrici vi sono due coppie di raggi omologhi, che comprendono tra loro un dato angolo. Infatti, considerando i due fasci omografici F' ed F'' col centro p , si supponga che rimanendo fisso il fascio F'' , girando F' intorno al punto p in un certo senso che chiameremo diretto, descriva l' angolo τ ; si cangerà

così F' in un fascio f' omografico con F'' , ed è chiaro che i raggi doppi l''_1 ed l''_2 di questi due fasci, con i loro omologhi l'_1 ed l'_2 in F' determineranno le due coppie di raggi omologhi che in F'' ed F' comprendono tra loro l'angolo τ . Queste coppie di raggi, del pari che i raggi doppi di f'' ed F'' possono ridursi ad una sola, o essere immaginarie. Rimanendo fisso il fascio F' , se F'' descriva intorno al punto p , in senso opposto al precedente, o sia inverso, l'angolo τ , si avrà un altro fascio f'' omografico con F' , ed i raggi doppi di questi due fasci, con i loro omologhi in F'' determineranno le stesse coppie di raggi omologhi $l'_1, l'_1 - l'_2, l'_2$ di F' ed F'' . Però se, rimanendo fisso F'' , F' descriva nel senso inverso l'angolo τ , o viceversa restando fisso F' , F'' descriva nel senso diretto lo stesso angolo, si determineranno come precedentemente due altre coppie di raggi omologhi $l'_3, l'_3 - l'_4, l'_4$ di F' ed F'' che comprendono fra loro il medesimo angolo τ , ma tenendo conto della posizione rispettiva di tali raggi, l'angolo da essi compreso o dovrà riguardarsi descritto in senso opposto a quello dell'angolo compreso dalle altre due coppie di raggi omologhi $l'_1, l'_1 - l'_2, l'_2$ e da non confondersi con esso, o pure eguale al supplemento di τ .

27. In due divisioni omografiche D' e D'' in due rette l' ed l'' , ad ogni coppia di punti omologhi p' e p'' ne corrisponde un'altra p'_1, p''_1 ; in modo che le distanze scambievoli tra i punti della stessa divisione $p'p'_1$, e $p''p''_1$ siano eguali tra loro, e percorse sulle rette l' ed l'' nel senso che si riguarda diretto per entrambe, ed un'altra coppia di punti omologhi p'_2, p''_2 , tali che le distanze $p'p'_2$, $p''p''_2$ sieno eguali, e dirette in sensi opposti tra loro. In fatti facendo coincidere gli assi l' ed l'' delle due divisioni D' e D'' sulla retta l in modo che i punti omologhi p' e p'' coincidono nel punto p , e si adattino le une sulle altre o le parti di l' ed l'' che s'intendono percorse nello stesso senso, o quelle percorse in senso opposto, si avranno sulla retta l due divisioni omografiche D'_1, D''_1 , o due altre divisioni D'_2, D''_2 , nelle quali uno dei punti doppi coincide con p , quindi l'altro punto doppio

p_1 di D'_1 e D''_1 , ed il punto doppio p_2 di D'_2 e D''_2 determineranno sulle divisioni primitive le coppie dei punti creati $p'_1, p''_1 - p'_2, p''_2$.

28. In due fasci omografici F' ed F'' con i centri p' e p'' , ad ogni coppia di raggi omologhi l' ed l'' ne corrisponde un'altra l'_1, l''_1 , in modo che gli angoli compresi tra i raggi dello stesso fascio $l'p'l'_1, l''p''l''_1$, siano eguali tra loro e descritti intorno a p' e p'' nel senso che si riguarda diretto per entrambi, ed un'altra coppia di raggi omologhi l'_2, l''_2 , tali che gli angoli $l'p'l'_2, l''p''l''_2$ siano eguali, e descritti in sensi opposti tra loro. Infatti facendo coincidere i centri p' e p'' dei due fasci F' ed F'' nel punto p , in modo che i raggi omologhi l' ed l'' si confondano con la retta l , e si adattino gli uni su gli altri, o gli angoli che intorno a p' e p'' s'intendano descritti nello stesso senso, o quelli descritti in senso opposto, si avranno intorno al punto p due fasci omografici F'_1, F''_1 , o due altri fasci omografici F'_2, F''_2 , nei quali uno dei raggi doppi coincide con l , quindi l'altro raggio doppio l_1 di F'_1 ed F''_1 , ed il raggio doppio l_2 di F'_2 , ed F''_2 determineranno nei fasci primitivi F' ed F'' le due coppie di raggi creati $l'_1, l''_1 - l'_2, l''_2$.

29. Disponendo due divisioni omografiche D' e D'' in modo che due punti omologhi arbitrarii coincidano col punto d'incontro dei loro assi l' ed l'' , le congiungenti l_i delle coppie dei punti omologhi p'_i, p''_i concorreranno in uno stesso punto (14); se questo punto cade a distanza infinita, o sia se le rette l_i sono parallele, le rette l' ed l'' saranno evidentemente divise dai punti omologhi p'_i e p''_i in parti proporzionali; in tal caso le due divisioni omografiche D' e D'' diconsi simili, di simiglianza diretta o inversa, secondo che i punti omologhi p'_i e p''_i percorrono l' ed l'' nel senso che si riguarda diretto per entrambe, o in senso opposto. Se le congiungenti l_i dei punti omologhi p'_i e p''_i s'inclinano inoltre egualmente ad l' ed l'' , le due divisioni D' e D'' saranno eguali, e potrà distinguersi ancora l'eguaglianza

za diretta dall' inversa. In due divisioni omografiche simili , o eguali , i loro punti all' infinito sono evidentemente punti omologhi , quindi disponendo gli assi l' ed l'' delle due divisioni D' e D'' parallelamente , e diretti nello stesso senso , se le divisioni sono di simiglianza diretta o inversa , le congiungenti l_i dei punti omologhi p'_i e p'' concorreranno in uno stesso punto situato o dalla medesima parte di l' ed l'' , o pure tra esse ; se le divisioni poi sono di eguaglianza diretta o inversa , quelle congiungenti saranno parallele , o pure concorreranno in un punto ad eguale distanza tra l' ed l'' . Due divisioni omografiche coincidenti simili , direttamente o inversamente , hanno uno dei punti doppii a distanza infinita ; accadrà lo stesso se le due divisioni sono eguali di eguaglianza inversa ; nel caso poi che l' eguaglianza sia diretta , o le divisioni saranno identiche , o avranno tutti e due i punti doppii coincidenti all' infinito. Due divisioni omografiche simili sono determinate da due sole coppie di punti omologhi , e due divisioni eguali da una sola.

30. Situando due fasci omografici F' ed F'' in modo che due raggi omologhi arbitrarii coincidano con la retta che congiunge i loro centri p' e p'' , i punti di concorso p_i dei raggi omologhi l'_i ed l''_i percorreranno una stessa retta (13) ; se questa retta è perpendicolare alla congiungente dei centri dei fasci , si avrà un caso particolare dell' omografia di questi fasci , analogo alla simiglianza di due divisioni omografiche. Se la retta d' intersezione dei due fasci , perpendicolare alla congiungente dei loro centri , è inoltre ad eguale distanza da essi , o pure cade a distanza infinita , i due fasci F' e F'' saranno eguali , di eguaglianza inversa nel primo caso , e diretta nel secondo. Due fasci omografici concentrici e di eguaglianza inversa , hanno i raggi doppii perpendicolari tra loro , e se l' eguaglianza è diretta , i due fasci o saranno identici , o avranno i raggi doppii immaginari. Due fasci omografici in circostanze analoghe alle divisioni omografiche simili , sono determinati da due sole coppie di raggi omologhi , e due fasci omografici eguali da una sola.

Altre particolarità osservabilissime dell' omografia delle divisioni e dei fasci . che diremo involuzioni , e sulle quali è fondata la teoria delle polari coniugate , e dei fuochi nelle linee di 2° ordine e di 2ª classe , formeranno l' oggetto di un altro lavoro , in cui ci occuperemo della serie indefinita delle successive trasformazioni omografiche delle figure.

S O P R A

LA CONDIZIONE PER LA POSSIBILITÀ DELLO SVILUPPO DI QUALUNQUE FUNZIONE IN SERIE ORDINATA

S E C O N D O

LE POTENZE ASCENDENTI DELLA DIFFERENZA DELLA VARIABILE SOPRA UN VALORE COSTANTE

MEMORIA

DEL SOCIO CORRISPONDENTE

E. FERGOLA

Si sa che il sig. *Cauchy* ha dimostrato pel primo, che qualunque funzione può essere sviluppata in serie ordinata secondo le potenze ascendenti della variabile, per ogni valore di questa, il cui modulo sia inferiore al più piccolo modulo di quei valori, che rendono infinita la prima funzione derivata della proposta (*). Questo teorema rimarchevolissimo, che stabilisce il criterio per la possibilità dello sviluppo in serie di una funzione secondo le ascendenti potenze della variabile, può facilmente essere esteso al caso in cui lo sviluppo si volesse, o dovesse essere ordinato secondo le potenze ascendenti della differenza della variabile sopra un certo valore costante. Io spero che questa maggiore estensione, che può darsi al teorema del *Cauchy* sia trovata non

(*) V. *Moigno*—Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral tom. I, pag. 157.

Cauchy — Memoria sulla meccanica celeste, e sopra un nuovo calcolo chiamato calcolo dei limiti, inserita nel tom. II degli Opuscoli matematici e fisici pag. 12.

del tutto priva di qualche importanza. Ecco la breve analisi, che serve a stabilire il teorema di cui si tratta.

Sia φz la funzione della quale si vuole lo sviluppo per un valore z_1 della variabile. Facendo $z_1 = z_0 + y_1$, e sviluppando secondo le potenze ascendenti di y_1 si avrà l'equazione

$$(T) \quad \varphi z_1 = \varphi z_0 + y_1 \varphi' z_0 + \frac{y_1^2}{1.2} \varphi'' z_0 + \text{ec.}$$

nella quale il modulo di y_1 dev'essere inferiore al modulo di qualunque valore di y tratto dall'equazione

$$\frac{d\varphi(z_0 + y)}{dy} = \infty.$$

Chiamando y_μ una radice di quest'ultima, e facendo $z_\mu = z_0 + y_\mu$, è chiaro, che dovrà essere z_μ radice dell'equazione

$$\varphi' z = \infty;$$

quindi per l'esistenza dell'equazione (T) si può dire doversi verificare la condizione

$$\text{mod}(z_1 - z_0) < \text{mod}(z_\mu - z_0),$$

la quale, col porsi $z = \rho e^{\alpha \sqrt{-1}}$, si riduce all'altra

$$\rho_1^2 - \rho_\mu^2 < 2\rho_0(\rho_1 \cos(\alpha_1 - \alpha_0) - \rho_\mu \cos(\alpha_\mu - \alpha_0)).$$

Si faccia, per maggiore semplicità, $\alpha_1 = \alpha_0$; la precedente condizione diverrà

$$\rho_1^2 - \rho_\mu^2 < 2\rho_0(\rho_1 - \rho_\mu \cos(\alpha_\mu - \alpha_0)),$$

e sarà certamente verificata qualora si abbia

$$\rho_1^2 - \rho_\mu^2 < 2\rho_0(\rho_1 - \rho_\mu).$$

Ora se è $\rho_\mu < \rho_1$, dovrà essere $\rho_\mu < 2\rho_0 - \rho_1$; ed, al contrario, se è $\rho_\mu > \rho_1$, dovrà essere $\rho_\mu > 2\rho_0 - \rho_1$. In ogni caso adunque la condizione per l'adempimento dell'equazione (T) si è che fra i due numeri ρ_1 e $2\rho_0 - \rho_1$ non si trovi compreso alcuno dei moduli delle radici dell'equazione $\varphi'z = \infty$.

Risulta da ciò il seguente

TEOREMA

Qualunque funzione φz di una variabile è sviluppabile in serie ordinata secondo le potenze ascendenti della differenza $z - z_0$, purchè il valore di z_0 abbia l'argomento stesso di z , ed il modulo tale, che fra le due quantità

$$\text{mod } z \quad \text{e} \quad 2\text{mod } z_0 - \text{mod } z$$

non si trovi compreso alcuno dei moduli delle radici dell'equazione $\varphi'z = \infty$.

Cor. 1 — Se $\text{mod } z$ è minore del modulo di qualunque radice dell'equazione $\varphi'z = \infty$, è chiaro che si soddisferà alla condizione voluta, prendendo

$$\text{mod } z_0 < \text{mod } z.$$

Dunque in tal caso potrà anche farsi $z = 0$, e così si ritorna al teorema del sig. Cauchy.

Cor. 2 — Se $\text{mod } z$ è maggiore del modulo di qualunque radice dell'equazione $\varphi'z = \infty$, si potrà prendere $\text{mod } z_0 > \text{mod } z$.

Cor. 3 — Se $z = 0$ basterà che $2\text{mod } z_0$ sia minore del modulo di qualunque radice dell'equazione $\varphi'z = \infty$; e per conseguenza: la formula

$$\varphi(0) = \varphi z_0 - z_0 \varphi' z_0 + \frac{z_0^2}{1.2} \varphi'' z_0 - \text{cc.}$$

sarà esatta per qualunque valore di z_0 che abbia il modulo inferiore alla metà del più piccolo modulo delle radici dell'equazione $\varphi'z = \infty$.

R I C E R C A

DELL' ESPRESSIONE DI UNA DERIVATA QUALUNQUE
DI UNA FUNZIONE IN TERMINI DELLE DERIVATE DELLA FUNZIONE
INVERSA.

MEMORIA

DEL SOCIO CORRISPONDENTE

E. FERGOLA.

È una proposizione elementare nella teoria delle funzioni, che il prodotto delle derivate di due funzioni inverse è eguale all'unità. Partendo da questa relazione, e giovandosi del teorema per la derivazione delle funzioni di funzioni, si può passare di mano in mano alla formazione della equazione, che fornisce immediatamente, ed esplicitamente quella derivata che si voglia di una delle due funzioni, in termini espressi con le derivate della inversa. Nulla però, per quanto io sappia, si conosce sulla legge con la quale procedono tali derivate; o, ciò che è lo stesso, mi pare sia ignota l'espressione della derivata n^{esima} di una funzione in termini delle prime n derivate della funzione inversa. La determinazione di questa espressione forma l'oggetto della memoria che ho l'onore di sottomettere a questa illustre Accademia.

Siano x ed y due quantità variabili legate fra loro da una equazione. Si dinotino con $y', y'' \dots$ le derivate di y considerata come funzione della variabile x , e con $x', x'' \dots$ le derivate di x considerata come funzione della variabile y . Si tratta di esprimere il valore di una derivata qualunque $y^{(n)}$ di y in funzione delle derivate $x', x'' \dots$ di x .

Si sa che fra le prime derivate x', y' passa la relazione

$$(1) \quad y' = x'^{-1}.$$

Per poco che si rifletta al modo come la derivata n^{esima} di y può ottenersi, si vede che si darà la forma più generale possibile alla espressione di questa derivata scrivendo

$$(n) \quad y^{(n)} = \sum \Lambda \cdot x_1^{-p_1} x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n},$$

e che, per conseguenza, dovrà essere

$$\begin{aligned} (n+1) \quad y^{(n+1)} &= \\ &= \sum -\Lambda_n p_1 x_1^{-p_1-2} x_2^{p_2+1} x_3^{p_3} \dots x_n^{p_n} \\ &+ \sum \Lambda_n p_2 x_1^{-p_1-1} x_2^{p_2-1} x_3^{p_3+1} x_4^{p_4} \dots x_n^{p_n} \\ &+ \sum \Lambda_n p_3 x_1^{-p_1-1} x_2^{p_2} x_3^{p_3-1} x_4^{p_4+1} \dots x_n^{p_n} \\ &\dots \dots \dots \\ &+ \sum \Lambda_n p_{n-1} x_1^{-p_1-1} x_2^{p_2} x_3^{p_3} x_4^{p_4} \dots x_{n-1}^{p_{n-1}-1} x_n^{p_n+1} \\ &+ \sum \Lambda_n p_n x_1^{-p_1-1} x_2^{p_2} x_3^{p_3} x_4^{p_4} \dots x_{n-1}^{p_{n-1}} x_n^{p_n-1} x_{n+1}. \end{aligned}$$

Da questa equazione, e dalla precedente si rileva facilmente che fra il numero n , e la somma,

$$p_2 + 2p_3 + 3p_4 + \dots + (n-1)p_n$$

deve passare sempre la medesima differenza, la quale trovasi eguale ad 1 nell'equazione (1); adunque sarà in generale

$$(p) \quad p_2 + 2p_3 + 3p_4 + \dots + (n-1)p_n = n-1.$$

Rilevasi inoltre dalle equazioni (n) ed (n+1), che deve essere anche costante la differenza fra il numero n , e l'altra somma

$$p_1 - p_2 - p_3 - \dots - p_n;$$

202 N. FERGOLA—RICERCA DELL'ESPRESSIONE DI UNA DERIVATA QUALUNQUE
e poichè tal differenza trovasi eguale a zero nell'equazione (1), si conchiude dover essere in generale

$$(p_1) \quad p_1 = n + p_2 + p_3 + \dots + p_n.$$

Ora è facile dimostrare che la somma Σ nell'equazione (n) devesi estendere a tutti i valori interi e positivi (incluso zero) degli esponenti p_2, p_3, \dots, p_n , che verificano l'equazione (p). In fatti suppongasi per un momento, che questo sia vero per l'equazione (n), e si indichino con

$$\begin{aligned} & q_2, q_3, \dots, q_n, q_{n+1} \\ \text{gli esponenti di} & x'', x''', \dots, x^{(n)}, x^{(n+1)} \end{aligned}$$

nell'equazione (n+1), in modo da potere scrivere questa ultima sotto la forma

$$((n+1)) \quad y^{(n+1)} = \sum A_{r+1} x^{q_1} x''^{q_2} \dots x^{(n)q_n} x^{(n+1)q_{n+1}}$$

dove

$$q_1 = n + 1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n + q_{n+1},$$

e la somma Σ sarà estesa a tutti i valori di q_2, q_3, \dots, q_{n+1} , che si deducono da p_2, p_3, \dots, p_n aumentando di una unità un termine qualunque, e diminuendo di una unità il termine precedente. Se i valori di q_2, q_3, \dots in tal modo ottenuti non sono tutti quelli che soddisfano la condizione

$$q_2 + 2q_3 + \dots + (n-1)q_n + nq_{n+1} = n$$

sia

$$\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$$

uno dei sistemi di valori, che soddisfano questa equazione e non entrano nella composizione dell'espressione ((n+1)). Allora diminuendo di una unità l'ultimo di questi termini, se è differente da zero, o un altro qualunque differente da zero se l'ultimo è uguale a zero, ed aumentando di una unità il termine precedente, si avrà una serie di valori non compresi nei diversi sistemi che possono prendere gli esponenti p_2, p_3, \dots, p_n nell'espressione (n), e che pure verificano l'equazione (p); ciò che è

contro l'ipotesi. Segue da questo ragionamento, che se per un valore particolare di n la somma Σ si estende a tutti i valori interi e positivi di p_2, p_3, \dots, p_n che verificano l'equazione (p) , lo stesso avverrà pel medesimo valore di n aumentato dell'unità; e siccome per $n=1$ gli esponenti di $x'', x''' \dots$ nell'equazione (1) costituiscono l'unico sistema di valori capaci di verificare l'equazione (p) , così resta dimostrata generalmente la verità della proposizione enunciale.

A compiere la determinazione della derivata $y^{(n)}$, si vede che resta solo a cercare il valore del coefficiente A_n . Ora io dico che se si indica, come d'ordinario, con $11k$ il prodotto $1 \cdot 2 \dots k$, il valore di questo coefficiente sarà

$$(a) \quad A_n = \frac{(-1)^{n-1} 11 p_1 - 1}{11 2^{p_2} 11 3^{p_3} 11 4^{p_4} \dots 11 n^{p_n} 11 p_2 11 p_3 11 p_4 \dots 11 p_n}.$$

In fatti, supponiamo per poco che questa formula si verifichi per un certo valore di n , e cerchiamo ciò che essa diviene quando il numero n si aumenta dell'unità. A tale effetto si dinotino con

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0$$

dei particolari valori degli esponenti

$$q_1, q_2, \dots, q_n, q_{n+1}$$

che entrano nella formula $((n+1))$. Il termine corrispondente a tali valori sarà

$$A_{n+1} x^{-\alpha_1} x^{\alpha_2} \dots x^{-(\alpha_{n-1})} x^{\alpha_n},$$

e questo termine dovrà risultare dalla somma di quelli che si ottengono dal 1°, 2° $(n+1)^{\text{esimo}}$ termine del secondo membro dell'equazione $(n+1)$ assumendo per

$$p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_{n-1}, p_n$$

204 N. FERGOLA—RICERCA DELL'ESPRESSONE DI UNA DERIVATA QUALUNQUE
rispettivamente i seguenti sistemi di valori

$$\begin{array}{cccccccc} \alpha_1-2 & , & \alpha_2-1 & , & \alpha_3 & , & \alpha_4 & . . . & \alpha_{n-1} & , & \alpha_n \\ \alpha_1-1 & , & \alpha_2+1 & , & \alpha_3-1 & , & \alpha_4 & . . . & \alpha_{n-1} & , & \alpha_n \\ \alpha_1-1 & , & \alpha_2 & , & \alpha_3+1 & , & \alpha_4-1 & . . . & \alpha_{n-1} & , & \alpha_n \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ \alpha_1-1 & , & \alpha_2 & , & \alpha_3 & , & \alpha_4 & . . . & \alpha_{n-1}+1 & , & \alpha_n+1. \end{array}$$

Adunque dovrà essere

$$\begin{aligned} A_{n+1} = & \frac{(-1)^{n-\alpha_1}(\alpha_1-2)\Pi(\alpha_1-3)}{\Pi 2^{\alpha_2-1} \Pi 3^{\alpha_3} \Pi 4^{\alpha_4} \dots \Pi n^{\alpha_n} \Pi(\alpha_2-1) \Pi \alpha_3 \Pi \alpha_4 \dots \Pi \alpha_n} \\ & + \frac{(-1)^{n-\alpha_1+1}(\alpha_2+1)\Pi(\alpha_1-2)}{\Pi 2^{\alpha_2+1} \Pi 3^{\alpha_3-1} \Pi 4^{\alpha_4} \dots \Pi n^{\alpha_n} \Pi(\alpha_2+1) \Pi(\alpha_3-1) \Pi \alpha_4 \dots \Pi \alpha_n} \\ & + \frac{(-1)^{n-\alpha_1+1}(\alpha_3+1)\Pi(\alpha_1-2)}{\Pi 2^{\alpha_2} \Pi 3^{\alpha_3+1} \Pi 4^{\alpha_4-1} \dots \Pi n^{\alpha_n} \Pi \alpha_2 \Pi(\alpha_3+1) \Pi(\alpha_4-1) \dots \Pi \alpha_n} \\ & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ & + \frac{(-1)^{n-\alpha_1+1}(\alpha_{n-1}+1)\Pi(\alpha_1-2)}{\Pi 2^{\alpha_2} \Pi 3^{\alpha_3} \dots \Pi(n-1)^{\alpha_{n-1}+1} \Pi n^{\alpha_n-1} \Pi \alpha_2 \dots \Pi(\alpha_{n-1}+1) \Pi(\alpha_n-1)}; \end{aligned}$$

ovvero, osservando che $(\alpha_1-2)\Pi(\alpha_1-3)=\Pi(\alpha_1-2)$, e riducendo tutti termini del secondo membro al medesimo denominatore,

$$A_{n+1} = \frac{(-1)^{n-\alpha_1+1} \Pi(\alpha_1-2) \left(\frac{\Pi 2}{\Pi 1} \alpha_2 + \frac{\Pi 3}{\Pi 2} \alpha_3 + \frac{\Pi 4}{\Pi 3} \alpha_4 + \dots + \frac{\Pi n}{\Pi(n-1)} \alpha_n \right)}{\Pi 2^{\alpha_2} \Pi 3^{\alpha_3} \Pi 4^{\alpha_4} \dots \Pi n^{\alpha_n} \Pi \alpha_2 \Pi \alpha_3 \Pi \alpha_4 \dots \Pi \alpha_n};$$

ma dalle due equazioni già dimostrate

$$\begin{aligned} \alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + \dots + (n-1)\alpha_n &= n \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \dots + \alpha_n &= \alpha_1 - n - 1 \end{aligned}$$

si ricava

$$\frac{n2}{n1}\alpha_2 + \frac{n3}{n2}\alpha_3 + \frac{n4}{n3}\alpha_4 + \dots + \frac{nn}{n(n-1)}\alpha_n = \alpha_1 - 1$$

dunque sarà finalmente

$$A_{n+1} = \frac{(-1)^{n-\alpha_1+1} \Pi(\alpha_1-1)}{\Pi 2^{\alpha_2} \Pi 3^{\alpha_3} \Pi 4^{\alpha_4} \dots \Pi n^{\alpha_n} \Pi \alpha_2 \Pi \alpha_3 \Pi \alpha_4 \dots \Pi \alpha_n},$$

e si vede facilmente che questo valore di A_{n+1} può essere dedotto dalla formula (a) cangiandovi n in $n+1$, e

$$p_1, p_2, \dots, p_n$$

rispettivamente in

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n.$$

Se il valore di q_{n+1} non fosse zero, come si è supposto, esso allora dovrebbe essere eguale ad 1, e sarebbe

$$\begin{aligned} q_2 = q_3 = \dots = q_n &= 0 \\ q_1 &= n + 2. \end{aligned}$$

Il termine corrispondente a questi valori nell'equazione $((n+1))$ sarà

$$A_{n+1} x^{n-\alpha_1+2} x^{(n-1)};$$

ma questo termine non può risultare che dall'ultimo di quelli scritti al 2° membro dell'equazione $(n+1)$ con assumervi

$$p_n = 1, p_1 = n + 1$$

$$p_2 = p_3 = \dots = p_{n-1} = 0;$$

206 N. FERGOLA — RICERCA DELLA ESPRESSIONE DI UNA DERIVATA QUALUNQUE.
 dunque dovrà essere

$$A_{n+1} = \frac{-11n}{1111n} = -1$$

valore identico con quello che si ricaverebbe dall'equazione (a) col mutarvi n in $n+1$, e $p_1, p_2, p_3 \dots$ in $q_1, q_2, q_3 \dots$.

Segue da tutto ciò, che se l'equazione (a) è verificata per un certo valore di n , essa lo sarà pure per lo stesso valore aumentato dell'unità; e poichè dall'equazione (1) rilevasi essere soddisfatta l'equazione (a) per $n=1$, così resta dimostrata l'esattezza dell'enunciato valore di A_n per qualunque valore del numero n .

Riassumendo può dirsi che:

Se x ed y dinotano due funzioni inverse l'una dell'altra, e se si rappresentano con $y', y'' \dots$ le derivate successive di y per rapporto ad x , e con $x', x'' \dots$ quelle di x per rapporto ad y , deve essere

$$y^{(n)} = \sum A_n \frac{x'^{p_2} x''^{p_3} \dots x^{(n)^{p_n}}}{x'^{p_1}},$$

dove i valori di p_1 e di A_n sono rispettivamente

$$p_1 = n + p_2 + p_3 + \dots + p_n$$

$$A_n = \frac{(-1)^{p_1-n} \Pi' p_1 - 1}{\Pi 2^{p_2} \Pi 3^{p_3} \Pi 4^{p_4} \dots \Pi n^{p_n} \Pi p_2 \Pi p_3 \Pi p_4 \dots \Pi p_n},$$

e la somma Σ deve estendersi a tutti i valori interi e positivi (incluso zero) di $p_2, p_3 \dots p_n$ che verificano l'equazione,

$$p_2 + 2p_3 + 3p_4 + \dots + (n-1)p_n = n-1.$$

RICERCHE

SULLA RISOLUZIONE PER SERIE DI UN'EQUAZIONE QUALUNQUE

MEMORIA

DEL SOCIO CORRISPONDENTE

E. FERGOLA

L'oggetto precipuo della presente memoria è la determinazione delle radici di un'equazione data qualunque, in serie espresse con le radici di un'altra equazione presa ad arbitrio. Mi è stato possibile arrivare assai facilmente alla soluzione di questo problema sol perchè erami nota la formula, che esprime una derivata qualunque di una funzione mediante le derivate della funzione inversa. La serie alla quale sono pervenuto dipende con legge semplicissima dalle derivate di una funzione composta dai primi membri dell'equazione data e dell'arbitraria, e da alcune costanti indipendenti non solo dai coefficienti di queste due equazioni, ma ancora dalla loro forma; la quale rimarchevole circostanza permette eseguire una volta per tutte una porzione del calcolo, che richiederebbe l'applicazione della formula trovata, assegnando anticipatamente i valori di quelle costanti, di cui occorre sempre l'uso, o che l'equazione da risolvere sia algebrica, o che essa sia trascendente.

Dalla soluzione di questo problema potrei trarre buon numero di conseguenze; mi limiterò per ora alle più rimarchevoli fra quelle che ho esaminate, e che si riferiscono alla risoluzione delle equazioni algebriche di un grado qualunque. Per queste equazioni trovo le espres-

sioni di alcune radici con formule, che compendiano l'intero processo di operazioni da eseguire per passare dai coefficienti delle equazioni ai valori delle radici. In queste formule si possono anche sostituire ai coefficienti altri valori, che contengono una costante arbitraria, della quale, mi pare, si potrebbe disporre per assicurare la convergenza delle serie da calcolare. Del resto il criterio per la convergenza di tutte le serie determinate l'ho ricavato dal noto teorema di *Cauchy* reso alquanto più generale nella memoria che ha per titolo: *Sopra la possibilità dello sviluppo di qualunque funzione in serie cc.*

1 — Sia l'equazione da risolvere

$$(f) \quad fx = 0.$$

Indico con Fx una funzione qualunque di x , e formo l'equazione

$$z(fx + Fx) = Fx,$$

di cui suppongo essere

$$x = \varphi z$$

una radice. Questo valore di x si ridurrà ad una radice x_1 dell'equazione (f) quando $z=1$. Ora, indicando con z_0 una quantità arbitraria, si avrà

$$\varphi z = \varphi z_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n!} \varphi^{(n)} z_0,$$

e facendo $z=1$, risulterà l'equazione

$$x_1 = \varphi z_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(1-z_0)^n}{n!} \varphi^{(n)} z_0$$

dove il valore di z_0 dev'essere reale, positivo, e tale che fra i due numeri 1 e $2z_0-1$ non si trovi compreso alcuno dei moduli delle radici dell'equazione $\varphi'z = \infty$. (*)

Ciò posto, si chiami x_0 il valore di x corrispondente al valore z_0 di z , e si dinotino con z_0' , z_0'' , z_0''' ciò che diventano le derivate di z per rapporto ad x quando in esse si sostituisce x_0 ad x ; sarà (**)

$$\varphi^{(n)} z_0 = \sum_{n=1}^n \Lambda_n \frac{z_0^{p_1} z_0^{p_2} z_0^{p_3} \dots z_0^{p_n}}{z_0^{p_3}}$$

(*) V. pag. 199.

(**) V. pag. 206.

dove

$$\Lambda_n = \frac{(-1)^{p_1-n} n!(p_1-1)}{n! 2^{p_2} 3^{p_3} \dots n^{p_n} p_2! p_3! \dots p_n!}$$

$$p_1 = n + p_2 + p_3 + \dots + p_n,$$

e la somma $\sum_{n=1}$ devesi estendere a tutte le soluzioni intere, e positive (incluso zero) che verificano l'equazione

$$p_2 + 2p_3 + \dots + (n-1)p_n = n-1.$$

Sostituendo nell'espressione di x_1 il precedente valore di $\varphi^{(n)} z_0$ risulterà l'equazione

$$(1) \quad x_1 = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-z_0)^n}{n!} \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \frac{z_0^{n p_2} z_0^{n p_3} \dots z_0^{(n) p_n}}{z_0^{n p_1}},$$

la quale esprime una radice qualunque x_1 dell'equazione $fx=0$ in funzione della radice x_0 dell'altra equazione $z_0(fx+Fx)=Fx$.

2. — Se i moduli delle radici di $\varphi'z=\infty$ fossero tutti maggiori di 1, sarebbe lecito supporre $z_0=0$, e si avrebbe

$$(2) \quad x_1 = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \frac{z_0^{n p_2} z_0^{n p_3} \dots z_0^{(n) p_n}}{z_0^{n p_1}}.$$

Quì una radice x_1 dell'equazione $fx=0$ è espressa mediante la radice x_0 dell'altra equazione $Fx=0$.

3. — Si è detto che per verificarsi l'equazione (1) è necessario, che fra i due numeri 1, e $2z_0-1$ non si trovi compreso alcuno dei moduli delle radici dell'equazione $\varphi'z=\infty$; e per la esattezza della equazione (2) si richiede che i moduli di queste medesime radici siano tutti maggiori dell'unità. È utile pertanto osservare che le radici dell'equazione $\varphi'z=\infty$ sono i valori di

$$\frac{Fx}{fx+Fx}$$

corrispondenti alle radici dell'equazione

$$f x F' x - F x f' x = 0.$$

4. — Supponiamo ora che l'equazione da risolvere sia

$$f x = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Se la funzione arbitraria Fx si supponga tale, che sia

$$f x + F x = b x^r + a_0,$$

la funzione z verrà determinata dall'equazione

$$z - 1 = - \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b x^r + a_0} = \frac{p}{Q},$$

ed uno dei valori di x corrispondenti a $z = 0$ sarà $x = 0$.

Per trovare ciò che diventano le derivate di z al supporre $x = 0$, si osservi che, dinotando con μ un numero intero qualunque, si ha

$$z_o^{(\mu)} = P_o^{(\mu)} \left(\frac{1}{Q} \right)_o + \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} \frac{\Pi_\mu}{\Pi_{(\mu-\nu)}} P_o^{(\mu-\nu)} \left(\frac{1}{Q} \right)_o^{(\nu)}$$

dove l'indice o indica doversi fare $x = 0$ dopo le derivazioni. Ora si ha evidentemente

$$P_o^{(\mu-\nu)} = - \Pi_{(\mu-\nu)} a_{\mu-\nu};$$

e d'altra parte osservando che

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{a_0 + b x^r} = \frac{1}{a_0} - \frac{b}{a_0^2} x^r + \frac{b^2}{a_0^3} x^{2r} - \frac{b^3}{a_0^4} x^{3r} + \text{ec.}$$

si conchiude

$$\left(\frac{1}{Q} \right)_o^{(\nu)} = \frac{(-1)^r \Pi_\nu b^{\frac{\nu}{r}}}{a_0^{\frac{\nu}{r} + 1}},$$

con la sola avvertenza di doversi considerare come zero quelle derivate per le quali l'esponente $\frac{\nu}{r}$ non è intero; sarà dunque

$$z_o^{(\mu)} = - \frac{a_\mu \Pi_\mu}{a_0} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} a_{\mu-\nu} \Pi_\mu \frac{(-1)^r b^{\frac{\nu}{r} + 1}}{a_0^{\frac{\nu}{r} + 1}}.$$

Assumendo

$$D_{\mu} = \frac{a_{\mu}}{a_0} - \frac{a_{\mu-1}b}{a_0^2} + \frac{a_{\mu-2}b^2}{a_0^3} - \frac{a_{\mu-3}b^3}{a_0^4} + \text{cc.}$$

fino ai termini pei quali l'indice di a diviene negativo, risulterà semplicemente

$$z_0^{(\mu)} = -11^{\mu} D_{\mu}.$$

Sostituendo questi valori nell'equazione (2), ed eseguendo le riduzioni, si avrà l'altra equazione

$$(3) \quad x_i = \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{n-1} C \frac{D_2^{p_2} D_3^{p_3} \dots D_n^{p_n}}{D_1^{p_1}}$$

nella quale

$$C = \frac{(-1)^{p_1}(p_1-1)}{11^{p_1} p_2 p_3 \dots p_n}.$$

5. — Se nella precedente espressione di x_i si assume $b=0$, si troverà

$$(4) \quad x_i = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_0^n \sum_{n-1} C \frac{a_2^{p_2} a_3^{p_3} \dots a_m^{p_m}}{a_1^{p_1}}.$$

6. — Quest'ultima formula esprime una radice dell'equazione proposta in funzione immediata dei suoi coefficienti; la precedente (3) esprime la stessa radice mediante le quantità D , dipendenti in modo assai semplice dai coefficienti medesimi, e dall'arbitraria b . La formula (3) si troverà esatta ogni volta che eliminando x fra le due equazioni

$$\begin{aligned} r b x^{r-1} f x &= (b x^r + a_0) f' x \\ f x &= (1-z)(b x^r + a_0), \end{aligned}$$

l'equazione in z , che ne risulta abbia i moduli delle sue radici tutti maggiori dell'unità. Per l'adempimento dell'equazione (4) è neces-

sario che siano maggiori di 1 i moduli delle radici dell'equazione in z , che si ottiene eliminando x fra le due equazioni

$$f'x = 0 \quad \text{e} \quad fx = a_0(1-z).$$

È chiaro pertanto, che in quest'ultimo caso il primo membro dell'equazione in z che si considera, dev'essere identicamente eguale all'ultimo termine dell'equazione ai quadrati delle differenze di

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + c_1 x + a_0 z = 0.$$

7. — Si osservi che i numeri p_1, p_2, \dots e la funzione C di essi potendo calcolarsi indipendentemente dai coefficienti dell'equazione data, sarà possibile formarsi una tavola di queste quantità per quei valori di n , che si vorrà. Così per i valori di n da 1 a 7 si hanno nel seguente quadro tutti i valori corrispondenti di C, p_1, p_2, \dots .

n	C	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	n	C	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7
1	— 1	1	0	0	0	0	0	0	6	— 84	10	3	1	0	0	0	0
2	— 1	3	1	0	0	0	0	0	6	— 28	9	2	0	1	0	0	0
3	— 2	5	2	0	0	0	0	0	6	— 7	8	1	0	0	1	0	0
3	— 1	4	0	1	0	0	0	0	6	— 1	7	0	0	0	0	1	0
4	— 5	7	3	0	0	0	0	0	6	— 28	9	1	2	0	0	0	0
4	— 1	5	0	0	1	0	0	0	6	— 7	8	0	1	1	0	0	0
5	— 14	9	4	0	0	0	0	0	7	— 132	13	6	0	0	0	0	0
5	— 5	6	1	1	0	0	0	0	7	— 330	12	4	1	0	0	0	0
5	— 1	5	0	0	1	0	0	0	7	— 120	11	3	0	1	0	0	0
5	— 14	9	4	0	0	0	0	0	7	— 36	10	2	0	0	1	0	0
5	— 21	8	2	1	0	0	0	0	7	— 8	9	1	0	0	0	1	0
5	— 6	7	1	0	1	0	0	0	7	— 1	8	0	0	0	0	0	1
5	— 1	6	0	0	0	1	0	0	7	— 180	11	2	2	0	0	0	0
5	— 3	7	0	2	0	0	0	0	7	— 72	10	1	1	1	0	0	0
6	— 42	11	5	0	0	0	0	0	7	— 8	9	0	1	0	1	0	0
									7	— 4	9	0	0	2	0	0	0
									7	— 12	10	0	3	0	0	0	0

8. — Se nell' equazione

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

si sostituisce $\frac{1}{X}$ ad x , risulta

$$a_0 X^m + a_1 X^{m-1} + \dots + a_{m-1} X + a_m = 0.$$

Per questa equazione le formule (3) e (4) diventano rispettivamente :

$$(5) \quad X_i = \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{n=1} C \frac{D_2^{p_2} D_3^{p_3} \dots D_n^{p_n}}{D_1^{p_1}}$$

dove in generale si ha

$$D_\mu = \frac{a_{m-\mu}}{a_m} - \frac{a_{m-\mu+1} b}{a_m^2} + \frac{a_{m-\mu+2} b^2}{a_m^3} - \text{ec.};$$

ed

$$(6) \quad X_i = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_m^n \sum_{n=1} C \frac{a_{m-2}^{p_2} a_{m-3}^{p_3} \dots a_0^{p_n}}{a_{m-1}^{p_1}}.$$

Quindi si avrà immediatamente l'espressione di un' altra radice dell' equazione proposta.

Per primo esempio suppongo l' equazione

$$a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0;$$

prendo $r=2$, e resto b arbitraria. Le diverse quantità D saranno

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \frac{a_1}{a_0} \\
 D_2 &= \frac{a_2}{a_0} - \frac{a_0 b}{a_0^2} \\
 D_3 &= \frac{a_3}{a_0} - \frac{a_1 b}{a_0^2} \\
 D_4 &= \frac{a_4}{a_0} - \frac{a_2 b}{a_0^2} + \frac{a_0 b^2}{a_0^3} \\
 D_5 &= \frac{a_5}{a_0} - \frac{a_3 b}{a_0^2} + \frac{a_1 b^2}{a_0^3} \\
 D_6 &= -\frac{a_4 b}{a_0^2} + \frac{a_2 b^2}{a_0^3} - \frac{a_0 b^3}{a_0^4} \\
 D_7 &= -\frac{a_5 b}{a_0^2} + \frac{a_3 b^2}{a_0^3} - \frac{a_1 b^3}{a_0^4} \\
 D_8 &= \frac{a_4 b^2}{a_0^3} - \frac{a_2 b^3}{a_0^4} + \frac{a_0 b^4}{a_0^5} \\
 D_9 &= \frac{a_5 b^2}{a_0^3} - \frac{a_3 b^3}{a_0^4} + \frac{a_1 b^4}{a_0^5} \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

La formula (3) darà, per una radice dell'equazione proposta,

$$\begin{aligned}
 x_1 = & -\frac{1}{D_1} - \frac{D_2}{D_1^3} - 2 \frac{D_2^2}{D_1^5} - 5 \frac{D_2^3}{D_1^7} - 14 \frac{D_2^4}{D_1^9} - 42 \frac{D_2^5}{D_1^{11}} \text{ ec.} \\
 & + \frac{D_3}{D_1^4} + 5 \frac{D_2 D_3}{D_1^6} + 21 \frac{D_2^2 D_3}{D_1^8} + 84 \frac{D_2^3 D_3}{D_1^{10}} \text{ ec.} \\
 & - \frac{D_4}{D_1^5} - 6 \frac{D_2 D_4}{D_1^7} - 28 \frac{D_2^2 D_4}{D_1^9} \text{ ec.} \\
 & + \frac{D_5}{D_1^6} + 7 \frac{D_2 D_5}{D_1^8} \text{ ec.} \\
 & - 3 \frac{D_3^2}{D_1^7} - \frac{D_6}{D_1^7} \text{ ec.} \\
 & - 28 \frac{D_2 D_3^2}{D_1^9} \text{ ec.} \\
 & + 7 \frac{D_3 D_4}{D_1^8} \text{ ec.}
 \end{aligned}$$

Un'altra radice x_2 può ottenersi dalla formula (5) componendo prima le quantità

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{a_1}{a_5} \\ D_2 &= \frac{a_2}{a_5} - \frac{a_3 b}{a_5^2} \\ D_3 &= \frac{a_3}{a_5} - \frac{a_1 b}{a_5^2} \\ D_4 &= \frac{a_1}{a_5} - \frac{a_3 b}{a_5^2} + \frac{a_5 b^2}{a_5^3} \\ D_5 &= \frac{a_0}{a_5} - \frac{a_2 b}{a_5^2} + \frac{a_1 b^2}{a_5^3} \\ D_6 &= -\frac{a_1 b}{a_5^2} + \frac{a_3 b^2}{a_5^3} - \frac{a_5 b^3}{a_5^4} \\ D_7 &= -\frac{a_0 b}{a_5^2} + \frac{a_2 b^2}{a_5^3} - \frac{a_1 b^3}{a_5^4} \\ D_8 &= \frac{a_1 b^2}{a_5^3} - \frac{a_3 b^3}{a_5^4} + \frac{a_5 b^4}{a_5^5} \\ D_9 &= \frac{a_0 b^2}{a_5^3} - \frac{a_2 b^3}{a_5^4} + \frac{a_1 b^4}{a_5^5} \\ &\dots \end{aligned}$$

e poi mettendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_2} &= -\frac{1}{D_1} - \frac{D_2}{D_1^3} - 2 \frac{D_2^2}{D_1^5} - 5 \frac{D_3}{D_1^7} \text{ ec.} \\ &\quad + \frac{D_3}{D_1^4} + 5 \frac{D_2 D_3}{D_1^6} \text{ ec.} \\ &\quad - \frac{D_4}{D_1^5} \text{ ec.} \end{aligned}$$

10. — Supponiamo ancora l'equazione

$$x^5 + 2x^3 + x^2 + 10x + 1 = 0 ;$$

la formula (4) darà immediatamente

$$\begin{aligned}
 x_1 = & -\frac{1}{10} - \frac{1}{10^3} - \frac{2}{10^5} - \frac{5}{10^7} - \frac{14}{10^9} - \frac{42}{10^{11}} - \frac{132}{10^{13}} \text{ ec.} \\
 & + \frac{2}{10^4} + \frac{5.2}{10^6} + \frac{21.2}{10^8} + \frac{84.2}{10^{10}} + \frac{330.2}{10^{12}} \text{ ec.} \\
 & + \frac{1}{10^6} + \frac{7}{10^8} + \frac{36}{10^{10}} \text{ ec.} \\
 & - \frac{3.2^2}{10^7} - \frac{28.2^2}{10^9} - \frac{180.2^2}{10^{11}} \text{ ec.} \\
 & - \frac{8.2}{10^9} \text{ ec.} \\
 & + \frac{12.2^3}{10^{10}} \text{ ec.} \\
 = & -0,10081033 \dots
 \end{aligned}$$

MEMORIE

PER LE

SCIENZE NATURALI

PRESENTATE ALL' ACCADEMIA NELL' ANNO 1856

E DA ESSA APPROVATE.

DE QUIBUS DAM
NOVIS INSECTORUM GENERIBUS

DESCRIPTIS, ICONIBUSQUE ILLUSTRATIS.

A B

ACHILLE COSTA

Praeses, sodalesque clarissimi.

Cum jam benigno vultu anterior mea elucubratio disquisitiones in Crustacea Amphipoda continens a vobis, Viri doctrina praestantissimi, excepta fuisset, ita ut dignam quae in vestris actis aedatur illam judicavissetis, vobis et hoc Neapolitanæ Entomologiae fragmentum, quinque novorum generum naturalem historiam præbens, offerre putavi. Tum quod ab hac tantum clarissimorum virorum societate rectum de hisce rebus judicium expectari potest; tum quod eadem ac antea benevolentia hic parvus meorum studiorum fructus excipiat mihi sperare licet.

Primum horum generum in vastissimo Coleopterorum ordine ac Lycideorum familia, proximum generi *Omalisus* est; atque habitu antennarumque articulorum forma ab illo recedit. — Alterum ex Neuropteris in familia Phryganideorum ad genera *Lasiostoma* et *Pogonostoma* magis accedit; a quibus, uti et a coeteris illius familiae generibus, maris antennarum articuli primi ac palporum maxillarium forma et magnitudine valde differt. — Tertium in ordine Hymenopterorum medium locum inter tribum Chalcidiorum illamque Pteromalinarum tenet. Etenim, cum habitu illi generis *Torimus* quodammodo simile abdomineque ut in his terebra longa in foemina terminato, pedum po-

sticorum formam Chalcidiorum conjungit, qua praesertim generi *Cornura* Spin., cujus typica unicaque hucusque cognita species Brasiliam habitat, accedit. — Quartum ad Cicadariarum familiam in ordine Hymipterorum pertinet, ac generi *Caliseelis* Laport. primo intuitu ut ovum ovo simile. Attamen illa peculiaris pedum anticorum dilatatio, quae unum ex proecipuis ac essentialibus characteribus generis *Caliseelis* constituit, in nostro desideratur, in quo pedes antici teretes atque a mediis forma nullimode dissimiles. Ita ut etiam et affinior generi *Bruchomorpha* a Newman pro specie costarum fluminis Ohio in America incola condito, sicut infra dictum erit, videtur. — Ultimum denique genus Dipterorum est, atque in illa speciosa familia Hymenopterum continetur, in qua a generibus *Ogeodes* et *Acrocera* quibus magis affine, characteribus nonnullis essentialibus discrepat.

Nec mirum vobis futurum credo, viri clarissimi, quod in tanto per totum orbem perquirentium studio et editorum operum lumine novitates et nos vobis proferamus. Agri Neapolitani vastitas, insectorumque numerus ea sunt, ut multis adhuc annis assiduisque peregrinationibus egerent, ut entomata in hoc tegentia quodammodo nota dici possint. Quod praesertim de Hymenopteris dicendum, quae ab Entomologis qui nos praecesserunt neglecta fere omnino fuerunt: ita ut multae jam novae hujus ordinis species in nostra regni neapolitani entomologica collectione custodientur, quae, vobis faventibus, alterius elucubrationis vestro etiam judicio comprobandae argumentum erint.

Genus PHAEOPTERUS (1), A. Cost.

(Ordo Coleopterorum — Familia Lycideorum)

Characteres generis.

Caput detectum, infra minime protractum, fronte in medio impressa, ac utrinque in gibberem antenniferum elevata.

Antennae articulatae, articulis primis tribus magnitudine decreescentibus.

Pronotum utrinque linea longitudinali elevata, antice subtruncatum, angulis posticis acute productis.

Tarsi articulo quarto profunde bilobo.

(1) A graecis vocibus *φαος* fuscus, et *πτερον* ala,

*Descriptio generis.**Corpus* elongatum.

Caput delectum, parum declive, antice truncato-emarginatum, fronte longitudinaliter impresso-sulcata, sulco antice expanso, utrinque in gibberem antice divergentem elevata; gibbere quoque in extremitate antica tuberculo antennifero minuto distincto terminato. *Oculi* laterales hemisphaerici. *Os* inferum. *Mandibulae* breves, minutae, arcuatae, apice acutae. *Palpi* maxillares breves, articulo ultimo subovato; labiales minutissimi.

Antennae corporis dimidio parum longiores, validiusculae, articulo primo inflato, basi attenuato; secundo brevioris nodiforme, tertio minutissimo basi angustiore, subcyatiforme; quarto sequentibus parum longiore, nec non quinto sextoque elongato-obconicis, septimo, octavo, nono et decimo basi magis attenuatis, ac quasi brevissime petiolatis, ac inde magis obconicis, ultimo ovato-elongato, basi etiam minutissime petiolato.

Pronotum lateribus marginatum, utrinque linea elevata margini externo subparallela notatum, antice haud ampliatus; angulis posticis acute productis.

Scutellum minutum, latitudine longius, apice rotundatum.

Elytra elongata, abdomen paulo excedentia, lateribus haud ampliata, dorso punctato-striata.

Pedes mediocres. *Tarsi* articulo primo coeteris longiore, quarto brevi, profunde bilobo, lobis apice obtusis.

Generis affinitates.

Cum genere *Omalisus* major illius mox descripti affinitas patet; a quo tamen, praeter habitum diversum, antennarum articulo tertio secundo minori facile nostrum dignoscendum. Accedunt palpi maxillares breviores, mandibulae minutae, nec non ipsarum antennarum articuli omnes forma dissimiles.

PHAEOPTERUS UNICOLOR, A. Cost.

Fig. 1.^a

Ph. fuscus, unicolor, pubescens; pronoto sparse inaequaliter punctato, elytris fortius et regulariter punctato-striatis.

Longitudo lin. 1 6/10: lat. 1/2 lin.

Caput fere aeque longum ac latum, ante oculos angustatum, mar-

gine antico truncato-emarginatum, fronte utrinque elevata, inter gibberes declivi, in medio longitudinaliter sulcata, sulculo postice ad verticem evanescente; fuscum nitidum, parce et sparse punctulatum ac pubescens. Oculi nigri. Antennae fuscae, dense breviterque pubescentes.

Pronotum latitudine parum brevius, lateribus ante medium rotundatum, pone medium sinuatum, in margine antico leviter inverse arcuatum; margine postico medio truncato, tenuiter marginato, et cum lineis elevatis longitudinalibus angulum rectum formante, utrinque anguste emarginato, angulis productis divergentibus, subarcuatis: fuscum, nitidum, pubescens, inaequaliter sparse punctatum.

Scutellum nitidum, vix punctulatum.

Elytra latitudine quinquies longiora, subparallela, postice vix latiora, apice simul rotundata; dense et fortiter punctato-striata, punctorum striis circiter decem, parum obliquis; fusca nitida, pubescentia.

Pectus fuscum, nitidum, parce punctulatum et pubescens. Venter crebrius punctatus, densiusque pubescens.

Pedes fusci, pubescentes.

Lectus in agro neapolitano, vere, rarus.

Genus LASIOCEPHALA (1), A. Cost.

(Ordo Nevropteronum, Familia Phryganideorum)

Characteres generis.

Mas. *Palpi* maxillares biarticulati, articulo 1.^o brevissimo, 2.^o valde elongato, tereti, valde arcuato fere semicirculari, sursum flexo, longe piloso: labiales breviores, 3 - articulati, articulo 1.^o brevissimo, 2.^o et 3.^o subaequalibus.

Antennae setaceae, articulo primo longo, valido, elato, subcoriaceo, ante medium coarctato, longe hirtio, reliquis a sexto ad ultimum infra barbatis.

Foemina. *Palpi* maxillares longi graciles, 5-articulati, articulo 1.^o brevissimo, 2.^o, 3.^o et 4.^o subaequalibus, 5.^o longiori tenuiori acuminato; labiales breves, illis maris similes.

Antennae articulo 1.^o longo tereti recto, longe hirtio: reliquis nudis.

(1) A graecis vocibus λαιος pilosus et κεφαλή caput.

Alae in utroque sexu nervis transversis nullis. Tibiae quatuor posteriores 4-calcaratae.

Descriptio generis.

Habitus generum *Lasiostoma* et *Trichostoma*. Caput et mesonotum longe hirta, fronte in medio prominula, fasciculato-pilosa. Oculi laterales. Antennae basi distantes, oculis approximatae: articulo primo in mare quasi ab articulis duobus subcochleariformibus composito. Palpi maxillares in mare articuli primi antennarum dimidium attingentes. *Alae* anticae nervo costali a latere interno dense hispideque fimbriato (mas.), pubescente (foem.): posticae parum breviores, vix plicatae.

Generis affinitates.

Majores affinitates cum generibus *Pogonostoma* et *Lasiostoma* Ramb nec non cum *Trichostoma*, Latr. quaerendae. Ab omnibus tamen satis distinctum maris antennarum ac palporum maxillarium structura.

LASIOCEPHALA TAURUS, A. Cost.

Fig. 2.^a et 3.^a

L. corpore, alis, antennarum articulo primo palpisque brunneo-fuliginosis; antennarum flagello pedibusque fulvis (mas); *brunneo-fulva unicolor, nilida* (foem.).

Long. cum alis lin. 4-4½.

Frequens in locis humidis agri neapolitani.

Genus BACTYRISCHION (1), A. Cost.

(Ordo Hymenopterorum — Familia Pteromalideorum)

Characteres generis.

Antennae fractae, medio frontis insertae, 13-articulatae, flagello clavula solida oblonga fusiformi terminato.

Alae planae, anticae nervo submarginali, ramulum brevissimum emittente, nervulisque nonnullis oblitteratis notatae.

Pedes medii femoribus rectis, basi tenuioribus, ad apicem subclavatis: postici coxis magnis elongatis liberis, femoribus crassis, in margine inferiore seriatim denticulatis; tibiis arcuatis, apice oblique truncatis, in spinam validam productis, spina nulla mobili accedente.

(1) A graecis vocibus βαστυρις baculus et ιπχιον coxa.

Abdomen subsessile, compressum, terebra longa e ventre infra anum egrediente. — *Foemina*.

Mas invisus.

Descriptio generis.

Corpus gracile, elongatum, capite thoraceque punctulatis, abdomine laevissimo.

Antennae validiusculae, medio frontis insertae; 13-articulatae, articulo primo (radicula) brevi, filiformi; secundo (scapo) elongato, compressiusculo, nonnihil subarcuato, tertio (pedicello) obconico; reliquis decem flagellum formantibus, quorum primi septem cylindracei, arcte contigui, tres ultimi crassiores, arctius connexi, clavulam solidam oblongo-fusiformem efficientes.

Caput transversum, pronoto parum latius, fronte haud retusa. Oculi sat magni, laterales, ovato-rotundati. Ocelli tres in vertice prominenti, in triangulum, cujus angulus anterior obtusissimus, dispositi. Mandibulae minutae validae, apice subaeque latae, subtiliter tridentatae. Palpi maxillares articulo ultimo praecedentibus simul paululum longiore, elongato, subfusiformi, apice obtuso setis nonnullis terminato. Palpi labiales vix conspicui.

Thorax latitudine maxima plus duplo longior. Prothorax brevis, transversus, subrectangulus, antice truncatus. Mesothorax convexiusculus. Scutellum parum elevatum, semicirculare, margine postico crenulatum. Metathorax mesothorace paulo brevior, dorso rugoso-areolatus, lineisque duabus diagonalibus elevatis notatus. Pleurae suturis distinctis.

Abdomen thorace nonnihil brevius, subsessile, sive petiolo distincto nullo, compressum, a latere visum subtriangulare, ventris carinati causa: articulo primo basin versus conico-angustato, articulis ventralibus ultimis vomeriformibus. Terebra longa, exerta, e ventre infra anum progrediens, vagina bivalvi inclusa.

Alae planae, iridscentes: anticae nervo submarginali satis conspicuo, costae parallelo, ante medium alae costae accedente, et cum eadem conjuncto, apicem versus per longum spatium excurrente, ramulo stigmatico ultra medium alae angulo egrediente, brevissimo, apice incrassato atque subhamato; insuper nervis nonnullis oblitteratis, praesertim tribus longitudinalibus, alteroque transverso arcuato prope ha-

sim. Alae posticae nervo submarginali crasso, costae subparallelo, ad medium alae isti accedente, et mox costae subparallelo, ad medium alae isti accedente et mox costae conjuncto terminato.

Pedes antici simplices, coxis medioeribus, femoribus crassiusculis, tibiis spina apicali unica tenui acuta arcuata. Medii coxis crassiusculis, trochanteribus oblongis, conico-cylindraccis; femoribus rectis, basi attenuatis, apice parum incrassatis, subclavatis; tibiis spinis duabus apicalibus, altera brevissima, altera longiore tenui acuta recta. Postici coxis liberis validis, elongatis, femoribus paulo brevioribus, compressiusculis, dorso ad apicem dente compresso obtuso subadunco armatis; trochanteribus minutis angulalis; femoribus magnis, crassis, compressis, ovato-oblongis, in margine inferiore seriatim denticulatis; tibiis arcuatis, apice oblique truncatis, ac in spinam validam ultra tarsorum insertionem productis, spina nulla alia accedente.

Generis affinitates.

Habitu ac praesertim abdomine terebra longa praedito, antennarum situ, aliisque notis ad quasdam generis *Torimus* species maxime descriptum insectum accedit. Nimis tamen ab illis recedit pedum mediorum et posticorum forma; antennarum flagello 10-articulato, articulis tribus apicalibus clavulam solidam efficientibus, aliisque majoris minorisve momenti characteribus. Pedum autem posticorum femoribus incrassatis ac in margine infero seriatim denticulatis, tibiisque arcuatis, apice oblique truncatis, ultra tarsorum insertionem acute productis, spina nulla articulata praeditis ad Chalcides appropinquatur, magisque ad genus *Conura* Spin. (1) ejus typica et unica species (*Con. flavicans*) Brasiliam habitat. Abdominis tamen forma, ac terebra longa ejusdem, ne omnes enumeremus differentias, cum illo genere *Bactyrischion* nullimode confundendum. Nihilominus, cum pedum posticorum structura maximi momenti existimanda videatur, nostrum genus cum generibus *Leucospis*, *Chalcis*, *Conura* consociandum in subfamilia distincta existimamus, atque notis a pedibus posticis desumptis dignoscenda, praecipue femoribus incrassatis, margine saepius seriatim denticulatis, tibiis arenatis, apice oblique truncatis, ultra tarsorum apicem acute productis, spina nulla articulata accedente.

(1) Magasin de zoologie, 1837, p. 180, cl. IX. cum tabula annexa.

BACTYRISCHION BICOLORATUM, A. Cost.

Fig. 4.

B. capite thoraceque subtiliter et crebre punctatis, aeneo-viridibus, nitidis, abdomine laevissimo, nitidissimo aeneo-viridi, ventre et segmenti primi dorsalis limbo luteis; antennis pedibusque testaceis, illis clavula fusca, his coxis posticis apice excepto aeneo-viridibus.

Longit. corporis lin. 1 1/2; aculei lin. 2.

Antennae scapo verticem vix superant; flagello ac pedicello simul scapo plus duple longioribus: testaceae, brevissime pubescentes, pube obscuriore: clavula fusco-brunnea.

Caput subtiliter crebreque punctulatum, pilis brevibus parum confertis decumbentibus ornatum; fronte et hypostomate convexiusculis; aeneo-viride, nitidum, pilis albo-cinereis. Mandibulae testaceae, apice piceo. Palpi pallide testacei. Oculi rufotestacei.

Pronotum et mesonotum subtiliter et crebre punctata, ac lentis ope visa quasi tenuissime transversim rugosa. Scutellum parum elevatum, convexiusculum, punctura mesonoto simile, infra limbum posticum polilum punctato-crenulatum. Metanotum convexum, rugoso-reliculatum, lineis duabus elevatis simul a basis medio egredientibus, singulaeque ad angulum latero-posteriorem pergente. Pleurae subtilissime punctulatae, suturis laevibus distinctis. Mesosternum magnum, in margine postico late at parum profunde angulo obtusissimo emarginatum, subtilissime punctatum, linea media longitudinali impressa punctato-crenulata. Metasternum mesosterno multo brevius. Totus thorax pilis brevibus decumbentibus raris.

Abdomen thorace parum brevius, segmento primo dorsali basi foveola minuta notato; laevissimum ac nitidissimum, segmentis ultimis pilis brevibus raris decumbentibus. Terebra corpore quinta parte longiore, apice acuminata.

Femora postica in margine inferiore per tertium anticum inermia, dein denticulata, denticulis circiter decem, parum inaequalibus ac fere aequae distantibus. Tarsi antici tibia vix longiores; medii tibiae subaequales; postici tibia parum breviores: omnes filiformes, articulis longitudine decreescentibus.

Caput et totus thorax, ac abdomen aeneo-viridia, pube cinerea, ventris segmenti primi limbo luteo testaceo. Pedes testacei, coxis posticis, apice excepto, aeneo-viridibus, femorum posticorum denticulis nigricantibus.

Lectum prope Neapolim, in collis camaldulensis sylvis, aestate 1852 rarissimum.

Genus HOMOCNEMIA (1), A. Cost.

(Ordo Hemipterorum = Familia Issorum)

Characteres generis.

Frons verticalis, cum vertice horizontali angulum rectum formans; in foemina convexiuscula.

Antennae triarticulatae, articulo tertio in praecedentis scissura inserto, et seta longa terminato.

Ocelli haud conspicui.

Elytra breviora, abdominis primum segmentum haud vel vix excedentia, postice truncata; areolis nullis; nervo unico subcubitali 2; nervo interno suturali, ac duobus externis ad humeros conniventibus.

Pedes antici teretes, mediis similes.

Descriptio generis.

Corpus robustum, in mare brevius, bufonis fere formam simulans; in foemina magis oblongum.

Caput breve, protuberantia frontali nulla: vertex transversus subhorizontalis, marginibus lateralibus, anticeque trisinuato elevatis acutis; disco concaviusculo. Frons in mare in parte superiore subperpendicularis, angulum fere rectum cum vertice efficiens, plana, marginibus lateralibus seu orbitalibus carinatis, carinisque duabus mediis in areas tres partita, quarum media subquadrata, laterales angustiores, longitudine latitudinem duplo superante; in parte inferiore convexo-gibba, laevi: in foemina tota convexa, quinque-carinata, carina media recta, lateralibus arcuatis infra convergentibus. Genae laterales, angustae, cum fronte angulum fere rectum formantes.

Oculi reticulati magni laterales, ovato-oblongi, sublongitudinales,

(1) A graecis vocibus ὁμος similis, et κνήμη tibia, femur.

postice humeros usque fere producti, pronotique latera amplexentes. Ocelli incospicui.

Antennae sub oculis insertae, triarticlatae, articulo primo brevissimo, secundo majori, supra ante apicem oblique emarginato-excavato, apice obtuso; tertio minuto in praecedentis excavatione inserto, illius apicem haud superante, atque setam longam gracilem gerente.

Clypeus a frontis margine infero sulculo transverso sejunctus, a fronte haud amplexus, valde convexus; obtuse subcarinatus (mas), carinula dorsali distincta (fem).

Rostrum pedum anticorum basim haud excedens.

Pronotum transversum, latitudine dimidio brevius, marginibus antico posticoque subparallelis, leviter arcuatis; lateralibus obliquis. Latera inflexa infra oblique ultra antennarum insertionem producta, basi angustiora, ad apicem ampliata-rotundata. Mesonotum triangulare, lateribus basi paullo brevioribus.

Abdomen breve; dorso longitudinaliter obtuse elevatum, ventreque fere plano (mas), dorso parum convexum, ventre gibbo (fem.).

Elytra abdominis segmentum primum haud vel vix superantia, postice oblique truncata, angulo exteriori rotundata, opaca; (mas) nervo unico subcubitali a basi ultra medium costaeformi ac margini externo parallelo, inde minus acuto ad angulum postero-interiorem vergente (1); (fem.) nervis tribus longitudinalibus, interno magis elevato suturae parallelo, externis ad humeros conniventibus.

Pedes validi: quatuor anteriores similes; postici longiores, femoribus apice recte truncatis, angulo postico subdentiformi; tibiis spina unica marginali et duabus apicalibus praeditis, tarsis articulo primo valido, sequentibus duobus simul longiore, secundo brevi bilobo, lobis acutis spiniformibus, tertio tereti.

Generis affinitates.

Descriptum genus maximam cum genere *Caliseelis* Lap. naturalem affinitatem praebet; ita ut paucis minoris momenti notis ademptis, ab illo pedibus anticis minime clatis, neque a mediis dissimilibus tantummodo discrepat.

(1) In quibusdam individuis nervum subcubitalem paulo post originem ramulum obliquum in margine antico terminatum emittere clare patet.

Clarissimus Spinola in Tentamine de Fulgurideis (1) generis *Bruchomorpha* a Newmann pro Fulgurideo costarum fluminis Ohio incola conditi (2) mentionem facit; animadvertitque proximum generi *Catiseelis* ac forsitan ab illo pedibus anticis non dilatatis essentialiter differre illud sibi videri. Quo in casu et a nobis descriptum insectum cum *Bruchomorpha* consociari poterit. Cum tamen variis notis Newmanni descriptio careat, ipse laudatissimus auctor sententiam proferre nullam voluit, nec de duorum generum affinitate, nec de familia ad quam genus *Bruchomorpha* adscribendum esset. Quare et nos adhuc sub iudice quaestionem relinquendam putamus.

HOMOCNEMIA ALBOVITTATA. A. Cost.

Fig. 5.^a et 6.^a

H. Mas. nigra, frontis parte superiore verticisque margine antico fulvis, pronoti dorso et lateribus inflexis, mesonoti macula apicali rhombea, elytrorum vitta obliqua abdominisque segmento primo albo-lacteis. — Long. lin. 1: lat. $\frac{1}{120}$ lin.

Foem. pallido-lutescens, dorso vitta media virescenti, vittisque quatuor nigris; duabus internis in elytris duplicatis. — Long. lin. $\frac{2}{13}$: lat. $\frac{1}{15}$.

Variat (mas) vertice fulvo margine postico lateribusque tantum nigris; mesonoti macula rhombea in lineolam marginem anticum attingentem continuata.

Mas.

Corpus nigrum subnitidum.

Caput verticis margine antico, frontis parte superiore, maculisque quatuor punctiformis in clypei margine basali fulvis; frontis marginibus lateralibus fulvo-fuscoque articulatis. Oculi nigro-brunnei. Antennae obscure brunneae.

Pronotum dorso lateribusque inflexis albo-lacteis. Mesonotum nigrum, macula rhombea apicali, quandoque ad basim usque lineari producta, lactea.

Elytra rhombea, latitudine haud vel vix longiora, angulo hu-

(1) Essai sur les Fulgorelles; Ann. de la Soc. Entom. de Fr. VIII, p. 376.

(2) In the Entomological Magazin, V, p. 399.

merali obliquo obtuso, sutura postice parum elevata, supra nervum subcubitalem concaviuscula; superficie subtiliter rugoso-subreticulata; nigra subnitida, vitta obliqua ab angulo humerali ad angulum posticum internum, quem non attingit, ducta, lactea.

Abdomen segmento primo dorsali lacteo immaculato; primo ventrali lacteo sparse nigro punctato.

Pedes nigro-picei, breviter pubescentes, coxis posticis validis conico-truncatis, postice albidis.

Foemina.

Caput verticis margine antici sinubus lateralibus medio transverso longioribus; frontis carina media tenui, in clypeum continuata; lutescens, verticis lunulis duabus nigris, frontis carina media pallide virescenti, vittis quatuor nigris, duabus internis majoribus in clypeum continuatis; genis macula magna nigra infra antennas.

Pronotum medio laeve, linea longitudinali elevata, lateribus punctulatum; vitta media virescenti, utrinque vitta nigra, lateribus lutescentibus. Mesonotum disco laeve, lineis tribus longitudinalibus elevatis; lateribus punctulatum, uti pronotum pictum, angulis humeralibus nigris.

Elytra ad suturam haud elevata, in margine externo leviter sinuosa, nervo interno suturae parallelo, a basi ad marginem posticum integro; interstitiis punctulatis: sutura pallide-virescenti, externe lutescentia vittis tribus nigris, duabus internis approximatis, a nervo interno pallido unice sejunctis, externa longiore.

Abdomen dorso pallide virescens, vittis quatuor nigris. Pectus et venter pallide viridi-lutescentia, lateribus fusco maculato-vittata.

Pedes lutescentes, immaculati.

Species nimis elegans, a fratre nostro D.^o Josepho Costa in Salento detecta, ac nobis communicata. Foemina mare rarior.

Genus OPSEBIUS (1), A. Cost.

(Ordo Dipterorum—Família Menopidum)

Characteres generis.

Proboscis fere nulla.

Antennae vertici insertae, biarticulatae, setaeque longa apicali terminatae.

Oculi sub antennarum basi longe contigui, dense villosi.

Ocelli duo satis conspicui.

Pronoti lobi laterales distantes.

Descriptio generis.

Caput minutum, hemisphaericum. *Oculi* magni, margine interno contigui, capitis fere totam partem anticam occupantes, triangulum minutum in vertice, alterumque oralem relinquentes; toti dense villosi.

Antennae vertici insertae, basi contiguae, minutae, biarticulatae, articulo primo breviori nodiformi, secundo longiori fusiformi, seta apicali biarticulata terminato, setae articulo primo antenna ipsa fere triplo longiore, validiusculo, filiformi, subareuato; secundo gracillimo, primo sexies brevior.

Ocelli duo in vertice, pone antennarum basim, prominuli.

Proboscis externa nulla, lobis duobus in ipsa oris cavitate contractis constituta.

Thorax valde gibbus, subsphaeroides; pronoti lobis lateralibus inter se distantibus. Scutellum transversum postice rotundatum.

Abdomen vesciculosum, subdiaphanum, fere cubicum, parum latius quam longum.

Pedes graciles. Tibiae omnes apice inermes. Tarsi 5-articulati, articulis primo et ultimo longioribus, tribus mediis brevibus, subaequalibus, quinto tri-pulvinato.

Alae abdomen superantes, nervis pluribus longitudinalibus, nervisque transversis longitudinales fere omnes conjungentibus; cellulis posterioribus quinque.

Generis affinitates.

Primo intuitu facile cum generis *Ogcodes* speciebus consocianda

(1) A graecis vocibus $\omega\delta$ visus, et $\pi\beta\eta$ pubes; ob oculorum pubescentiam.

hacc nostra videtur. Attamen antennis vertici insertis oculisque villosis maxime differt. Idem cum genere *Aerocera* maximam praebet affinitatem; cum quo tamen oculis villosis ocellisque tantum duobus hand confundendum.

OPSEBIUS PERSPICILLATUS, A. Cost.

Fig. 7.^a

O. niger, pronoti lobis lateralibus, mesonoti maculis tribus utrinque, abdominis basis lateribus punctisque dorsalibus dupliei serie, ventre pedibusque pallidis; aliis brunneo-fuliginosis, stigmate obscuriore.

Long. lin. 2. lat. abd. lin. $1\frac{1}{2}$.

Antennae articulo primo fusco, secundo piceo-testaceo.

Caput nigrum, nigro-cinereoque postice pubescens.

Oculi nigri, nigro-villosi.

Thorax confertim et subtiliter punctulatus, pube erecta fusco cinereoque mixta vestitus; niger nitidus, pronoti lobis lateralibus, mesonoti maculis sex, tribus utrinque, prima supra ipsos pronoti lobos laterales, secunda supra alarum radicem, tertia ad scutelli angulum lateralem, callos mesonoti occupante, pallide flavis.

Abdomen dorso nigrum, segmenti primi margine postico in medio interrupto, secundi lateribus punctisque duobus dorsalibus in margine postico, tertii quarti et quinti punctis duobus dorsalibus margini postico contiguus et ab ipsius marginis limbo tenui conjunctis albidis; sexto albido, macula media bascos maculisque lateralibus nigris; septimo nigro albido variegato: totum abdomen nigro in nigredine, albido in albedine dense pubescens. Venter albidus immaculatus.

Pedes pallidi, femoribus medio paullulum obscurioribus.

Alae fusco fuliginosae, stigmate obscuriore. Squama hyalina: haeteres testacci, capitulo laeico.

Pedes albid.

Rarissimus in regione Samnitica. Unicum specimen prope vetustam urbem *Morganthia*, nunc *Baselice* nuncupatam, leximus mense Junii 1854, circum querebus quibusdam volitans.

ICONUM EXPLICATIO

Fig. 1.^a Phaeopterus unicolor.

a longitudo naturalis — *A* insectum auctum — *B* caput a dorso visum cum antenna — *C* pronotum — *D* tarsus pedum posteriorum.

Fig. 2.^a Lasiocephala taurus : mas.

a longitudo naturalis — *A* insectum auctum a latere visum — *B* caput a latere visum cum antennarum parte, palpisque maxillaribus et labialibus — *C* caput a dorso visum — *D* abdominis segmentum ultimum cum cercis abdominalibus.

Fig. 3.^a Lasiocephala taurus : fem.

a longitudo naturalis — *A* insectum auctum a latere visum — *B* caput a latere visum cum antennarum parte, palpisque maxillaribus et labialibus.

Fig. 4.^a Bactyrischion bicoloratum (fem.).

a longitudo naturalis — *A* insectum auctum — *B* caput a latere visum cum antenna — *C* venter a latere visus cum terebrae origine — *D* Pes medius — *E* Pes posticus.

Fig. 5.^a Homocnemia albovittata : mas.

a longitudo naturalis — *A* insectum auctum a dorso visum — *B* idem a latere visum — *C* caput a fronte visum — *D* antenna.

Fig. 6.^a Homocnemia albovittata : fem.

a longitudo naturalis — *A* insectum auctum a dorso visum — *B* caput a fronte visum — *C* idem a latere visum.

Fig. 7.^a Opsebius perspicillatus.

a longitudo naturalis — *A* insectum auctum a dorso visum — *B* idem visum a latere — *C* caput a fronte visum — *D* antenna.

SU DI UN NUOVO GENERE DI PESCE FOSSILE

MEMORIA

DEL SOCIO ORDINARIO

O. G. COSTA

Nelle due prime parti della Palcontologia del regno di già venute in luce abbiamo riportato sette specie di pesci fossili quasi completamente descritte, e spettanti alla calcarea di Pietraroja (1). Alle quali poi si aggiungono quelle fondate sopra parti più o meno caratteristiche (2); ed un gran numero di frammenti, che, per la loro organica struttura, accennano evidentemente a specie ben distinte e di generi diversi e sconosciuti.

(1) Le specie quasi complete sono le seguenti

Sauropsidium laevissimum, Cos.
Megastoma apenninum, Cos.
Sarginites pygmaeus, Cos.
Histiurus elatus, Cos.
Pycnodus grandis, Cos.
Belonostomus crassirostris, Cos.
Notagodus Pentlandi, Agas.
Blenniomoeus major, Cos.

(2) Tali sono il

Lepidatus Maximiliani, Ag.
. . . *gigas*, Ag.
Pycnodus Achillis, Cos.
Lepidotus minor, Ag.

Glossodus (Pycnodus, Ag.) *angustatus*, Cos.

Belonostomus gracilis, Cos.
Sphaerodus depressus, Ag.
. . . *Lens*, Ag.
Carcharodon, Ag.
Calignatus, Cos.
Pachyodon, Cos.

Si aggiungono a questi i seguenti altri, in parte già pubblicati nella Ittiologia fossile Italiana (prima a terza dispensa) ed in parte sotto i torchi pel compimento della Palenteologia del regno, e parte 3^a. della medesima opera.

Ionoscopus Petraroeae, Cos.

In pari tempo gli scavi successivi di quella medesima roccia mi somministravano ittioliti di straordinaria grandezza, taluno de' quali completo, come l' *Ionoseopus Petrarojae*, Cos., altri incompleti, e moltissimi monconi e parti staccate, che come i precedenti additavano colà l'esistenza di genie sconosciute, almeno per quella località. Tutte però di tale importanza, sia per la scienza e sia per la patria Paleontologia, che m' impegnarono a raddoppiare i miei sforzi onde pervenire allo scoprimento plausibile delle specie, alle quali come loro parti organiche o come corpi mutilati appartengono.

Uno soprattutto m' incitava non sostare, perchè, misurando piedi due parigini, e non mancando che del capo per compierne la diagnosi, meritava sotto tutti i rapporti essere completamente conosciuto. Per la qual cosa non appena la stagione il permise mi recai a Pietraraja, ed aprendo uno scavo ben più ampio de' precedenti, ed approfondatolo per quanto le mie forze lo comportavano, pervenni finalmente a discuoprire un pesce di grande dimensione, che non essendo il primo, è però di quello maggiore, ed in quasi ogni parte completo. Solo il rostro è talmente nella roccia incastonato, che non mi è permesso ben vederne la forma nè l'armatura dentaria — Eccone la descrizione.

Genere *Cacus*, Cos.

Le più strette affinità del pesce, che ci serve di tipo pel presente genere sono con quelli del genere *Caturus* e *Pachycormus* fondati dall' Agassiz. Come quelli il nostro *Cacus* à forma simigliantissima a quella de' generi attuali della famiglia degli *sparoidei* e de' *elupeidei*.

Lo stringono massimamente ai Caturi la grande pinna codale, profondamente scissa o smarginata, e quasi equiloba; la dorsale posta a rincontro delle ventrali, e la posizione e grandezza delle altre, quantunque in ragione delle dimensioni del corpo dir si possono molto più piccole. La codale nondimeno manca di quella frangia che adorna lo esterno del raggio primario de' Caturi, ed in ciò conviene con quella degli affinissimi Pachicormi. Dall' uno come dall' altro poi la distingue la presenza di aculeo robusto posto dietro i fulcri basilari del lobo inferiore, analogo, ma non identico, a quello de' nostri *Saurossidi*.

La pinna dorsale è meno allungata o ritondata; l'anale brevissima; le ventrali piccole, e più piccole ancora le pettorali, tutte in rapporto a quelle che si vogliono proprie de' due summentovati generi.

La colonna spinale si compone di vertebre il cui corpo è grosso, e men lungo che largo; quelle della regione codale ànno la lunghezza alquanto maggiore del diametro. Le apofisi verticali sono inarcate ed inclinate verso dietro, ma molto meno che nei Caturi e Pachicormi; nè gli assetti interapofisiarii sono come in quelli robusti. Le costole sono piuttosto gracili e lunghe.

Quello che sopra tutto distingue il nostro genere dai Caturi e Pachicormi è il rivestimento cutaneo, il quale si fa di squame romboïdali sì, ma grandi, molto rilevate, ed a superficie scabrosa; mentre ne' due generi affini queste sono piccolissime, e talvolta impercettibili.

È dolente il non poter dire alcuna cosa del sistema dentario, perciocchè nell'unico esemplare che ora possediamo, il capo si trova immerso nella roccia, e la sua parte rostrale infranta ed occultata.

Lo insieme de' caratteri però, ed i stretti rapporti coi due generi *Caturus* e *Pachicormus* ci autorizzano riporlo nella Famiglia de *Sauroides*, e nella loro divisione degli omocerchi.

Cacus, Cos. (1)

Capo. Per quel che mostrano alcuni ossetti del rostro, i quali abbiamo scoperti sottostanti alla grande zona rilevata che quasi da ogni parte lo cinge, formata da uno strato calcare durissimo, misura tre fiate la lunghezza del corpo, eccettuata la sola pinna codale. Gli opercoli sono lisci, semplici, ed a margine ritondato. La parte occipitale è coperta di squame. Il dippiù è indefinibile per le ragioni indicate di sopra.

Il *corpo* apparisce assai largo e ventricosso, ma ciò deriva dallo stiacciamento sofferto, per lo che, tanto dal lato dorsale che dal ventrale trovasi slargato, come lo dimostra il profilo designato dalla inserzione della pinna dorsale e delle ventrali. Laonde la vera sagoma non è quella indicata dai lembi della figura, dai quali conviene sottrarre la espansione forzata.

Esso è rivestito, come si è detto da squame proprie de' Ganoidei, la cui figura apparente è romboidale per effetto delle reciproche intersezioni de' loro lembi derivante dallo embricciamento. La loro superficie è scabrossetta per molti punti impressi, talvolta un poco rugosa, ma sem-

(1) La tavola è stata ridotta dall'originale fatte incidere dall'autore a grandezza naturale.

pre sul margine esterno con un sensibilissimo risalto, ciò che le fa meglio rilevare sul corpo.

La loro grandezza è tale, che nello spazio quadrato di un pollice se ne contano 20 a 24 nella regione addominale ove sono più larghe, e 40 a 45 delle minori che si trovano presso la regione cefalica.

L' unica *pinna dorsale* è posta nel mezzo preciso della lunghezza del corpo, misurando dalla estremità del rostro al termine della pinna codale; si compone di 9 raggi molto ramificati, preceduti da tre raggi semplici o indivisi e brevissimi; la sua altezza uguaglia quasi la larghezza, ed entra 2 fiate nell' altezza del corpo; il suo margine è ritondato.

Le *ventrali* corrispondono per la loro inserzione esattamente al margine posteriore della dorsale. Esse sono piccole, anguste, e composte di sei raggi ramosi, ed uno semplice posto dal lato interno, aculeato come quei piccoli della dorsale. Sono attaccate ad un osso innominato ben lungo anteriormente acuminato, troncato nella parte posteriore con la quale i raggi della pinna si attaccano ed articolano, come all' ordinario.

L' *anale* è molto prossima alla codale, dalla quale dista assai meno che dalle ventrali: è molto piccola, ritondata, e composta di 5 a 6 raggi molto ramificati, e preceduti da tre piccoli e semplici. La sua lunghezza pareggia la metà di quella della dorsale.

Le *pettorali* sono assai piccole e ritondate; si compongono di un piccolo numero di raggi, per quel che lascia vedere la loro impronta, la quale è un poco incompleta, nè molto distinta.

L' osso omerale però al quale sono attaccate è molto robusto e di forma quasi piramidale.

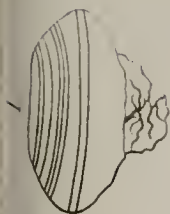
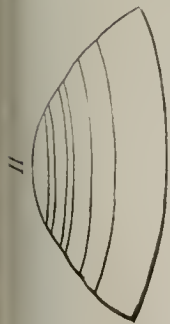
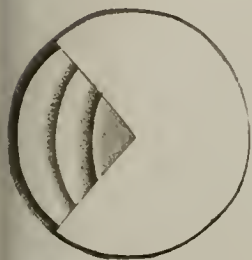
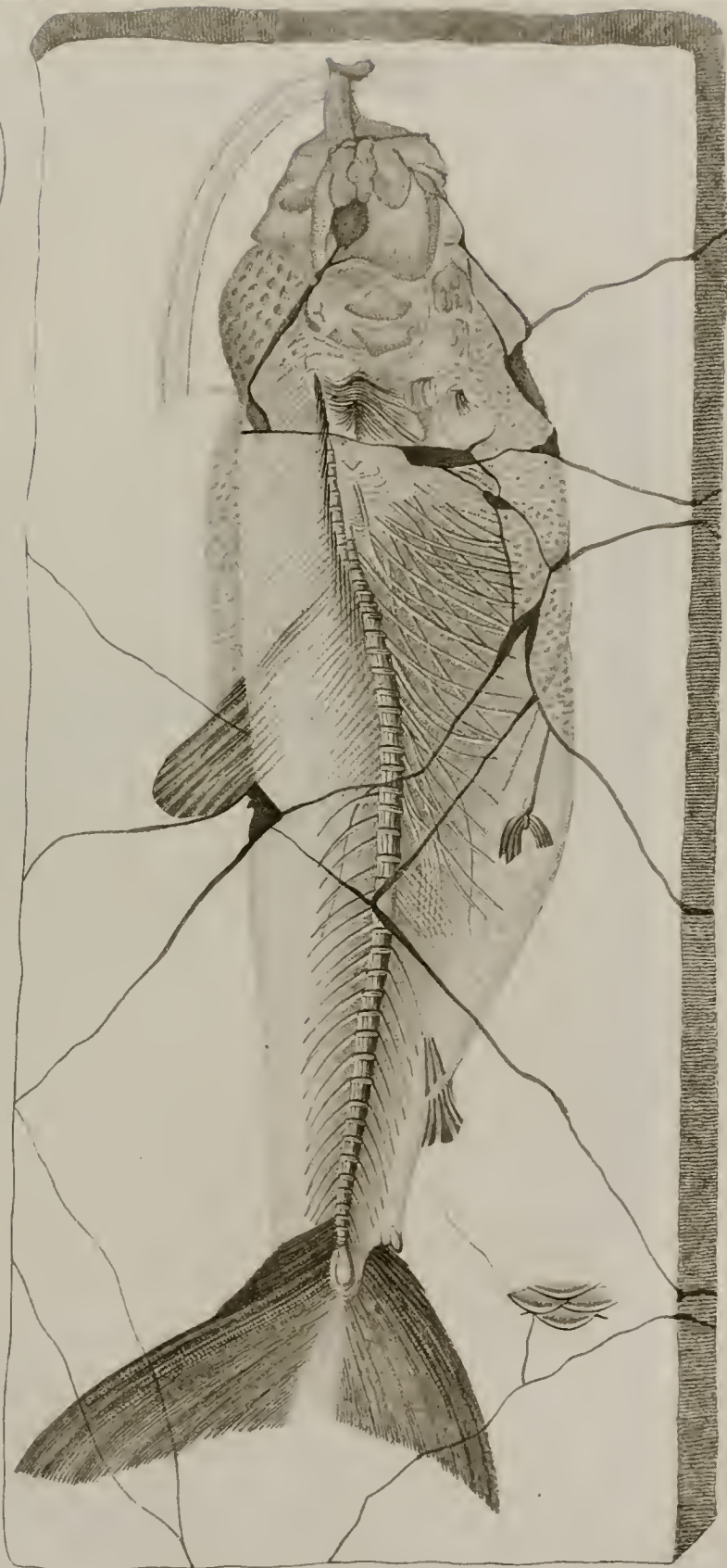
La *pinna codale* è proporzionalmente assai grande, forcata, o profondamente smarginata. Quantunque eterocerca, la disparità de' due lobi non è tanto sensibile, essendo il superiore di 1/7 soltanto più lungo dell' inferiore: e sole 4 vertebre distinte gli appartengono esclusivamente, al lato inferiore delle quali si attaccano i raggi dell' altro lobo per lo intermedio di assetti ben distinti e robusti. La pinna si compone di 8 raggi nel lobo superiore, i quali si ramificano ben quattro fiate; e più ancora gl' interni, che sono più corti, ma più delicati com' è naturale.

Il lobo inferiore ne à altrettanti simili a quei del superiore; non avendo il raggio esterno o primario tanto dell' uno quanto dell' altro fragia alcuna (fuleri, Ag.) allo esterno; sono però molto validi; il superiore è preceduto da 8 raggi indivisi, corti, robusti articolati ed aculeati, in cima gradatamente decrescenti, costituendo essi i fuleri veri del peduncolo codale. In simil guisa è guernito l' inferiore, ma i fuleri son preceduti da un valido e corto aculeo, ottuso e quasi ramoso in cima; ed in ciò conviene coi *Sauropsidii*.

La *colonna vertebrale* si compone di 47 vertebre, il di cui corpo à un diametro maggiore dell' asse, proporzione tanto più sensibile per quanto più si accostano alle cervicali, nelle quali si trova come 2 a 3; il perimetro delle loro facce articolari è sormontato da un grosso risalto che ne rende più sensibile la restrizione mediana; longitudinalmente poi sono marcate da profonde scanalature al n. di 8 — Delle vertebre ne appartengono 3 alla cervice molto tra loro riunite, 30 al cavo addominale, e 14 alla coda. D' onde risulta che il cavo addominale è molto lungo, e le catope sono mesogastriche. Le apofisi verticali sono lunghe e valide; quelle però che corrispondono alla pinna toracica sono maggiormente lunghe ed inversamente più gracili. Le apofisi trasversali sono mezzanamente lunghe e dilatate. Prestano esse appoggio a lunghe e valide costole, le quali però non raggiungono la linea media addominale, e quindi non si connettono tra loro. V' à inoltre una serie di spine lunghe e molto più gracili da ciascun lato, e tanto sopra che sotto, le quali sono attaccate alle faccette anteriori delle scanalature del corpo delle vertebre; come ciò trovasi in tutta la famiglia delle *Edupe*.

La *Corazza* è stato già detto esser costituita da squame romboidali (1), ben rilevate e specialmente per un risalto archeggiato, prossimo al margine esterno; la superficie è scabrosa per effetto di molti punti impressi, onde lo smalto non è ben sensibile alla vista. La loro grandezza è tale che in uno spazio quadrato di un pollice se ne contano 25; quindi molte sono le serie longitudinali e trasversali. Tutto questo però abbiamo potuto rilevarlo dai pochi punti che ne sono normalmente coperti. Noteremo però intorno a questo che la parte o regione occipitale sembra essere molto innanzi coperta di squama.

(1) Tali però si mostrano per lo intersecamento de' margini, ma in realtà hanno un contorno curvilineo.



M E M O R I E

P E R L E

S C I E N Z E M O R A L I

P R E S E N T A T E A L L' A C C A D E M I A N E L L' A N N O 1 8 5 6

E D A E S S A A P P R O V A T E .



COME IL VERO O IL FALSO INDIRIZZO
DELLE SCIENZE METAFISICHE

INFLUISCA SU GLI STUDI DEL DIRITTO

DISSERTAZIONI ACCADEMICHE

DEL SOCIO ORDINARIO

CAV. NICCOLA ROCCO

DISSERTAZIONE PRIMA

PER QUAL' INTIMA ED ARCA NA RAGIONE LE SCIENZE METAFISICHE SIEN DESTINATE A REGGERE E GOVERNARE TUTTO IL RESTO DELLO SCIBILE. E COME IL PRIMO VERO DELLA METAFISICA SIA IL PRIMO VERO DEL GIURE.

Può parerne, per avventura, istrana cosa, che, in una stagione, com'è la nostra, la quale ha sì a cuore la scienza del giure, addivenuta oggidì poco men che la vocazion del secolo, si vada muovendo lamentanze intorno al peggior metodo degli studi di quello, e fin circa al conoscimento del primo principio che debbe informarlo, or quindi or quindi aberrato. E mentrechè, nella scuola e nel foro, si stupisce il civil progresso del giure, e le nobili teoriche venute su, e i belli scompartimenti asseguiti, e alla rigidezza e severità sostituita la equa ragione, e il vero fontalmente svellere il di troppo usurpato imperio del certo delle leggi, e le pratiche e sociali applicazioni, senza alcun divario di personalità, felicemente temprate sul conio del buono e del giusto; in mezzo a tutte queste racquistate utilità, esserne poi inerescioso, a segno di girne dolorando nientemen che la smarrita primiera origine di tutto ciò che fa così vaga e piacente comparita. E certo che doppiem le meraviglie, se pognam mente agli stessi accurati studi, e alle faticose investigazioni che di continuo si van facendo intorno a quella parte dello scibile, la qual suolsi dinotare del pomposo nome di filosofia del dritto; intantochè a chi sottilmente indaga ne incontri di vedere a ritroso degli altri, cioè che mai, quanto al di d'oggi, non sia stata quella così in basso, e si disperi di

raggiungerla quanto più si crede d'essere profundato in lei. Intravvenendo, senz'addarsi, a' cultori della scienza, non altramente che all'uom della favola, il qual si discostava dal suo desio quanto più si pensava di vicinarlo. E però, tra una svariente maniera di sistemi, ravvisiamo il diritto, senza alcun fermo puntello, tentennare dove pur maggior dovria essere la stabilità sua. Alle quali cose riflettendo, ho voluto per un poco andar meco stesso ruminando la ragion di questo perverso destinato della scienza, in un'età in cui avrebb'ella per certo dovuto tutt'altro impromettersi, che ismarrir il principio onde muove, e disconoscere l'origin sua, e in mezzo a sì grande parentevole congiunzione con le altre branche dello scibile, restarne come inconsapevole dell'istesso suo nascimento. E in cotal ricerca essendomi alquanto innanti sospinto con la mente, ho fatto buon senno di non altrove soffermar il guardo che in su la cima stessa del sapere umano, onde attingonsi quegli elementi primigenii delle nostre conoscenze, e i primi intelligibili delle cose s'apprendono, val quanto a dire gli studi metafisici. Il cui indirizzo è al presente così falsato e bugiardo, che quando poc' anzi procedendo per le sensate vie non s'avveniva ad altro afferrar che la corpolenta materie, poseia si campando in su le opposte regioni dello spirito, con la dottrina dell'esplicazion dinamica di continuo progrediente di una sustanza identica, complessiva dell'infinito e del finito, del necessario e del contingente, dello spirito e della materie, dell'idea e del fatto, del sovrannaturale e del naturale, del sovraintelligibile e dell'intelligibile, di Dio e del Cosmo, è venuto a capo di un altro sistema, sol in apparenza avversante al primo. Chè se il sensismo filosofico è perdurato infino allo scorcio del secol che ci precede, e ancor oltra, occupandovi tanto di mondo, e sì gravi influssi dispiegando in sul destino delle cose sociali. Il panteismo, che l'ha esautorato, co'suoi filosofemi ha di già ingombra tutta quanta la metà del secolo che traccorre. Nella quale dualità di sistematici errori par che la umanità sia ab antico dannata di correre e ricorrere, allorchè l'è accaduto di perder di vista il primo vero filosofico. Perchè ci siam proposti di venirne quì, signori accademici, dimostrando, innanzi a voi, qual fosse il ligame che veramente s'intrametta fra le metafisiche discipline e le giuridiche, e di qual guisa, e infino a che punto, il reo e pravo insegnamento del-

l'una sia per traporar seco l'andazzo delle altre, per conchiuderne poi queste due gran verità, come postulati di tutte le nostre investigazioni. 1.° Che il filosofismo panteistico e il sensistico fuorviino al pari il primo principio del giure, e poi ne infestino altresì gli studi pratici e concreti del giure medesimo. 2.° Che disutili saranno i conati pel ristauero della parte razionale del dritto, se alla base di lei non si ponga il primo vero filosofico sperduto dalle scienze metafisiche.

Assai volentieri facciamo ragione, che non ci cada il bisogno di andar pretesendo molti e intralciati ragionari per inferirne come il panteismo al presente costituisca la dottrina signoreggiante nelle scienze metafisiche, e che o sotto il colore del metodo psicologico, o fosse ancora sotto l'altro più epurato dell'ontologia, o col nome di razionalismo, ovver di criticismo, o di eclettismo, s'asconda, dove più dove meno, in tutta quanta l'attuale scuola filosofica dell'Allemagna e della Francia. S'era già nell'età di mezzo tentato da' Gnostici e da' Neoplatonici disepellir le vetuste teoriche dell'emanatismo orientale, e della scuola eleatica, e poi dal napoletano Giordano Bruno riprodotto il panteismo mantellato di novel sembiante, e quindi ricomposto a forma scientifica dall'ebreo Spinoza; ciò nulla ostante cotali viete e disotterrate dottrine non tanto valsero allora che si fosser di leggieri potuto trasformar in iscuola. A quel tempo fè, senza dubbio, riparo agli sforzi del filosofismo panteistico l'altra scuola metafisica fondata da Renato Cartesio, esplicata poscia dal padre Malebranchio con una purezza di spiritualismo soprammodo esquisita, e di cui suonò per tutta Europa sì alto grido che tostamente primeggiò sovra tutte le altre. Se non che, un altro grand'uomo, il quale in Inghilterra camminando per insolite vie s'era studiosamente ingegnato d'isvolger la genealogia del pensiero umano, fu poco appresso cagione della gran mutazione succeduta nelle metafisiche discipline. La filosofia della sensazione che avea già, in Francia, principiato ad attecchir nella scuola di Gassendi, subitamente infestò delle sue grette teoriche un secol leggèro e sensuale, e lo spiritualismo perdendo la sua maggioranza fu rimpiazzato dalla sensistica. E Giovanni Lock, illustrato e arricchito di nuove osservazioni da Condillac, e anche più innanti sospinto da' principi sfolgorati da Tracy, tolse tutt'affatto di mano a' Cartesiani lo scettro delle metafisiche speculazioni. Ma Kant, an-

tesignano del movimento intellettuale della moderna Germania, tramezzante fra le ributtevoli enormezze di un sistema filosofico onninamente sensuale, ch'egli felicemente riuscì ad isbarbar dalla sua radice, e gli errori che da lui medesimo non antiveduti germinar doveano dalla scuola critica, figura ad un' ora come il destruttur di una filosofia assurda, e l' fondatore di un' altra che dovea anch' essa isdruciolar nel falso. La dualità del professore di Koenigsberg, cioè il subbietto e l'obbietto, l'uno costituente il principio della forma delle idee, l'altro il principio della materia delle idee, fu' luogo prestamente presso i suoi successori alla scomparsa in prima dell'obbietto, o vogliam dire del mondo esterno, indi a poco del subbietto stesso. Perchè il subbietto, il qual rinnegando ogni esistenza fuor di sè è riuscito poi ad annichilar anco sè stesso, ha fatto sì che l'idealismo trascendente si fosse trasformato nella teorica dell'assoluto. E se secondo l'idealismo trascendente, tolta di mezzo le materie, sol rimane la intelligenza, la quale per via dell'astrazione e della riflessione, ne va poi ponendo le cose, secondo la teorica dell'assoluto si rimuove di conserto la intelligenza e la materie, il subbietto e l'obbietto, per indi girne a riscontrar l'uno e l'altro, con l'ausilio della sola virtù cogitativa, nella teorica dell'unità e dell'esistenza infinita, e della sostanza identica, e della unificazione del pensiero e dell'estensione, e dell'ideale e del reale. Onde si pare come i settatori della scuola critica, e Fichte, e Scelling, e Hègel, mantellandolo sotto forme diverse avesson nel fondo tutt'affatto riprodotto l'antico panteismo.

In Francia, come in appresso sarà monstro, benchè negli usi pratici e sociali le dottrine panteistiche avesson pur anco influito, nella parte astratta e speculativa par che allignasse un certo nativo rattenuto a professar con egual apertezza i principj alemanni. O fosse ciò cagionato dalla preminenza medesima del Cartesianismo, o meglio ancora dal buon senso istintivo del genio frauzese. Perchè negli studi di Cousin, il qual ha operato ivi quel rinnovamento stesso delle scienze filosofiche che Kant in Alemagna, il falso della metafisica traspare sì fattamente costruito e adombrato, da sembrar a prim' aspetto non di molto disforme dal vero. Ma a chi acutamente considera, di leggieri si fa palese come per ultimo termine la dottrina del filosofo della Sorbona s'avvenga nel panteismo. Chè spoglia dell'orpellata forma tan-

to suona quella sua triplice idea, dell' infinito, e del finito, e del rapporto dell' infinito e del finito, della quale vien egli identificando ad un' ora la ragione divina e la ragione umana, intantochè l' unità si esplica nella molteplicità, e il finito v' addivene una manifestazione necessaria dell' infinito, e così fin aggiugne poi a confondere in uno e rimestar Dio, e la natura, e l' umanità. Ond' è che, senza pur addarsi, questo filosofo, che nell' analisi della ragione soprammodo ha saputo con mirabil chiarezza girne cernendo e classificando tutti gli elementi, ha poi fuorviato il retto cammino in tutta l' ampiezza dei suoi elaborati studi. E le ricerche teogoniche e psicologiche e cosmologiche, e quelle sulla filosofia della storia, e intorno agli svolgimenti dell' umanità risenton mai sempre, degli accessori infuori, di quel lezzo panteistico che tanto abbuia il suo eminente genio metafisico. Nè i proseliti della scuola eclettica stabilita da lui han meglio saputo starsene alla lontana degli errori involontari del lor maestro, o fosse negli studi astratti, e nella speculativa, o fosse negli studii concreti e pratici del giure, e dell' istoria.

Nientedimeno, in mezzo a sì gran predominanza d' una metafisica falsa, or sensuale or panteistica, che quinci e quindi, per sì lunga tratta d' anni, dispergea il tossico delle invelenite teoriche, il genio italico, e soprammodo della nostra Napoli non bevve ad esotiche fonti, e adergendosi in su le speculazioni de' suoi maggiorenti, epurate dell' assurdo de' sistemi d' oltramonte, ha saputo instaurar la migliore scuola metafisica, e puntellandosi sovr' essa ha riconfortato le investigazioni giuridiche e istoriche dell' appoggio perenne del primo vero filosofico. Avea già il Galluppi intraveduto l' erranza della filosofia germanica con tutto il prestigio dell' ideale e dell' assoluto, e discoperto l' ordito d' un sistema artifiziato sì di nuove parole, ma di vecchi e ributtati concetti, con facilità tassollo di vano e d' insussistente; ed esautorandolo della mal usurpata maggioranza rinvenne di repente il legittimo rimpiazzo in una metafisica stabilita sovra più saldi principj. E gli altri filosofi italiani, ne' loro più ampi studi, rad-drizzata ch' ebbero al pari la filosofia prima, giudiziosamente si discostarono dalle chimere alemanne, e vedremo a suo luogo quanto un tal buono indirizzo approdasse nelle ricerche intorno al diritto. E di tanto buon processo dell' italica filosofia non altrove che nell' Italia

medesima convien trovar le alte ragioni. Era già, innanzi che il secolo decimosettimo si fosse chiuso, surto fra noi Giambattista Vico, il qual con istupendo metodo s'internò nella vetustissima sapienza degl'Italiani, ed isvolgendo le umane origini di taluni vocaboli, come a dire *verum et factum, causa et negotium, punctum et momentum, virtus et essentia, genus et species, forma et individuum*, si seppe far le vie ad innalzar una filosofia soprammodo trascendente, alla cui base pose il primo vero metafisico. E assai prima San Tommaso d'Aquino, non saprei dir se più profundato nelle teologiche, o nelle filosofiche discipline, con l'acume d'una mente altissima avea a rigor di geometria sì fattamente assestate le verità metafisiche, che ad un'ora infranse non pure il sensismo, e 'l panteismo, ma qualche sì sia assurdo sistema, preterito o futuro, d'antica o di nuova guisa rivestito. E i suoi libri scritti nel tenebrio di un'età per molti rispetti non per anco uscita di selvatichezza, son serbati al perpetuo ristauero del classicismo filosofico, allorchè la mente stanca degli errori che si succedono e si rintuzzano a vicenda, ha infin bisogno di ricrearsi nel vero metafisico.

Or se questo e non altro è stato l'indirizzo delle scienze metafisiche del trapassato secolo, e di quel che corre. Se nell'uno tutt'affatto viluppato ne' sensi non toccava se non che la sensata materie, e nell'altro comechè sostenuto in su le ali dello spirito s'è avvenuto nel pronunziato dell'esplicazion dinamica e progressiva d'una sustanza una e identica, certo che non si vuol andar divinando qual si fosse stato il processo e 'l contegno delle scienze sociali, e soprattutto di quella del diritto. La metafisica è stata mai sempre, e debb'essere donna e signora di tutto lo scibile umano, sì la parte che riflette le scienze naturali, sì la parte che alle morali discipline riguarda. Le matematiche stesse l'idea dello spazio e del tempo, su di ch'elle lavorano, non saprebbero aversela che l'attignendo dalla ontologia. E una metafisica falsa, qual si è la panteistica, non potrà alla branca più sublime di quelle, vogliam dire al calcolo infinitesimale, venir sopperendo l'idea dell'infinito. Conciossiachè, l'infinità discreta e numerica, cui il panteismo sol può aver concetto, senza l'idea dell'infinità concreta e continua e semplice, riesce sfornita d'ogni valor ontologico. E però l'etica, e il diritto che al postutto non è esso stesso

che un'etica civile, sarà quale vuol che fosse la metafisica. La face di quei primi principî, i quali soprastanno alle discipline giuridiche, e ne reggono e governano l'andatura, non altrove s' apprende. Onde è che se l'indirizzo della metafisica è al vero, quello del giure sarà al buono e all'equo e all'onesto, e se è converso quello s' inflette al falso, questo ne sarà tradotto al reo ed all' iniquo. Non essendo il buono e l' equo e 'l bello del giure se non che il vero stesso della metafisica, cercandosi nelle cose pratiche come buono e onesto quel che nelle cose speculative s' investiga come vero. Ed in effetto, l'ultimo fine delle cose là si pone dove le cose stesse s' isforzan d' aggiugnere mediante la loro natural virtù operativa. E l'uomo per mezzo di tutte le sue ordinate azioni non appalesa altro conato se non che verso la contemplazion del vero, le virtù operative essendo esse stesse sottordinate alle virtù contemplative, come altrettanti mezzi per riuscire al vero. Onde il termine ultimo dell'uomo non è al di fuori della intuizion del vero. E per conseguente, si conosce come il vero, ch' è l'obbietto della metafisica, debb' essere altresì l'obbietto del diritto. E perciò eziandio scorgiam che nelle cose morali e operative così si pone la ragion del fine come nelle cose speculative la ragion del principio. E se nelle speculative si conchiude da un principio certo e indubitabile, nelle morali si conchiude dal fine. E posciachè lo stesso vero, ch' è il principio della speculazione, è il fine ultimo della moralità, però si corre dietro a questo nelle cose pratiche con quella necessità medesima che nelle cose astratte e conoscitive si seguita quello; non potendo l'intelletto non esser tratto dall'intellezion del vero, nè la volontà non assentir all'ultimo fine. Ed in effetto, la cosa che primamente cade sotto l'apprension dell'intelletto è l'ente, il cui concetto entra necessariamente in tutto quel che s' apprende. E però nell'ordine speculativo l'ente ha la ragion di primo principio, e su di esso si fonda l'inizio d' ogni dimostrazione, non potendosi quello ad un tempo affermar e negare. E l'ente medesimo costituisce poi il bene della volontà, e quindi nell'ordine pratico ha la ragion d' ultimo fine. E quella stessa ingenerata inclinazione, che sta nel fondo della natura umana, di conoscere la verità intorno all'ente, e costituisce la legge suprema della scienza secondo l'intelletto, si rivela circa al seguitar i dettami di cotal verità, e al vivere in con-

formità dell'ente, ed istabilisce la suprema legge della moralità e del diritto secondo la volontà. Or da questa dipendenza delle scienze metafisiche e morali, delle scienze astratte e concrete, ne seguita che il vero o il falso delle prime debba di necessità presto o tardi tradursi e inserirsi nelle altre, per quella medesima legge psicologica, che la volontà non può non risentir l'erranze dell'intelletto. E quindi svagata che è la metafisica, ne viene che s'infestino e s'insozzino e l'etica, e il dritto, e tutte le altre scienze sociali.

Se cotai' è la legge psicologica della natura umana, cioè le facoltà attive camminano appresso alle facoltà speculative, e se l'indirizzo delle nostre volizioni è sottordinato all'indirizzo delle intellezioni, perchè il bene non si può volere se innanti non sen abbia il conoscimento, non più stupirem le discipline giuridiche fuorvianti il lor primo principio quando poc' anzi malauguratamente l'aveano aberrato le scienze metafisiche. Il che con agevolezza sarà mostro d'esser effettivamente accaduto quando avrem definito in che si voglia veramente porre questo primo principio del giure. Il diritto, il quale, come abbiain detto, non è se non che un'etica civile, compone una scienza sostanzialmente operativa, e però dee inchiudere un ultimo fine a cui s'indirigga. E dappoi che, giusta quel ch'è stato teslè ragionato, il vero è lo stremo termine di tutti gli atti umani, ed è l'obbiettivo dell'intelletto sotto la forma del primo principio, alla cui intellezione non si può non acconsentire; ed è l'obbiettivo della volontà sotto la forma dell'ultimo fine, di cui la volizione addivien necessaria. Seguita come il primo principio del giure fontalmente non altrove allogar si voglia se non che in quello stesso primo vero, il qual è necessario eterno ed immutabile, ch'è il fonte di ogni altro vero, cioè nell'Ente per eccellenza, che germina tutte l'esistenze, e intorno a cui la ontologia si va aggirando come al primo intelligibile, onde poi tutti gli altri intelligibili ne isgorgano. E però si vede come il vero si sinonimi con l'onesto e col giusto, o per dir meglio, il vero stesso s'addomandi del nome d'onesto e di giusto, quando dalla conrespettività all'intelletto si passi alla conrespettività alla volontà. E certo che se in cadaun genere di cose quel che costituisce il principio è eziandio la misura e la regola del genere medesimo (1). Così nel genere

(1) Questa verità metafisica di tutto lo scibile vedesi professata in ispecie dai

de' numeri veggiam che dall'unità cominci e sia misurata ogni ragion numerica, e nel genere de' moti, che il primo fra essi principii e misuri tutti gli altri che si succedono. Dee pertanto di necessità accadere che, per esser la ragione il principio degli atti umani, debb' esser anco la misura degli stessi atti. E quindi è secondo l'ordine della ragione che vi sia medesimezza fra il vero proprio della facoltà intellettiva, e il giusto proprio della facoltà volitiva. Da tutto ciò si vuol didurre due postulati, che ci serviranno a vie più addimostrare come nè il sensualismo nè il panteismo ne possano unque mai porger l'idea formale del diritto, al pari che niun altro sistema metafisico il qual trasmodi dal vero. Il primo postulato si è, che il principio del diritto è obbiettivo, e non subbiettivo, si vuol attignere *ab extra* non *ab intra*, istabilirlo fuor di noi e non già entro di noi. Il secondo postulato è, che questo principio obbiettivo del diritto è l'onestà, la qual'è vera, una, eterna ed immutabile, e non già l'utilità che è falsa e mutabile, svariante, passaggèra e caduca.

Allogato il primo principio delle discipline giuridiche nell'onesto e nel giusto, che val quanto a dire nel vero, si può far ragione come la scuola del sensismo, la quale ha preceduto al moderno panteismo, aberrasse sì fattamente le teoriche fondamentali del giure che non sia più possibile d' asseguirlo, se pur non si voglia estimar diritto quel ch'è torto, equo l'iniquo, buono il mal, bello il brutto, e via discorrendo. Per lo che, Cicerone ab antico con fino conoscimento dicea ad Attico, ch'era un di que' della setta d'Epicuro, di non aver modo come raziocinar con lui intorno alle leggi, se innanzi non gli avesse conceduto che stesse la provvidenza divina. Epicuro non ammettendo nella natura altro che una sola sustanza corporale e materiale, a cui tutte riducea le cose, ed istabilendo il caso come cagion prima, ne seguiva che, rimossa la sustanza spirituale dalle sue metafisiche speculazioni, non potesse far giudicio del diritto se non per mezzo del senso, e però non afferrar altra cosa, di quella in fuori di che i sensi stessi fosser capevoli. Onde ne dovè derivare qual legittimo

due più grandi ontologi, da chi istabili le basi del greco filosofismo, e da chi rischiarò poi il tenebrio del medio evo. Aristotele dicea: *Omnia quae sunt unius generis, mensurantur aliquo uno, quod est primum in genere illo*. E S. Tommaso insegna-
va della stessa maniera nella sua Somma Teologica, Trattato de Legibus.

conseguente della metafisica posta da lui, che il fine della moral filosofia fosse la volontà sensuale, la qual rimbalzando dalla materie, e per esser sentita da sustanza anch'essa corporea, non potea essere se non che l'utilità fragile e caduca e mutabile, quella medesima che si apprenda co' sensi. E coloro che vollero ormare una speculativa somigliante, s'incontrarono alle stesse conseguenze, quanto è alle facoltà pratiche e giuridiche. Tanta è e sì indissolubile la colleganza della metafisica col diritto! Macchiavelli nel suo Principe, Obbes nel suo Cittadino, Bayle nel suo dizionario, son venuti insegnando quella deforme e scellerata dottrina, che il diritto s'abbia da misurar in su l'utile, e che il valor dell'uno s'inchiugga nell'altro, e però la forza anzi che il giusto e l'equo istar al governo della civil convivenza. E quando in un'epoca a noi più propinqua, si videro le intemperanze, e le ischifiltà d'una teorica all'estremo sensuale, come in Holbach e in Elvezio, avversaria di qual che si sia idea di vero e di dritto, se si fanno le ragioni giuste, facilmente si divisa com'ella non fosse spontanea e germinante dappersè, bensì apparecchiata e fecondata ne'campi d'una metafisica sensata e materiale, principiata, come si è detto, senza avvedersene, da Lock, ed esplicata e cresciuta da Condillac e da Tracy. Onde poi rampollò e si compose la scuola degli utilitarii giuridici, come dell'inglese Bentham, e insino a un certo segno anche degl'italiani Romagnosi e Gioja, trascinati anch'essi innocentemente dalla foga del secolo in cui s'avvennero. E di cotal maniera si trasinodò, da iscambiar l'occasione per la causa, la materie per la forma, il misurato per la misura, l'obbietto da regolarsi per il principio regolatore. Val quanto a dire, le utilità corporali, su di che senza dubbio s'aggira il giure, le quali compongono tutta quanta la materie del giure, s'estimarono come il principio causante del giure stesso, e come la misura e la forma ideale. E perciò in luogo della giustizia, la quale, come ben dice il nostro Vico, è l'eterna ed immutabile ragione del vero in quanto s'indirigge a ragguagliar fra gli uomini le utilità, si posero le utilità medesime caduche, e svarianti a seconda dell'opinion degli uomini. Onde quel gran lemma così egregiamente formulato dallo stesso immenso autore d'una scienza nuova. *Occasiones non esse causas rerum, corpora autem, et quae sunt corporis, uti sensus, esse occasiones, per quas aeternae re-*

rum ideae in mentibus exeitentur: at fluxa uti corpora, et quae sunt corporis, uti sensus, quid aeternum supra corpus gignere non posse.

Per la metafisica Kantiana abbiain veduto la gran mutazion succeduta nelle scienze astratte e speculative, il lavoro filosofico dal senso trapiantato nello spirito, ma sì veramente da trasmodar per un vizio opposto, e per disio di troppo sollevar la di già invilita natura dell'uomo, da bruta e bestial ch' estimavasi, si venne ad identificarla con l' assoluto e col necessario, e quindi si deificò. Or una metafisica di tal guisa attemperata, la qual non istabilisce se non che una sustanza sola e eterna, che nel suo continuo svolgimento ne dà la ragione di tutte le fenomeniche produzioni di questo mondo, di cui la istessa realtà si rinnega, è stata ed è tuttavia quella fatal semenza, la qual n'è venuta poi fruttando nel secol nostro una filosofia del dritto al pari panteistica. E se acutamente si vuol qui investigar la necessaria ragion delle cose, si scorgerà come, secondo l'ordine logico delle idee, così e non altramente andar dovea la bisogna, cioè gli stessi errori, che avean poco stante intramischiate le scienze metafisiche, si fosser ben tosto traforati in quelle del giure. Ed in effetto, non si dubita, che fundamental principio di qual che si sia panteismo, o che si porgesse con una ovver con un'altra forma, o fosse antico o moderno, è mai sempre l'unità e l'identità della sustanza. E la formola medesima prodotta da'più recenti metafisici dell' Alemagna, non riesce ad una dottrina discorde dall' unificazione della sustanza; chè tanto suona quella per lor sì millantata, e così poco intelligibile teorica, dell'esistenza pura, ove nulla v' ha di distinto e di determinato, e di che niente puossi affermar o negare. La qual esistenza poi per una virtù incognita, e per una intrinseca necessità, che non puossi d' alcun modo qualificare, limitando sè stessa, vien generando tutti gli esseri, il mondo spirituale e materiale, il mondo ideale nell'ordine dello scibile, e 'l reale nell'ordine de' fatti. E tutte quest' esistenze secondarie contingenti e sfornite d' ogni realtà vi son tenute in conto d' altrettanti fenomeni. Di che di leggieri si può divisare di quali concetti intorno a Dio e alla libertà umana fosse capevole una metafisica di eotal guisa sofisticata. Un sistema, il quale quanto lassù e quaggiù si vede attribuisce ad una forza cieca della

natura, per legittimo corollario dee non pure qual si sia libertà, ma ogni personalità di Dio rinnegare. E per la ragion medesima, per quanti fossero i conati di sollevar nell'uomo il principio subbieltivo, cioè quell'*Io* che s'aggiugne a fin deificare, mai non si potrà a tutto questo accomodare il libero arbitrio, il qual è in aperta contraddizione con la loro necessità universale, che al postutto è il fato stesso della setta stoica, venuto fuori per altra via. E però viene a cader di peso quantunque idea del giure, la quale per esser una idea di rapporto fra il libero arbitrio dell'uomo, e il primo vero che risiede in Dio, ha per tanto mestieri di due termini perchè possa aver consistenza. E questi due termini vengon meno al tutto nella metafisica panteistica, che pone a suo fondamento la sostanza una e identica.

Oltre a ciò, i panteisti rimuovendo l'idea del male, e includendo l'idea d'uno svolgimento di continuo progrediente in tutte le cose, sì fisiche sì morali, dee lor per tanto venir fatto d'iscuoter ben per due altre vie il fondamento del diritto. Essi assumono che tutto si fonda nella necessità e nell'ordine, e che tutto ciò che apparisce, bene o mal che fosse, è traporato in quel loro esplicamento dell'infinito. E per conseguente, non potrebbe accadere che gli atti umani avessero alcuna moralità, perciò appunto che il male, il qual ridonda da un tal sistema, è necessario, anzi sol apparentemente ha il sembante di male. Ed ecco come si vuol intendere la burbanza di quell'antico filosofo della Stoa, il quale col fato inesorabile che aveasi nel capo, tormentato ch'era dalla gotta, dicea, per quanto ella pur l'avesse distretto e punto co' suoi stimoli, mai non avria confessato che fosse un male. Nè poi quel progresso all'infinito è più propizio all'idea del diritto. Una cotal teorica, al pari che l'altra del male panteistico, qual legittimo conseguente della forza unica e necessaria della natura, vien presupponendo nell'origine dell'umanità nient'altro che miserie e imperfezione, ond'è uopo sbrigarsi mediante il progressivo svolgimento dello spirito umano. E però si pare evidentemente come la verità non più si fosse immobile e stabile, ma v'addivenisse un prodotto del nostro spirito stesso, il qual elaborandola per mezzo delle sue facoltà, le imprime quel carattere medesimo d'instabilità e di svariata e di mobilità che gli è proprio. Mentre la varietà è tutt'altro che la verità, è anzi il suo contrapposto, cioè la falsità; e se di questa il carattere di-

stintivo è la molteplicità, di quella è l'unità. Al qual errore ha dovuto di necessità far le vie quella stessa teorica posta da' panteisti, d'essere cioè l'intelletto umano la misura e regola delle cose, al pari come l'intelletto di Dio, a cui e' non che assimilarlo, anzi il confondono e l'identificano. Quandochè, la ragion dell' intelletto divino in rapporto alle cose ben procede d' una foggia al tutto diversa, che non fa l'intelletto umano. Perchè questo è dalle cose con la lor propria obbiettività misurato, in tanto che i nostri concetti non son per sè stessi nè veri nè falsi, ma riescon tali per la lor consuetudine o dissonanza dalle cose. Quello per contra, essendo con la sua eterna e semplicissima subbiettività la misura di tutte le cose, ciò che qual si voglia obbietto acciude di vero partecipa da lui. E però la ragion di Dio, e non la ragion dell'uomo, costituisce la verità. Or per tutto ciò è palese come si facesse altresì impossibile l'idea del giure, la qual' è obbiettiva e non subbiettiva, e suppone fuor di sè un vero eterno, immobile ed incommutabile, come regola degli atti dell' illimitato arbitrio dell'uomo.

DISSERTAZIONE SECONDA

IL LEGAME DELLE SCIENZE METAFISICHE CON LE SCIENZE GIURIDICHE NON È SOL-
ASTRATTO E SPECULATIVO, MA PRATICO E CONCRETO.

L'alleanza e l'indissolubil ligame che s'intramette fra la metafisica panteistica e la parte razionale del giure, non è solamente astratto, ma concreto, non pure speculativo, ma operativo, non si restringe nelle attenenze della logica che non trabocchi anco nel fatto, non si manifesta nel sol ordine dello scibile, ma penetra altresì nell'ordine del reale. Conciossiachè, se il fatto per legittimarsi alla perfine si rivolge alla teoria per aversela come ausiliare, la teoria non dispiega sua efficacia se non per mezzo de' fatti, ne quali cerca d'ognor esplicarsi. Chè non sarà qui disagevol cosa venirne alla spartita additando come e insino a qual segno nelle scuole del panteismo gli insegnamenti del dritto fosser proceduti d'egual passo che le maggiori astrattezze della metafisica, e come intorno al medesimo principio di una sola unificata sustanza si fosse andato aggirando di conserto il destino dell'une e delle altre discipline. V'ha nella nostra dialettica una cotal forza, la qual si strigne e preme, che non fia possibile di un principio malamente posto non girne prestamente o tardamente cogliendo tutt' i legittimi corollari che in quel come nella loro buccia s' inchiuggano; avvegnachè questi ne sembrassero e fossero in effetto avversanti all' intimo senso e all' universal modo di vedere degli uomini. Pur si rinviene talvolta alcun avanzo di verecondia scientifica, e il lavorio dello spirito par che per poco si soffermasse in sul trarre il total esplicamento di quel principio, e parecchi postulati benchè legittimi pur vi si rimangono come latenti e compenetrati. Ma questa stessa sobrietà più si desidera che si trova nella scuola del panteismo. Senza voler qui addentrar quel che al dì d'oggi si va con tante cure indagando sul conto della letteratura e della scienza orientalista, ben risappiamo che il Vedantismo degl' Indiani fosse pur un sistema di emanatismo, e lo stato di perenne abiezione e d' invilimento in ch'essi sono, certo meglio che ogn'altra cosa, ne pruova e spiega quale idea astratta e concreta aver si possano del dritto, bruttati come sono del lezzo di quella loro panteistica filosofia. E se ci volgiam alla Grecia, la veggiam ben per due volte signoreggiata da simile assurdità. Una volta là presso gli

Eleati, e dubitar non si può che l'eleatiche dottrine fossero state al postutto precipua cagione dell'introdursi che man mano vi fece la setta de' sofisti, così nimica d'ogni moralità, e d'ogni dritto. E ancor ne suona all'orecchio di tutti l'orror di quella proverbiala impudenza di Carneade, il quale con egual vigoria di ragionamenti si fè innanti a discorrerla, or in un senso or in un altro al tutto contrario, sul tema, se pur vi fosse giustizia nelle cose di quaggiù. Ed un'altra fiata, il panteismo vi spiccò nel neoplatonicismo alessandrino, e nelle gnostiche sette a quel coeve ci vien fatto d'incontrar le più istrane cose. I Carpocratici non iscorgeano nelle azioni umane nulla di buono o di pravo, d'onesto o d'inonesto. L'educazione legittimava i lor costumi, e i piaceri più svergognati eran tenuti in conto di virtù. Ed Epifanio figliuol di Carpocrate era aggiunto a farneticare una maniera d'unificazione assoluta fin delle cose sociali, che vorrem dire un panteismo politico, nella cui voragine facendo tutt'insiem scomparire e la proprietà e la famiglia, istabiliva la comunanza de' beni e delle donne, e però il total sbandeggiamento d'ogni moralità, e di ogni diritto. Il qual sistema un pò meglio atteggiato, e eziandio azzimato di più leggiadre forme, vedrem fra poco riprodursi nel Sansimonismo, e poscia nel socialismo e nel comunismo de' tempi odierni. E Spinosa in fra i posteriori panteisti certo il più altuoso di pratiche applicazioni, il qual ne ha saputo d'una guisa esattamente logica assestare a' fatti il concetto della sostanza una e identica, non isdegna d'asserir nel suo Teologo-Politico, e nella sua Etica dimostrata in forma geometrica, che la volontà non è una causa libera ma necessaria, e che la volontà è tutt'uno che l'intelligenza. E in altro luogo dice che le passioni son da aversi in conto d'altrettante cose sacre e non oppugnabili; non potendo d'infra esse la più debole ch'esser soverchiata dalla più forte. E però il diritto generalmente il pone nella forza corporea e materiale, e il diritto singolare di cadauno il diduce e l'estima dal valor della forza individuale. E conseguentemente, le leggi, che il civil convitto vien istabilendo, non aversi altra virtù scientifica, se non che il sol principio estrinseco dell'utilità, val quanto a dire della comunal sicurezza. Onde il falso fin della stessa definizione astratta della legge, sol ridotta al placito della volontà umana, o fosse la volontà manifestata da' pochi, o fosse la generale e co-

mune. Onde l'arbitrio delle legislazioni positive, non ammoderate da nissuna idea d'eterna ed immutabile verità, di constituir tutto quel che ne piaccia, ormando le vie d'un apparente vantaggio sociale, sfornito d'ogni pregio di onestà civile.

Al gran professore di Koenisbergk autore della scuola critica si aspettava, certo in ciò a dispetto delle sue intenzioni, di metter la prima radice in Alemagna dell'attual metodo intorno alla filosofia del giure. E come per la sua ragion pura l'abbiam veduto precorrere al panteismo metafisico, per la ragion pratica, non ostante che di sublime ed esquisita moralità pienissima, n'è venuto esso al giure ritogliendo quell'immobile puntello del primo vero sfolgorante d'eterna obbiettività. Egli che nella ragion pura non s'era nè punto nè poco avvenuto nell'esistenza di Dio, nè nell'immortalità e nella libertà dell'anima, che son come il midollo d'ogni ben ponderata metafisica, tutte cosiffatte cose sperdute nella prima parte della sua scienza trascendentale, le va ripescando poi a tentone nell'altra della ragion pratica. E dappoi che nella primitiva dualità della filosofia critica il principio obbiettivo di poco non si vede assorbito dal principio subbiettivo, però nella ragion pratica ponendo la libertà per fondamento di tutto il sistema, si fa dal sen di lei rampollar la legge del dovere sotto la forma di quell'*imperativo categorico*, intorno a cui come a primo concetto rappiccia la credenza d'un legislatore, e quella stessa della immortalità dell'anima.

Per lo che, si avvisa come l'*imperativo categorico* non fosse veramente obbiettivo e ontologico, bensì subbiettivo e psicologico. E pertanto la moralità e il diritto men vi si fondano sopra un sapere teorico e inconcutibile, e stabilito a *priori* a forma di scienza, che sopra una spezie di fede pratica e razionale. Essendo debito della vera scienza venir pruovando per le cause, e additar come le cose si avesson nascimento, il giure posto da Kant difetta in ciò onninamente. E puossi dire d'esser questa una filosofia del diritto, la qual circa alle virtù morali più ne porga alcune utili credenze, che positivo e chiaro conoscimento. E sfornita com'ella è d'ogni valor scientifico, mentreechè par che voglia con metodico apparato girne empiedo il vòto che la severità della critica avea dischiuso nella ragion pura, si monstra dapersè il portato legittimo d'una metafisica sterile ed insufficiente, un elemento posticcio di tutto l'edifizio critico.

Fichte, il quale, come abbiain detto, compì col suo idealismo trascendente il total assorbimento del prinripio obbiettivo nel subbiettivo, appena cominciato da Kant, conseguente a sè medesimo non pone al dritto altro fondamento se non che l'lo. Secondo lui, il dovere è la legge che l'lo ingiunge a sè stesso, ed è questa legge che costituisce tutta la moralità. E discorrendo poi le applicazioni del diritto alla società, la possibil perfezione di questa la va riscontrando nel miglior e più compito svolgimento di quello, e l' progresso dell' umanità il fa consistere nella transizion graduata dalla vita instintiva alla vita razionale, quando propriamente il diritto acquista la maggior preminenza possibile.

Schelling, il qual nella sua filosofia della natura muove dallo assoluto, ed in esso riconosce la sola esistenza reale, fonda per tanto la legge morale nella tendenza inverso l' assoluto, come la scienza nella cognizion dell' assoluto. L' attuazione successiva della ragion del diritto è la condizion necessaria della libertà umana, e la storia è come il teatro dove avverasi l' evoluzion del diritto stesso. E nell' assoluto medesimo fa egli i suoi sforzi per effettuar la conciliazione del libero arbitrio e del corso necessario dell' umanità.

Hègel ha cercato di dar agli studi filosofici del ginre uno sviluppo anco più ampio, che non han fatto chi l' han preceduto, e non seguitando diverse vie è riuscito a determinar un sistema più elaborato e anco più particolareggiato, ma non men fallace ed insussistente. Si può dir che il filosofo di Berlino quasi rappresenti al dì d'oggi il culmine della moderna scienza del giure filosofico alemanno, ma le sue dottrine giuridiche non son punto dissimili dalle dottrine metafisiche, anzi v' ha una perfetta rispondenza, e molto ben s' accomodano fra loro. Il principio ch' egli svolge nella sua filosofia del diritto è quello stesso che tratta nella filosofia della storia, val quanto a dir la libertà. Secondo lui, il diritto non è altra cosa che l' esistenza esterna di quella. E questo principio di per sè stesso appalesasi come un postulato necessario della metafisica panteistica, a cui logicamente aderisce, quella cioè che ammette l' unità e l' identità della sostanza. Se l' unificazione della sustanza tutto avvolge, se ogni valor obbiettivo delle cose esterne s' identifica con l' uom medesimo, ne seguita che il principio del diritto da lui allogar non si potea fuor dell'uo-

mo, cioè dovea esser la libertà stessa, per la quale noi ci riconosciamo non preoccupati dalle cose esterne. E posciachè l'esistenza esteriore della libertà si vien avverando nel triplice elemento, della proprietà, della famiglia, e dello stato, però la sua filosofia eziandio s'esplica intorno a questa triplice relazion del giure. Ma per divisare insino a qual segno questo sottil pensatore togliesse al diritto ogni obbiettività, circoscrivendolo sol nel giro della volontà libera, non fia discaro udirne le sue stesse parole. « Il diritto, dic'egli, si rapporta in generale allo spirito, ed ha in ispezie sua base, e suo punto di muovenza dalla volontà, la qual'è libera, sicchè la libertà ne costituisce la sostanza e la determinazione, ed il sistema del diritto è la sfera della libertà realizzata, la vita dello spirito prodotta da sè stesso, come una seconda sua natura ». E qui certo che dovrem ancor più istupir l'ecclatanza di simili fallacie se non fosser desse spontaneo conseguente degli avvolgimenti panteistici. Non fia possibile altramente ispiegar come lo spirito umano, il quale sol sa indagare il dritto, ch'è una parte del vero immutabile, il potesse poi a sua posta venir istabilendo a sè stesso. Mentre se il diritto fosse per poco fattura della nostra intelligenza, perciò solo cesserebbe d'essere diritto, il quale ha per suo carattere formale l'eterna unità e l'immutabilità. E la mente dell'uomo è soggetta di continuo a cangiarsi, e per più o men veder della mente, non si eresse od isminuisce il primo vero, e la luce che ne irradia il nostro intelletto della primiera scaturigine del diritto. E per vie più intender il concetto ch'egli si fa del diritto, veggiam quel che ne pensi in ordine alla volontà, in cui ripone il diritto. « La volontà in sè e per sè esistente è veramente infinita, mentre essa ha sè stessa per suo obbietto e non altro, non è limitata, ma è in se medesima riflessa. Essa non è quindi una pura possibilità, o disposizione, o potenza, ma realmente infinita, *infinilum actu*, mentre l'esistenza dell'idea o la sua eterna manifestazione è il proprio interno ». E muovendo da siffatti principii è curioso d'iscorgerlo come in un altro luogo si faccia egli a dar le rampogne a quella teorica medesima, onde se non altro indirettamente pur discende la sua. L'infinito della sua volontà non s'accordando, anzi essendo in contrapposto con il sistema di Kant circa alla legge generale, che questi pone nella limitazion della libertà di cadauno, e nella coesistenza delle singole li-

bertà di tutti, però tassa egli una cotal dottrina di negativa, e come vacua di speculativo valore. Udiamlo dalla bocca sua medesima. « La Kantiana opinione universalmente ricevuta, che debba ritenersi come generale la limitazione della mia libertà, e la coesistenza di essa con la libertà di ciascun altro, avvolge in parte una proposizione al tutto negativa, cioè a dire quella della limitazione, e in parte positiva, l'universale, o la così detta legge di ragione, l'accordo cioè dell'arbitrio dell'uno con l'arbitrio dell'altro in una conosciuta astratta identità. La riportata definizione contiene l'opinione promulgata fin dai tempi di Rousseau, secondo cui la volontà, non come in sé e per sé esistente e ragionevole, e lo spirito non come vero spirito, ma come particolare e individuale, come volontà dell'individuo del suo proprio arbitrio, è la base prima ed essenziale del diritto. Un tale principio una volta accettato, per quanto è ragionevole, non può apparire che limitativo della libertà, non come permanente, ma come puramente esterno. Una cosiffatta considerazione è fuori d'ogni speculativo pensiero, essa vien rigettata dalla idea filosofica ». Ed è altresì notevole, come nella egeliana filosofia del dritto si va tratto tratto ripetendo quella triade, in che costantemente isvolgesi il principio panteistico della sostanza unica, la qual triade compone la parte più speciosa, e quasi dirò l'architettura del sistema. Ed è cotale il progredimento metodico di queste triadi, e 'l viluppo delle formole, e il dibattersi giù e su della dialettica è così intrigato quanto di niun scientifico riuscimento. Il francese Lermnier, che tra non guari discoprirem insino ad un certo punto come settator dell'egelica scuola, non si ritien di prorompere in queste parole piene d'assai buon senso. « Hegel est emporté dans cette tourmente dialectique, dans ces tourbillons de formules, qui l'enveloppent et l'emprisonnent. Il marche de terme en terme, de trinité en trinité, ou plutôt il ne marche pas, il est irrésistiblement poussé ».

Abbiam già testè avvertito, come il panteismo alemanno, mantellatosi in Francia sotto il velo dell'eclettismo, se vada men alla discoperta promulgando i suoi filosofemi, e faccia in quel suolo la sua comparita con un po' più di ritrosia, non sia per tanto men effettivo ed operoso. Cousin capo della scuola eclettica francese, il qual nelle sue scienze metafisiche avea allogato a capo delle sue dottrine la tri-

plice idea, dell' infinito, del finito, e del rapporto dell' infinito e del finito, non si avrà certamente ad istipir se conseguente a sè medesimo si vedrà d' una guisa egualmente panteistica dettar i suoi insegnamenti su la storia della umanità. Egli assesta lo svolgimento dell' umanità in su quel del pensiero, facendo dell' un regola all' altro. E quegli stessi tre elementi del pensiero umano li va parimente atteggiando all' umanità, e ne forma tre grandi epoche dell' istoria. Però dice di dovervi essere un' epoca, in cui lo spirito umano investito tutt' affatto dell' idea dell' infinito, ne andrà quinci e quindi ormando i vestigi di quella. In un' altra epoca preoccupato dall' idea del finito, lo spirito ne qualificherà somigliantemente tutte le sue produzioni. E in una terza epoca, dopo d' aver corsa ed esaurita l' una e l' altra idea, dell' infinito e del finito, con questi due termini già cogniti, lo spirito ne girerà indagando le relazion fra loro, e ne' fatti in che s' esplicherà, stamperà al pari le sue concezioni. Onde addomanda necessaria l' esplicazion istorica dell' umanità, e con esquisita enfasi dic' esser la istoria una geometria inflessibile. Di che si può far ragione per divisar qual luogo in una filosofia siffattamente attemperata lasciar si possa alla scienza del giure. Il male debbe di necessità eclissarsi in un cotai sistema. La verità v' addiviene mobile manchevole e incerta, e l' una verità ne debbe discacciar l' altra, o per dir più vero, lo spirito s' avvolgerà in perpetue erranze. E in un progresso successivo, nel quale tutto opera lo spirito e il libero arbitrio dell' uomo, manca al giure ogni fondamento obbiettivo, su cui esso s' adagi. Sicchè l' eclettiche dottrine del Cousin pur s' incontrano con le trascendenti dell' Hègel.

Dopo Cousin, nella scuola eclettica tiene il secondo posto Jouffroy. Questo filosofo che nella gallica scuola è precellente per la lucidità del suo spirito, e per l' esattezza del metodo psicologico, sdruc-ciola quinci e quindi fra i suoi pensieri, comechè con un certo divario, in due sue opere. In un volume di miscellanee filosofiche, saria qui fuor del tema che ci abbi- am per le mani girne razzolando gli svariati e molteplici suoi concetti, ma certo che torna al proposito nostro rilevare quel tanto che professa in ordine alla verità, a cui ritoglie quantunque immobilità, quà dicendo che le idee dell' intelligenza umana svariino d' una stagione all' altra, e di questo a quell' altro paese, e là

che i secoli non sien colpabili delle loro opinioni più che gli nomi-
ni del secol loro, e che ad un'età non si possa addebitar nè quel che
essa sia, nè quel ch'essa si pensi. E così, discacciando la stabil ve-
rità, ne dee col suo eclettismo venir di necessità giustificando l'erro-
re, e con esso le brutture e le turpezze del vizio. E nel corso del drit-
to naturale facendosi più di costa alla materie propria del giure, do-
ve le sue dottrine ne paiono anco più sode e aggiustate, in mezzo a
molte verità con filosofica esattezza illustrate, pur è da dolerare come
egli ismarrisse altresì in cercar il principio obbligativo d'ogni morali-
tà. Conciossiachè, allogandolo com'egli fa nell'ideale dell'ordine e
nella simpatia della nostra ragione verso di quello, non è già che
dall'idea dell'ordine poi sollevisi all'idea d'un supremo ordinatore. In
iscambio, nell'ordine dell'universo istabilisce una legge che per sè stessa
legittimasi, ed obbliga direttamente, a cui per esser ossequente non fa
bisogno d'alcun'altra cosa anteriore e superiore. E però tramuta il criterio
del vero, ch'è l'ordine, nel vero stesso, ch'è fuor dell'ordine, e produce
l'ordine. E allorchè in altro luogo dice che dall'idea dell'ordine pur si
trapassi all'autor dell'ordine, è assai maraviglioso a pensar come l'i-
dea dell'Ente addivenga per lui al tutto insignificante per constituer
il principio obbligativo, ch'è la base delle cose morali. Quindi in po-
nendo la moralità nell'ordine cosmico, prescindendo dal supremo or-
dinatore, all'idea di Dio sol porge un valor religioso, e unisce così
la soggezion morale dell'uomo all'ordine con la soggezion religiosa al-
l'ordine stesso. Sicchè si conosce abbastanza come il primo fonda-
mento del dritto, il qual debb'essere assoluto eterno e necessario,
cioè l'autore stesso dell'ordine, venga dal Jouffroy iscambiato col re-
lativo contingente e creato, qual è l'ordine dell'universo; e la rifles-
sion del primo lume, la quale è il cosmo, siasi confusa con il lume
medesimo, ch'è il solo fonte della ragion naturale. Mentre l'ordine
dell'universo quanta virtù s'abbia per farci risalir al primo ed ultimo
termine dell'umana conoscenza, qual'è l'ideale di Dio, altrettanto è
inefficace a porgerne il vero e nativo principio della moralità e del
dritto. Tanto è difficil cosa, per non dir impossibile, aversi una filo-
sopia del giure bene e rettamente assestata, quando la metafisica, da
cui tragg'ella il primo vero, è errata e falsa, intinta che fosse del-
l'eclettiche ovver delle critiche dottrine!

Michelet nella sua introduzione alla storia universale non ferma teoriche più propizie alla stabilità del diritto, allorchè pone somigliantemente tutto il fin dell'umanità nel libero arbitrio, e determina il progresso nell'oltrarsi che fa l'umanità in verso questo fine. E però in questo perenne disvolgersi della libertà, tutto operando la natura e l'uomo, dee difettar ogni idea d'immobile verità, e con essa ogni idea di diritto, non si potendo raziocinar di legge e di giustizia dove l'uom si venga a sè stesso facendo la legge primigenia, e la giustizia non sia che la mobile manifestazione dello spirito umano.

Lerminier, il qual si è in ispezialtà aggritato intorno ad una filosofia del diritto, nè pur procede per vie diverse. Al pari solleva lo spirito umano a cagion prima de' fatti dell'umanità, e tutto rapporta a lui nel corso storiato delle cose civili e politiche. E mentre che va anch'egli deificando la virtù, e la dignità dello spirito, dicendo che desso non è se non che una perpetua e necessaria rivelazione di Dio, e che Dio è ad un tempo la nostra essenza, ed il nostro fine, la nostra intelligenza e la nostra forza, in discorrendo poi del diritto intramischia le sue teoriche di pronunziati pien sì veramente di tristi conseguenze, ma pur tratti a rigor di logica dall'eclettiche dottrine « Il dritto, « dic' egli, e la sociabilità e la scienza si svolgono distruggendosi di « epoca in epoca, e in mezzo a queste perenni mutazioni, il solo « natural diritto, che perdura, si è di mantenere la sua libertà, e « fare che vada ella mai sempre fruttando novelle produzioni ». Sicchè il vero assoluto ed immutabile, ch'è il perno del diritto, desaparece tutt'affatto innanzi a un tal progresso continuo ed infinito. E questa dottrina della verità mobile e del progresso infinito, nimica di ogni idea del giure, è stata, non ha guari, piaggiata da un ingegno assai elevato, la Mènnais, il quale avea pur altramente principiato la sua carriera scientifica, e ben per altra via s'era oltrato da quella dove poi gli venne fatto di riuscire. Essendo per tutt'i versi indubitata cosa, che il non buon indirizzo degli studi intellettivi ed astratti presto o tardi ne tragga seco e s'appropri anco quello degli studi morali e pratici.

Ed affinchè non si creda così di leggieri che sol gli studi speculativi del diritto, e non altresì i pratici, le sole teoriche astrattezze e non le concrete applicazioni sien veramente capevoli del falso che

vada insegnando una metafisica errata, ne piaccia qui per poco ricordarci di quel che in Francia avvenne in un'età certo non di molto lontan da noi, quando una setta di panteisti, là presso il Conte Enrico de Saint-Simon, volendo concretar le loro speculazioni, venner sofisticando un tal sistema di civil convitto, tutt'affatto temprato in quella unificazione filosofica d'ogni sostanza, il quale avria pur fatto una comparita anco più istrana, se alcuni secoli innanti non fosse stato principiato nelle gnostiche scuole. Una tal setta non fu sol una dottrina, ma tentò d'islargarsi in forma d'arbitrato religioso e civile. Uomini d'ogni maniera vi s'affiliarono, e una società organata di principj al tutto disformi ed anormali era iscopo alle loro tendenze entusiaste. Dicean eglino, che tutto il mal dell'umanità stesse nell'antagonismo, come tutto il bene nell'unità, onde i lor conati ad ammuover l'uno e ad inferir l'altra. Questa verità formar il disio della vita generale nella società, in togliendo l'antagonismo sociale, val quanto a dire le disuguaglianze delle civili condizioni. Questa verità agognarsi dall'individuo nella vita singolare, in cessando l'antagonismo dello spirito contro la carne. Non più, alto gridavano, dovervi essere stabili maritaggi, non dominio di beni, non ragion di maritale e di patria potestà. La figlinolanza fosse allevata in comune. Alla vece d'un ordine di proprietari ed industrianti e di addetti alla mercatura o alle commercievoli intraprese, si riconoscessino ufficiali d'agricoltura e di industria e di commercio, e doversi cotà uffizi dispensar fra i più degni e più intelligenti. La società intera aver ad essere elaborata triplicemente, cioè in preti, in dotti, ed in industriosi. La ricchezza pubblica venir impartita a seconda de' meriti. E in siffatto viver civile tostantemente convenire e come identificarsi tutta quanta la progenie degli uomini. Or in mezzo a questa strana ed impossibil associazione non occorre additare qual posto s'intralasciasse al diritto, non si potendo nè punto nè poco parlar di dritto dove manchino fin gli elementi su cui esso si versi, quali per certo sono la famiglia e la proprietà. Qui il giure non sol è rinnegato nel suo principio, e nel suo fine, ma si dà un passo di più, e vi si rapisce fin la materie di cui esso è la forma. Che si dee pensare di quell'eterna e non concutibil misura che ragguaglia infra gli uomini le utilità di quaggiù, quando in una unità universale, che permischia qualche siasi cosa, si viluppino e si

sperdano le cose stesse da misurare ! Ecco di qual orribil guisa traboccò oltra ad ogni termine di social convenienza il sansimonismo , ch'è pur un portato legittimo ed immediato della scuola panteistica. E per manco di quel lume eterno ed immutabile d' ogni moralità e d' ogni diritto , ch'esso discacciò, val quanto a dire a cagion della stessa sua abnorme teorica, ben prestamente divamparono nel sen di lui medesimo cotali intestine discordie, e sì ne rimase ognun scandalizzato, che fu giuoco forza di cessar quella setta, e con essa la sua sofistica. Se non che ne restò come avanzo il contagio pestilente di quel farnetico, il quale con la intramessa di molti anni, dovea un'altra fiata germinar nell' odierne scuole de' socialisti e de' comunisti , e ammodernato alla nuova maniera, e rabbellito d' insolite lusingherie far un altro disutil conato per adagiarsi su i destini delle cose sociali.

DISSERTAZIONE TERZA

IL DIRITTO È SCIENZA TRASCENDENTE, AL QUALE PUR SI COMPETE UNA LEGAL METAFISICA. AL DIRITTO AVVERSA NON PURE IL PROGRESSO CONTINUO E INFINITO, CHE NON MUOVE DA UN PUNTO FISSO ED IMMOBILE, N'ALTRESI IL METODO ISTORICO, CH'ESAMINA E SPIEGA LE LEGGI SOL COME ALTRETTANTI FATTI.

La condizione dello spirito umano, che gli errori dell' intelletto si traforino nella volontà, e dalle astratte alle concrete discipline trapassino, se farem buon sènno, c'incontrerà di derivarla altresì dallo stesso intrinseco rapporto delle conoscenze speculative e pratiche. Chè quantunque il prim'ordine di conoscenze sen stia in su gli universali, come il second'ordine discende a' particolari, essendo il fin dell' una nella verità, ch'è per sè stessa universale e immateriale, e consistendo il fin delle altre nelle azioni e ne' fatti, che sono come a dir tante cose singolari. Nientedimeno, la speculazione mai non sarà ricondotta al maggior grado di perfezione, se non comprenda la spezial notizia delle cose che sottordinatamente ne dipendano. La scienza dei principi è come in potenza se per via delle diduzioni non si vada esplicando nelle particolarità, val quanto a dir addivenga attuosa. Che anzi l' uffizio vero di lei, e soprammodo precellente, istà appunto in iscorger con molta acuzie quella relazion intima che s' intramette fra i generali e i particolari. E colui è veramente della scienza peritissimo che nella generalità sa intraveder tutte le particolarità che vi s' inchiuggono, e queste a quella poi rapportare. Perchè si vede che la fecondità dell' ingegno umano non soffermasi nella sua speculativa, e non sì tosto un principio, vero o falso che si fosse, maggioreggia, che si va poi logicamente snocciolando nelle più remote conseguenze. E però se una metafisica falsa e bugiarda è riuscita altresì ad inserirsi nella filosofia del dritto, le teoriche errate di quella al pari trambalzeranno in su le applicazioni concrete delle varie branche delle scienze giuridiche. Quella sustanza una e identica delle metafisiche discipline, quel lavorio incessante d' una esplicazione infinita

dello spirito umano, e quel progresso continuo, e quella verità mobile delle discipline giuridiche ed istoriche, son cotali e sì ampi e ponderosi e complessivi principj, che non saprebbesi abbastanza antiveder insino a qual segno esser potessero effettuosì, e quali postulati ne rampollassono. Bene il comun senso assai volte fa riparo. Bene un sentimento istintivo del retto e del giusto, dell' onesto e del bello, che sta ascoso nel fondo del cuor nostro, defettuosà la scienza, fa udir sua voce possente più che non si crede. Ma certo in materie di così gran rilievo, dove fontalmente il primo principio del giure s' annesta, il qual ne regge e governa l' individuo e la specie, le piccole e le grandi associazioni, la famiglia e lo stato, e le nazioni stesse nei rapporti esteriori dell' una in verso dell' altra, non si convien incedere senza sicura scorta, e all' incerta, e con tanto e così eclatante disaccordo fra il reale e lo scibile. Che mentre l' uno ne' fatti dell' umanità s' involge secondo l' ordine della Provvidenza, l' altro ne vada poi coi suoi pronunziati ognor torcendo ad opposto sentiero.

Il diritto, il qual co' suoi pratici atteggiamenti in regolar che fa alla spartita tanti e così svariati rapporti generall e particolari degli uomini, ne paia che progredisse con l' umile apparato di scienza seconda, facendo or la comparita d' istorial testimonio dell' attività umana, or d' arte appropriata ad applicar il giusto e l' equo a' fatti singolari e contingenti, pur sorvola assai più alto, e rettamente aspira all' onor di scienza suprema, quando dalla sfolgorata luce del primo vero sa istrappar come una scintilla di quella ragione immutabile e infinita, ch' è il principio e l' ultimo termine del suo indirizzo. Perchè al diritto si compete una filosofia, o vogliam dire una legal metafisica, al pari che se l' hanno le più astratte speculazioni. In questa legal metafisica del diritto la virtù cogitativa del nostro spirito va elaborando la cognizione del primo vero della scienza, il qual è come una intellezione ed una dignità comune ad ogni essere pensante. Nè poi rettamente giudicando il processo della ragion pratica è nel fondo disforme dal processo della ragion speculativa. Che l' una e l' altra muovendo da certi principj, aggiungono ad afferrar certe conclusioni. E come nella ragione speculativa da taluni principj indimostrabili, naturalmente cogniti, si van generando le conclusioni delle svariate scienze, la cui spicciolata conoscenza comechè noi non ci abbi-
am

dalla natura direttamente, pur la ritruoviam per mezzo del magistero della ragione. Così da taluni comuni e non dissentiti principj è necessità che la ragion pratica pigli anco le mosse, per girne poi a disporre alcune cose più particolari. Ed è appunto mediante questi comunali principj che la ragion umana vien partecipando il dettame della legge eterna. E questo primo vero, in cui s'incarna il principio del diritto, per esser universale a tutto quanto l'uman genere, non pertanto s'identifica con noi, e confondesi con l'esser nostro. Se la nostra apprensiva s'opera la mercè d'una certa assimilazione fra l'obbietto e l'subbietto, nel che consiste l'unità logica delle idee, pur ciò è tutt'altro che l'unità reale, correndo assai divario fra le leggi del pensiero e le leggi dell'esistente. Onde si pare come malamente si faccia ricorso a quel perenne esplicamento del nostro spirito e del libero arbitrio. La libertà dello spirito certo ch'è la condizione del diritto, senza di cui non può aver consistenza l'idea del diritto, come senza la ragione istar non potrebbe la libertà. Pur tutto questo non significa che la libertà è la sorgente del diritto, e che la miglior e più compita manifestazion dell'una costituisce la perfezione dell'altro. Per mezzo del libero arbitrio ci rendiam capevoli di moralità e di diritti e di doveri, e l'ordine cosmico per esser conosciuto addivien per noi ordine morale, in quanto che dal libero arbitrio, ch'è la facoltà nostra attiva, si vuole che fosse osservato. Ma il giure è mai sempre da ripeter fuori di noi. L'obbiectività sua è eterna ed infinita, ed inchiude un vero immobile ed incommutabile. Soprasta alla nostra mente una legge che noi partecipando per modo di cognizione, a differenza di tutti gli altri esseri che sol la partecipano per un interior principio motivo, v'indaghiamo la ragion direttiva delle cose che son da fare da chi mentre sottostanno all'ordine han pur il potere di a lor posta violarlo, e mentre son naturalmente destinati ad un certo fine possono poi fuorviarlo. E se non fia possibile rimnegare che all'uom sia assegnata la legge d'un determinato fine, questa stessa legge che al fin lo conduce, debbe anco nel fine stesso conservarlo. Onde dee di necessità seguitare che dessa e non altro debba constituir la regola e la misura di tutti gli atti che dalla indefinita attività sua possono esser prodotti. Per lo che si può considerare come il progresso continuo ed infinito, il quale senza pigliar sua muo-

venza da un punto fisso, va in cerca del possibile ammeglioramento delle cose sociali, pessimamente iscambi la condizione per il principio afficiente delle cose, ponga in luogo del primo vero, onde il diritto è causato, la libertà ch'è la disposizione per cui allo spirito si vien assestando il diritto. Oltrechè il progresso continuo e infinito è in sè stesso sì repugnante, da non potere nè pur consistere per niun verso. Bene si potrà procedere di novità in novità, bene ad un' idea ne sarà sostituita un' altra, con perpetua vicenda di lor signoria, ma in tutto ciò men si troverà il progresso che la mutazione. Il progresso scientificamente presuppone una verità prima ed inconcussa, intorno a cui si agiti, la quale venga esso esplicando per tutte le possibili forme, traendone le migliori e più utili derivazioni. E ad un tal rispetto il progresso si può dirittamente appellar indefinito, anzi che infinito. L' infinito ischiva il concetto del principio e del termine, e però nelle cose create si riduce al nullismo, nel che per ultimo si va a risolvere lo stesso panteismo. L' indefinito poi si movendo d' un punto certo ed immutabile, ch'è il suo primo principio su cui s' imperna, s' isforza quinci e quindi di tracciarne, con la face di quel medesimo principio, altri veri secondari come altrettanti postulati della scienza, e di questi e di quello scrutarne le più attuose e molteplici applicazioni. E l' uffizio dello scibile si spaziandō ne' larghi campi, che tra-corrono dal primo principio insino a' più streni corollari, è incommensurato abbastanza per darne a ripensar all' inventiva del nostro ingegno.

Alla ragione umana comunicandosi la ragione della legge eterna d' un modo astratto e secondo certi generali principj, e non già secondo la propria direzione de' singoli e conereti casi che nella legge eterna si comprendono, è però che debb' ella, discendendo alle particolarità, venirne come ordinando e particolareggiando l' eterna ragione. Or nel lavoro di cosiffatta ordinazione la ragion pratica non s' incontra, come la speculativa, in cose necessarie, le quali non possono andare se non che dalla stessa maniera, bensì in cose contingenti, come son tutte le azioni dell' uomo. Perchè debbe accadere che le conclusioni nelle scienze pratiche ed operative non sempre in fatto rispondano a' primi principj, e la difficoltà di appropinquare quelle a questi cresca quanto più le circostanze peculiari vi s' intramettano.

Così, quanto è a'principi comuni allo scibile speculativo e pratico, la verità è la stessa presso di tutti. Niun dubita che tutt' i raggi d' un cerchio muovendo dal centro medesimo sien eguali fra di loro. Niun mette in forse, che non si debba a chicchesia arrear offesa. Ma rispetto a certe cose proprie, le quali sono come le conclusioni de'principii comuni, la verità che nella speculativa riesce al pari enissa, incontrastata e conformemente professata, tentenna poi alquanto nella ragion pratica, o per meglio dire varia a seconda delle circostanze. Così dal principio comune, che non si debba offender il diritto di nissuno, è facile didurre la conclusione dell' osservanza del patto e della promessa, ma intorno a un dato patto o una data promessa molte particolari circostanze o condizioni si possono affollare, e la verità vi si rende tanto più malagevole a rinvenire quanto più s' aumenta il numero di quelle particolarità. Or in tutto questo essendo pur grande il magisterio della scienza in connetter le specialità alle generalità, i principii particolari a' principii comuni, certo che pur assai altro riman di fare, e non circoseritti sono i termini entro cui l' uman sapere aggirasi. Ed è questo progressivo e dinamico esplicamento dello spirito, indefinito e non infinito, che suppone la immobilità d' un punto di muovenza, il qual atteggiato alle cose giuridiche e civili, ne va poi por'gendo la sicurtà d' ogni diritto e d' ogni facoltà, catena la violenza e la forza, o fosse de' pochi o de' molti, e librando con equa lance la ragion di cadauno oppugna all' arbitrio del più forte. Per questo ben inteso progresso è da sperar la più esquisita e desiderata attuazione della nozion del dritto infra gli uomini, e che le legislazioni positive addivengan la stessa ragion eterna attemperata alle bisogne sociali. E volentieri facciam ragione, esser un pronunziato indubitabile del vero sapere, che il progresso continuo e infinito, come s' intende nella moderna filosofia oltramontana del giure e della istoria, sia avverso e nimico agli eterni e non commutabili diritti dell' umanità, quanto amico e propizio il progresso che procede da una prima verità immobile. Hegel, il quale nelle sue teorie panteistiche avvolto, l' abbiain veduto sì fallare nelle discipline metafisiche e giuridiche, in mezzo allo stesso progresso infinito che con le sue lusingherie ha pur cattivato tanti intelletti e di cui tutta quanta ha risuonato l' Alemagna, ecco come la discorre intorno al diritto tra-

sformato in legge, di quel momento cioè che il diritto, com'ei dice, è determinato nella sua obbiettiva esistenza. « Il vvi essenzialmente un lato nella legge e nella sua amministrazione, che contiene qualche cosa di arbitrario ; e ciò deriva dal perchè la legge è un universale che dee esser applicato a' singoli casi. Ove alcuno si volesse dichiarare contro di un tale arbitrario pronunzierebbe un'astrazione. Il quantitativo d'una pena non può rispondere adeguatamente ad alcuna determinazione dell'idea, e tutto quanto vien deciso è da questo lato sempre un arbitrario. Ma un tale arbitrario è una necessità, e quando alcuno asserisce in generale contro una legislazione, ch'essa non sia perfetta, egli non pon mente a quella parte in cui non è possibile alcuna perfezione, e che perciò dee essere presa tale qual'essa è » Tutto ciò costituisce una proposizione scientifica piena di pericolose conseguenze, cui il progresso vero ed effettivo isdegna e sfugge. Nulla vi debb'essere di arbitrario nelle leggi, e molto meno nell'amministrazion di quelle. Le legislazioni positive non sono se non che l'ordinazione e l'espressione più adeguata della ragione naturale. E la perfzion loro anzi tutto s'ottiene quando le leggi non contente al certo si sollevino al vero ideale, di cui sieno altrettante forme le disposizioni che in quelle si contengano. E se i fatti, che son come i titoli onde germignano i dritti e i doveri, vanno pur soggetti a cangiarsi di luogo a luogo, e di tempo a tempo, dovrà poi sempre esser immutabile la ragion delle leggi, val quanto a dire la conformità del giure ai fatti. E però si vede ancora che l'Hègel involuto com'è nel suo idealismo trascendente, dice che la quantità della pena non si potendo aver rispondenza con alcuna determinazione dell'idea, avesse ad esser arbitraria. Mentre è e sarà mai sempre eterna ragione proporzionata di ogni penalità, la quantità del dolo del misfattore, e del danno cagionato dalla delinquenza, avuto anche riguardo all'entità della spinta criminosa che si vuol rintuzzare. Si vuol ben distinguere l'arbitrio delle leggi positive e la imperfezion che pur le accompagna, e onde elle disbrigar si possano. La imperfezione è tutt'altro che l'arbitrio. Questo suppone che si possa disporre ed assestar le leggi a suo libito, passandosi del diritto, mentre far legge positiva non suon'altro che particolarizzare e ordinar la legge naturale. E al pari che quest'ultima, dee quella essere magistero d'intendimento e di ragione.

E ogni legge positiva, che non si tenga al dettato della ragion naturale, è tutt' altro che legge. Per il trasformarsi che fa il diritto in legge, non è già ch' egli si venga determinando veramente nella sua obbiettiva esistenza. Il diritto esiste obbiettivamente ancor prima di questa trasformazione, e l' obbiettività del suo dettato è indipendente dalla legge. La imperfezion poi delle leggi positive è un fatto accidentale, il quale a poco a poco vien corretto dal vero progresso, che istà segnatamente in seguitar la direzion della legge naturale, e in effettuar la nozione del dritto. Sol ne rimane quella parte d' imperfezione, ch' è invincibile, val quanto a dir il non tener conto parecchie volte le leggi umane di certe particolari condizioni dell' individuo, appunto perchè dispongono per forme generali, e non per ispezie singolari. Ma tutto questo discorso non potendo capir nell' ordito inesplicabile della sua idea e nelle fatali evoluzioni dell' assoluto, Hegel con tutta la sua appariscente moralità, dopo d' aver iscavalcato il diritto, venne di conseguente a torre alle leggi positive gran parte di lor dignità. E questo stesso arbitrio come principio del dritto osservasi, d' una maniera assai palpabile, posto da Federico Guglielmo Schlegel in quel *Io* individuale, elevato da lui alla dignità di Dio in rapporto al bene e al male, sicchè il bene è un riflesso della persuasione dello spirito, e da esso ripete la sua forza, e lo spirito a sua balia lo crea e l' annulla. E s' allogando il bene e 'l male nella subbiettività dello spirito, e nella propria persuasione, o lor togliendo ogni obbiettività esterna, il diritto non più s' imperna in su l' assoluto e 'l necessario, ma sul contingente ed arbitrario.

Questo stesso progresso all' infinito, in cui al diritto assegnasi per suo primo principio l' arbitrio, è venuto fuorviando eziandio la ragion del dominio in una non si sa quale generale ed egual ripartizione di beni, altrettanto fallace nell' ordine dello scibile, quanto d' impossibile riuscimento nell' ordine de' fatti. E però s' è andato, non è guarì, istabilendo una economia politica, isfoggiante siffattamente di metodi al tutto nuovi ed insoliti, che si è rimasa pur tronca e spenta quella nobilissima cognazione che la strignea con la giureprudenza. Una volta che l' economia politica mente la proprietà, e in luogo di lavorar su di quella, la va quà e là perversamente rinnegando, ogni legame col dritto fia d' uopo che cessi, e l' utile dal retto di paventoso intervallo

si disgreghi. E si repugnando fra loro queste due parti dello scibile, che pur compongono due discipline concrete ed attive, non fia più possibile d'ischivar l'una o l'altra di queste due assurdità. O il libero arbitrio agisce a ritroso, e mentre nella giureprudenza va regolando secondo la misura del vero e dell'equo le utilità materiali, nella economia politica, queste utilità medesime distribuisce d'una guisa tutto affatto erronea ed iniqua. Di che la pugna scientifica dell'onesto e dell'utile, e il ridestarsi l'antagonismo delle due scuole, l'una drizzata al vero e al giusto, al buono e al bello morale, di cui è poi conseguente l'utilità e la convenienza sociale; e l'altra all'utile e al bene materiale rivolta, come a ragion di fine e non di mezzo. Ovveramente, non potendo, per la natura delle cose, una parte dello scibile esser unque mai in contrasto con un'altra parte dello scibile medesimo, avvegnachè al postutto la scienza è una, e la varietà delle sue branche non è se non che un metodo più atteggiato al nostro intelletto per meglio istudiar in essa, e il farnetico di quel progresso avversante al diritto di proprietà vie più s'appalesa. E per certo, questa utilità materialata, che tanto mettesi innanzi, e ostentasi per tanti versi, perciò appunto non consiste, nè razionalmente nè effettivamente, in quanto che non s'adagia sul vero, anzi dal vero si diverge, da non ammettere per misura de' dominii che sè stessa, cioè l'utile, quandochè l'utile è la cosa ammisurata e regolata, e la suprema regola di esso non è se non che il giusto e l'equo, cioè il vero, ch'è l'ente stesso.

E quantunque dubbiar non si potesse in ogni trattazione delle cose giuridiche doverne il bene esser indispensabile elemento, perciocchè ogni diritto giuridico suppone un bene utile, o ch'esso vi si appresenti sotto la ragion del dominio o della libertà e della tutela di sè stesso e delle sue cose. Nulla però di manco, il bene nella sua più astratta considerazione è riposto in ciò ch'è desiderabile, e nel cui asseguimento il desiderio umano truova il suo termine. Or essendo il desiderio un movimento dell'animo, è tutt'affatto appropriata qualità d'ogni movimento, sì fisico sì morale, di rinvenir doppiamente il termine suo, cioè o dove veramente si compisce il moto, e quindi ne accade la quiete, ovver in quel ch'è come il mezzo, la cui mercè s'aggiunga poi all'ultimo fine. Onde seguita, che il

ben che s' appetisce dall' uomo , essendo costituito ora in ragion di mezzo, ed ora in ragion di fine, e poichè il mezzo mai non istà daporsi , ma per quanto al fin s' indirigga, il bene utile , come a dire e i dominii e le libertà e le tutele, al che tutta quanta, secondo un pensier classico di Vico, si riferisce la materia del giure, debbe andar coordinato al bene onesto, e dipendere da questo, come il mezzo dal suo fine , come il primo terminè del moto dal secondo in cui il moto si finisce, e succede la quiete. Il che vuol dir lo stesso, che le utilità caduche e manchevoli, le quali sono i beni materiati del giure debbono sottostare alla suprema ragione del giusto, che le viene equamente ripartendo. E però si avvisa come l'economia politica e la giureprudenza, che abbiám detto d'essere due parti dello scibile concrete ed attive , sieno altresì due scienze sorelle , le quali si truovano in stretta alleganza fra loro , e non saprebbero lavorar scompagnate , senz' addivenir l' una perversa e l' altra disutile. Perchè se la prima è la disciplina dell' utile sociale, l' altro è del buono e dell' equo. E se l' una è la volontà operosa per soddisfare a' nostri bisogni, l' altra è questa volontà stessa rattenuta ne' termini del giusto e dell' onesto , onde la coesistenza del singolo ben essere di uno col ben essere di tutti gli altri. E se l' economia politica negli atti della vita socievole ne viene additando le utilità, la giureprudenza ne monstra il decoro e la convenienza. E dal complesso dell' una e dell' altra disciplina , conglutinate in uno , si compone poi quella civil sapienza, onde le nazioni e gli stati si riconducono a perfezione.

Nè quì s' arrestano i mali , che la moderna panteistica metafisica del dritto n' è venuta arrecando in ordine alle discipline concrete e e altuose. Chè se acutamente indaghiamo, ci accadrà d'osservar come il non buono indirizzo, che per sì lunga tratta di tempo ha preso l' insegnamento del dritto positivo in Alemagna, non si rapportasse ad una cagion diversa. Certo che son troppo da stupire i faticosi studi e le ingegnose lucubrazioni che si sono in questa primiera parte del secol nostro intrapresi da' giuristi tedeschi , e intorno al dritto romano , e circa alle speziali legislazioni. Ma tutta questa copiosissima scuola non è riuscita così utile al vero progresso della scienza come a prima giunta si credea che fosse , appunto per questo che la parte speculativa ed astratta del dritto , o vi è stata falsamente pertrattata per il pantei-

smo in che s' avveniva , ovveramente v' è stata tutt' affatto negletta e preterita , per non accordarsi col vero ideale delle disposizioni scritte degli antichi e de' nuovi codici, su che s' andava elaborando. Ond'è venuto che cotal scuola incedesse in forma di lavoro sol esplicativo ed illustrativo del testo, qual esso si sia in sè stesso, accordando sì veramente fra di loro le varietà delle leggi con profonda erudizione , e obbliando di troppo la parte ideale e l' eterna ragione delle leggi. E però recar dovea in sè stessa il vizio della grettezza e della sterilità, che punto non si affà alla fecondissima vena de' tempi attuali, e puossi meglio nominarla d' erudita che di razionale , più d' istorica , che di dommatica, più atta ad isorgere il corso materiale dell' umanità qual' esso è stato nell' ampio elemento delle leggi , anzichè le supreme cagioni additar delle leggi , poste e attemperate di questa o di quest' altra guisa. Mentr' è grande, e anzi tutto preccellente uffizio de' giuridici insegnamenti, di venirne scrutando il diritto qual' egli è nelle sue primiere scaturigini e nelle native sue sembianze , per poi girne disaminando dove nel fatto le legislazioni umane vi si combacino , e dove se ne allontanino, e che sia da procacciare perchè dal diritto le leggi non si disformino. Senza questo , il metodo istorico con tutt' i suoi pregi e i suoi lenocinii mai non farà che la nozion del giure si svolga veramente nella società umana , e sarà in iscambio sol l' eco passivo delle fatali evoluzioni dell' assoluto. E' il falso di un cotal metodo se non pur tutto quanto traspare nelle singolari trattazioni della giureprudenza, n' è ben' altra la cagione. Non si deve ciò al metodo stesso, ma alla materie sopra di che il metodo ha dipiegato il suo lavoro. Non si dubita che i digesti delle latine leggi e i codici moderni delle più culte genti, generalmente parlando, sien sugosi di gran parte del più esquisito diritto, e quel che riman di fare è più opera di parzial perfezionamento, che di total costruzione. Perciò l' esclusività del metodo istorico non ha fatto pruova d' esser sì rea semenza che sen fosser mai sempre colti tutti gli amarissimi frutti. Ma certo che al genio della scienza ha pur tarpate le penne ; e quella possibil perfezione, a cui le discipline giuridiche debbon agognare, si è arrestata quando men era da disperare, e le legislazioni positive con tutto il buono , di che son ridondanti, non han saputo far gettito del cattivo che le insozza.

Delle leggi romane, egli è pur vero, il troppo e'l vano non si è traforato nella fabbrica delle moderne legislazioni, comechè queste pur vi avessero sì copiosamente attinto. I prudenti del giure romano che s' oltraron tanto nelle cose attenenti al diritto, dopo d' averlo determinato con mirabile speculativa, nelle applicazioni riusciron al pari felici, e i rapporti giuridici nascenti dalla varietà de' negozi e delle faccende civili vi si vedono ottimamente retti e governati. Se non che, presso loro, la nozion del diritto era come pedissegua e famulativa della politica, o ragion di stato che si voglia dire, e la maggioranza di questa impediva l' intera effettuazion di quello, facendovi l' una l' uffizio di scienza suprema, l' altro di scienza secondaria. Onde ne venne che non ostante quella bella definizione portane del giure e della giureprudenza, all' uno e all' altra fecer poi i giureconsulti asprissima offesa nella parte più vitale, val quanto a dire dove si trattava della personalità umana, la quale fu da loro sveduta per ben tre fiate, e sul conto degli schiavi, e de' plebei, e de' peregrini. A rispetto degli uni e degli altri non era da dispensar la sua ragione, *jus suum cuique tribuere*, e ogni magistero del buono e dell' equo, *ars boni et aequi*, si tacea. Si può dire sicuramente che nell' oblio della dignità personale dell' individuo fosse riposto il vizio radicale della vetusta civiltà. L' individuo e i diritti dell' individuo v' erano annichilati dal dispotismo della società. L' uomo quasi non contemplava la sua subbiettività, e non cercando in sè stesso, faceva ricorso alla società, che per lui costituiva il sommo bene. E però accadeva che la sorgente della giustizia paganica fosse la società medesima. E ne seguiva eziandio che l' equa espansion del giure là s' appalesasse più defettuosa dove più angusta si era la civil società, perciocchè era a quel tempo principio non contraddetto da nissuna gente, che le leggi non avessero a tener conto della giustizia nel rispetto di coloro che si truovavan collocati fuor dell' orbita della società.

E la dignità umana sì fattamente trasandata da' romani giureperiti, fu integrata dal cristianesimo, in aggiugnendo splendore a quel che nell' uomo è invisibile e spirituale, e in iscemando la illusione che ne cagionava la materialità dell' elemento sociale, e poi man mano sempre più cresciuta nel medio evo dal successivo esplicamento delle leggi della chiesa cattolica, insinattantochè nel ristauro legi-

slativo ch' ebbe luogo fra lo scorcio del trapassato secolo, e gli albori dell'attuale, non scomparisce totalmente l'interna distinzione fra cittadino e cittadino, e di molto non s'attutasse l'esterna fra nazionale e straniero. Ma in costruendo il nuovo edificio delle leggi quante cose alla vera e genuina nozion del giure non rispondenti, pur vi si traforarono! La legislatura di quell'epoca si riscontra con gl'influssi degli stremi aneliti della filosofia sensistica. Non era possibile che la ordinazione delle leggi sen fosse tenuta alla lontana onninamente. Fè gran riparo per certo il dritto romano, e la scuola che avea per lunga pezza di tempo lavorato sopr'esso, strabondante d'umanissime dottrine, ma la fallacia della metafisica allor signoreggiante, per quella stessa stretta alleganza che abbiám veduto d'intramettersi in fra le speculative e le pratiche discipline, di troppo s'inserì anch'essa nella recente struttura del corpo delle leggi. Or per lo scader di quella filosofia saria stato pur debito della scuola di girne riempiendo le lacune, e ammendando gli errori, movendo il processo perfezionativo da solide basi. Ma il panteismo metafisico, che incontinentemente sottentrò alla sensistica, avendo figliata una filosofia di dritto falsa e bugiarda, propagginato su di questa il magisterio degl'insegnamenti pratici e positivi del dritto, certo che aver non poteasi alcun ammeglioramento dal lato delle leggi. E come credere che avesson potuto prosperare, e più razionali riuscir le leggi, se il principe della scuola storica di Alemagna, il quale ha avuto poi per sì lunga tratta di tempo un proselitismo non discontinuato, vogliam dire Hugo, fe'tanti conati per rincacciar la proprietà privata fuor dell'orbita del dritto, fin la tassando come produttiva de' più rei e dannabili effetti, e appena conservandola quale un fatto materiale, ed un abito della vita socievole degli uomini? E cotesti principii abnormi non si vedono altrove elaborati che nelle dottrine metafisiche già prevalse in quella parte boreale dell'Europa. E ben si conosce che Hugo nel suo difficile aringo si prevalse soprammodo de' principii filosofici di Kant. E Fichte, che filosofando s'avvolse in tante panteistiche astruserie, s'incontrò anche egli nel sistema negativo della proprietà. Ed il Savigny, che tanto splendore aggiunse a cotale scuola, non ebbe alcun rattento in proclamando che l'epoca della codificazione ne additò lo scader della civiltà de' popoli. Pronunziato doppiamente falso. Perchè dal lato della

storia di tutt' i tempi e di tutt' i luoghi risappiam che il progredimento politico e civile di niuna gente mai non si è iniziato e indirizzato, innanzichè non fosse insorto chi alla fabbrica di un' acconcia legislazione avesse atteso. E i primi legislatori de' popoli furon pertanto tenuti in conto di uomini più maravigliosi degli eroi, e fra gl' lddi del paganesimo annumerati. E dal lato della scienza, non si potrà da senno richiamar in dubbio d' esser veramente grandissimo e nobilissimo sforzo dell' umano intelletto, quando l' elemento razionale svolgendosi nelle positive leggi d' una maniera certa ed inconcussa, si ponga in sodo la legge suprema del diritto e del dovere, e la licenza de' singoli si rifrenando possa coesistere la libertà di tutti. E se sottilmente indaghiamo nella primigenia scaturigine d' un tale apoftegma, che rinnega il vanto dell' opera più perfetta che fosse mai uscita dalla man dell' uomo, ci sarà facile di appunto là rincontrarla dove la filosofia tedesca avea già posto del giure il primo ed assoluto principio, val quanto a dir in quello spontaneo e libero svolgimento dello spirito umano. E per vero, il Savigny assumendo che le costumanze e le abitudini, quali esse si sieno, s'abbian mai sempre da rispettare come l' espressione del genio instintivo di una nazione, ne trae come conseguenza, che allor veramente sottentri la legislazione quando lo svolgimento della vita libera sia per difettare. Or in tutto questo discorso non altro concetto si coglie se non che la libertà, e non la ragione, costituisca il diritto. E però la libertà abbia ad iscapitar per ogni nozione che del diritto medesimo la ragione scritta ne venga additando.

E se quì vogliam fare le ragioni giuste, il metodo istorico puro, che nel suo apparato esteriore ne paia cotanto accline al principio del libero svolgimento dell' umanità, nel fondo rinnega a' popoli la propria spontaneità, e quelli vi si van raffigurando men com' esseri morali capevoli di libera attività, che quali esseri organici e fisici che si vengano fatalmente esplicando ne' grandi eventi dell' istoria. E per quanto un cotai metodo s' internando profondamente negli studi delle vetuste leggi avesse il viver civile dell' odierne genti posto in confronto col viver civile dei popoli antichi, coordinando così le condizioni di questi con le vicissitudini e il destin di quelle. Nulladimeno, questa scuola lasciata in balia del suo rigor sistematico, senza il sussidio dell' inne-

sto felice con la scuola filosofica, ha sperduto il vero indirizzo dell'uman genere, per non aver a capo delle sue investigazioni, come primo intelligibile giuridico, allogato il principio ideale ed immobile del giusto e del retto, tratto dall'intima natura dell'uomo. Forniti come sono gli uomini d'immensa attività, in isvolgendo le facoltà loro appalesano nuovi bisogni, e di nuovi rapporti civili e internazionali s'annodano, ed ogni mutazione s'opera con la coscienza d'esseri intelligenti e liberi. Or in tutto cosiffatto esplicamento, al bene ognor si aggiugne il male, e nel torrente degli avvenimenti l'equo e l'iniquo, il vero e 'l falso, il bello e 'l brutto, la virtù e il vizio son trasportati a muta a muta. E nella istoria certo che farebbesi non buon giudizio de' fatti sol vicinando i fatti stessi, e l'un per l'altro spiegando. Questo giudizio è materiale, gretto ed esteriore, e riuscirà di niun valore scientifico razionale ed estetico, se i fatti al diritto non si riconducano. Epperò, il diritto e la nozion più esquisita del dritto dee arbitrar de' fatti, e non già i fatti giudicar del dritto. E le leggi positive come altrettanti fatti van sottoposti al supremo arbitrio dell'universal giustizia, e non già questa dipende da quelle.

DISSERTAZIONE QUARTA

IL RISTAURO DELLE SCIENZE GIURIDICHE DIPENDE DAL RISTAURO DELLA LEGAL METAFISICA — AL DIRITTO S' APPARTIENE IL TRIPLICE MAGISTERIO, DI SCIENZA, DI SAPIENZA, E DI PRUDENZA CIVILE — UN COTAL RISTAURO DELLA VERA SCUOLA FILOSOFICA DEL DIRITTO IN ITALIA È SOPRAMMODO AGEVOLE.

Dalle cose tutte ragionate in questa e nelle antecedenti altre nostre disputazioni, è chiaro oggimai qual fosse l'adesione delle astratte alle concrete discipline, e come alla speculativa traesse dietro quantunque studio di scienza pratica e attiva. Onde si può far buon senno a divisar, come nell'error s' inchiegga un disegno mai sempre più vasto, e fornito di mirabile e paventosa estensione; essendo nel fondo medesimo dell'errore un germe fecondo di distruzione, al pari che nel fondo della verità esiste un germe feracissimo di superedificazione. Per lo che, da un primo errore convien che pur ne pulluli un altro, il quale ne dee poi andar germinando altri anco peggiori. Perciò tutto il conato dell'umano ingegno istà in esautorar il mendace imperio dell'errore per mezzo di quello legittimo della verità; e posciachè mal si adopererebbe chi intendesse a curar gli effetti senza risalir alle cagioni, si vuole per tanto come debito uffizio dello scibile iscorgere nella nativa colleganza degli errori dove si annidi quel primo, il quale è poi il generator di tutti gli altri. In ciò consiste il vero e più eccellente sapere, il qual'è propriamente gli effetti conoscere per le cause. E se a noi è incontrato d'intraveder che il panteismo filosofico n' avesse cagionata una filosofia del dritto ancor essa panteistica, la quale ha poi dispiegato i suoi influssi in su gli studi pratici del giure, così come sovra tutt'altre discipline concrete e attive, è di molta evidenza come non si possa per poco instaurar la scuola classica del dritto, se la legal metafisica anzi tutto non vi si raddrizzi. Or s'aspetta alla legal metafisica andar considerando come il diritto fosse a un tempo e scienza, e sapienza, e prudenza civile, e quindi le appartenenze di lui indagando sotto a un tal triplice riguardo, additarne la precellenza dell'alto suo magisterio.

Come scienza, al pari che ogni altra parte dello scibile, s'aggirando

nell'orbita della speculativa, debb'egli consistere nella ragion retta delle cose speculabili, *in recta ratione speculabilium*. E poichè si è appropriata natura del diritto di costituir norma dirigente e misura degli atti umani, vuolsi determinar la formola ideale di questa norma e di questa misura. E dovendo ogni misura esser omogenea alla natura della cosa che hassi da misurare, le azioni degli uomini non possono altra regola sostener che non fosse la ragione medesima, la qual gli informa, gli contraddistingue, e li colloca in una determinata specie, e per cui e non altramente agiscono eglino come uomini. E se la ragione è il primo principio degli atti umani, sol per ciò convien che ne fosse altresì la regola, in tutto l'ordine del creato essendo tutt'uno il principio e la misura delle cose. E poeciachè la natura delle cose è costituita dalla forma, per cui a cadauna cosa si vien come imprimendo la sua specie, l'ordine della ragione, e la natura dell'uomo fra lor si hanno relazione così intima e formale, anzi son tutt'uno, cotalechè non può se non che essere a seconda dell'umana natura ciò che s'asesta all'ordine della ragione, ed è converso alla natura umana avversar quel che dall'ordine della ragione discostasi. Ond'è che la ragione, e non la volontà imperiar debba in su gli atti umani, quella e non questa esserne la misura e la regola. Bene la volontà ne muove la ragione all'intellezion del vero, ma il vero conosciuto eh'è dalla ragione forma poi la legge che regge e governa la volontà medesima in tutt'i suoi liberi movimenti. E però la libertà dello spirito per quanto sia condizion essenziale della moralità e del dritto, mai non è principio e misura della moralità e del dritto. Quindi l'esplicamento migliore e progressivo del diritto non consiste nell'evoluzione possibile della libertà, bensì della ragione. Or la ragione dell'uomo non essendo se non che una partecipazione della ragione eterna, però la suprema regola del diritto è quella ragione medesima, di cui il lume si riflette nella mente dell'uomo mediante la concezion di alcuni principii per sè cogniti, i quali son poi come il germe, onde si generano i principii proprii e le conclusioni della scienza. Uno di questi principii naturalmente noti si è, che ogni uomo appetisce il suo bene, il che suona lo stesso che dire, ciascun uomo vuol conservar il suo essere di uomo. Un cotale principio è cognito dappersè, mercecchè il predicato rientra nella ragion del subbietto. Or il bene

di ciascun ente è quel che gli conviene secondo la sua forma , come per contrario il suo male è quel ch' esce fuor della sua forma. E la forma dell' uomo essendo la ragione, il bene di lui sta in ciò ch' è secondo la ragione , come il male in quel che alla ragione è contrario. Perchè dal principio appunto , che ogni uomo appetisce il suo bene , vedesi che l'obbietto e 'l fine del diritto è il bene comune di tutti , e non il bene singolar di cadauno , non potendo il bene individuale de' singoli accordarsi col bene comune , comprendendo invece il bene comune quello di tutti collettivamente considerati. E questo è veramente il bene della ragione, e non il bene del senso, quello ch' è l'obbietto dell'appetito intellettivo , cioè della volontà regolata dalla ragione , e non già quel altro ch' è l'obbietto dell'appetito sensitivo , il quale non è universale e comune , ma particolare e individuale. E però le utilità singolari e materiali e caduche , quali sono i beni sensibili , che s'apprendono dalla virtù sensitiva, non possono esser la causa finale , ma solamente la causa materiale o occasional che si voglia del diritto. Val quanto a dire , l' uomo com'essere composto eziandio di corpo ha pur mestieri delle cose materiate per soddisfare alle bisogne sue. In ciò istà la materie , su di che il diritto si adagia. In ciò al diritto si porge anco l'occasione perch' egli dispieghi l'autorità sua e i suoi influssi, in mantenendo la coesistenza del benessere di uno rimpetto al ben essere di un altro. I fini poi del diritto non sono cosiffatte materiate e particolari utilità , ma il bene universale di tutti. E la forma del diritto è la ragione medesima dell'uomo.

Determinato così nel ben comune , ch' è pur quello della ragione stessa , il fine del diritto , non è difficile d' altresì divisare come questo bene sia poi tutt' uno che l'essere. In qual che si voglia cosa s' intramette di bene quanto v' ha di essere , e per il difettar del bene si toglie eziandio alla pienezza dell'essere , dicendosi per essenza ogni ente buono da che rispond' egli al suo fine ; e 'l bene di cadaun ente si truova appunto in ciò che s' ha l' ente tutto quel che rilevi alla perfezion sua com' ente. E dappoichè le azioni non possono essere se non che proporzionate a chi le produce , la ragion del bene di quelle si riduce alla stessa ragion dell' ente. Ond'è che il diritto per rinvenir che fa l'obbietto e 'l fine suo nel comun bene , procaccia sì che l'essere di tutti sia mantenuto e preservato , a petto dell'in-

definito arbitrio dell'uomo , che potrebbe quinci e quindi menomarlo. E le azioni degli uomini le vien estimando secondo l'esser loro , val quanto a dir in ogni azione considera la bontà proporzionalmente all'essere che si conviene all'azione medesima. Ogni atto ha un' essenzial convenienza in sè stesso , la qual, regolata dalla ragione che n'è la misura , costituisce la giustizia che inchiude mai sempre una relazion di debito in verso degli altri. Or questa convenienza degli atti secondo la ragione si è ad un'ora la bontà e l'essere degli atti medesimi , e se per poco vien meno cotai convenienza per difetto o per eccesso, gli atti in isminuendo in bontà ne isminuiscono altresì nell'essere. Da tutto ciò conoscendosi con evidenza , che il bene comune , a cui tende il diritto , sia tutt'uno che l'ente , di leggieri si trapassa ad un'altra osservazione anch'essa di grande rilevanza scientifica , cioè che un cotai bene o essere riducasi al vero stesso intellettuale. Conciossiacosachè, il vero dell'intelletto non è se non che l'ente medesimo , e nell'intelletto il vero è in proporzione dell'ente , ed è misurato dall'ente. Dacchè una cosa è o non è si dice che la verità si truovi nel nostro pensiero. E la falsità hassi non sì tosto che o per eccesso si affermi quel che non è , ovveroamente per difetto si rinneghi quel ch'è realmente. Di che si deduce questa gran conclusione, che il diritto si ha per suo fine il vero stesso dell'intelletto. In altri termini, quel che conosce in ispeculando l'intelletto come vero , è quel medesimo che rinviene il diritto come buono , il quale vien poi proposto alla volontà come obbietto del suo appetito. Ond'è che il bene e il vero e l'ente nella formola ideale del dritto s'unizzano, ed hanno una stessa e medesima significanza scientifica.

Il magistero del diritto si è detto di sopra esser non pur di scienza , ma di sapienza , e come tale conviene ch'ei sorvoli anco più alto. È uffizio supremo di sapienza il giudicar della scienza stessa , e de' principii di cui ella si serve. E se la scienza s'indirigge , come ad ultimo termine , al vero del suo proprio genere. La sapienza vuol indagar il vero in un'orbita assai più ampia, cioè come termine postremo di tutto lo scibile , e considerare, come dicea Aristotile, *altissimas rerum causas*. E il giudizio perfetto ed universale delle cose perciò appunto che non bassi propriamente se non che per la risoluzione alle cause prime , ella legittimamente sopresta a tutte le scienze. Di

che seguita , che se il diritto come scienza conosce il vero nella sua relazion col buono , a satisfar poi il debito di sapienza dee altresì di questo vero e di questo buono intraveder la cagion primiera. Or se il diritto elaborando in sul principio per sè stesso cognito , che , ogni uom tende al suo bene assumesi per suo obbietto e fine il ben comune a tutti. E se il buono del diritto non è se non il vero dell' intelletto , e l' uno e l' altro non son che l' ente medesimo. Allor il diritto riuscirà sapiente quando giudicando di quel principio , onde piglia sua movenza , il venga risolvendo ne' suoi termini. A ciò fare avrà bisogno di lavorar in su la ragion dell' ente , e di tutto quel che all' ente si riferisce , appunto perchè il bene ch' è il suo obbietto , è lo stesso che l' essere. E in cosiffatta altissima indagine naturalmente incontrar si dee nell'idea del primo Ente ch' è la causa prima d' ogni altro ente. Quindi il buono del diritto, che abbiain ragionato d' essere tutt'uno che il vero e l'essere , si riconcentra come a suo ultimo terminè in Dio ch' è il primo Ente , onde fontalmente è causato ogni diritto. E questo primo Ente che nell' ordine speculativo è il principio d' ogni vero, nell' ordine pratico costituisce l' ultimo fine; e perciò il diritto comincia da Dio, e termina in Dio. E la stessa divina sapienza , la quale nell' ordine di tutto il creato ha la ragion di esemplare e d' idea, nell' ordine dei moti indiritti a un debito fine ha la ragion di legge. E questa legge, la quale soprasta alla nostra mente e al nostro animo , alla facoltà intellettiva e alla facoltà volitiva, e nomasi la verità stessa, è quella onde poi muover dee ogni altra legge secondaria, essendo fra più che muovono ordinatamente a un dato fine pur necessario che la virtù del secondo movente muova dal primo. Impertanto nel giure sapientemente si conchiude questa gran guarentigia del genere umano , cioè l' autorità d' ogni legge positiva fondarsi sopra l' autorità della legge eterna, e non già in sul libito e l' arbitrio degli uomini.

Ma il diritto è sostanzialmente operativo. Se da un lato, come scienza ha nell' ordine dell' intelletto speculativo rinvenuto il suo obbietto e 'l suo fine nel comun bene , nell' ordine dell' intelletto pratico è uopo che venga considerando tutto che al fin risponda , e 'l modo come asseguirlo , *quod est ordinatum ad finem*. Epperò il diritto è eziandio prudenza civile. Ed essendo ogni prudenza la retta ragione

delle cose che si voglian dagli uomini operare, *recta ratio agibilium*, dopo che il diritto ha determinati i fini dell'umanità, a riuscire poi pien di civil prudenza ha bisogno d'additar tutto che s'appartenga al social convitto, in rispondenza de' fini umanitarii. La prudenza civile è gran parte del diritto. In vano si sarebbero conosciuti i fini dell'umanità, se non si ponessero i mezzi atti a pervenirvi. In ciò tutta l'industria delle legislazioni positive, le quali senza perder di vista il grande obbietto del diritto, anzi a lui strettissimamente aderendo, ne debbon andar costruendo il colossal edificio de' civili instituti. E poichè ogni cosa, che ha rapporto ad un fine, è più perfetta quanto è più al fin medesimo proporzionata, però quelle leggi umane riuscireanno più giuste e perfette, che saran meglio informate del gran fine dell'umanità, val quanto a dir che racchiuderanno la più adeguata esplicazion del diritto. E questa esplicazione s'otterrà poi, o fosse in derivando da' principii della ragion naturale, a fil di logica, come altrettante conclusioni, certe conseguenze pratiche attuose e concrete, o fosse in determinando con esquisito accorgimento alcune cose in particolare sul tipo di talune generalità, cioè individuando ne' fatti sociali quel di che la natura ne porge sol come la forma astratta e universale. Così dal principio generale, che comprende la gran legge della conservazione del ben comune, e però del diritto di cadauno, si diduce la conclusione in ordine alla ragion della tutela di color che non possono dappersè custodir i propri diritti. Ma istabilir le tutele di questa o di quell'altra maniera, temperarle su d'una forma più presto che sopra un'altra, dilungarle più o meno, tutto questo è una determinazione che fa la legge civile circa alla ragion della tutela, che in astratto la legge di natura ingiugne.

Or tutto questo nobilissimo magisterio delle facoltà giuridiche, che per certo mai non s'otterrà, se gli studi metafisici in generale non saran raddrizzati, nella stessa Germania, dove il penteismo filosofico è stato così in voga e tuttavia perdura, di leggieri si potrà raggiugnere, se la retta e vera filosofia s'estolla a capo dello scibile giuridico. Imitando quel luminoso esemplare del Leibnizio, che con l'universalità del suo ingegno seppe ammogliar fra loro le varie scienze, e riuscendo ad un'or profondo filosofo e gran teologo, ed esimio ma-

tematico e giureperito precellente, anteponeva nulla di manco la filosofia ad ogni altra branca del sapere umano.

E nella nostra Italia è desso anco più agevole che altrove. Abbiamo già osservato di sopra, che il panteismo, al pari che il sensismo, mai non si è presso noi riuscito a trasformar in iscuola; che anzi queste ed infinite altre deviazioni dell' intelletto umano sono state, come si è testè mostro, ab antico divinate e rampognate con rigor filosofico dal più grande di tutt' i filosofanti dell' umanità vogliam dire da San Tommaso d' Aquino. Era però natural cosa che appo un tant' uomo le morali e giuridiche discipline s' avessero avuto un incesso eguale alle metafisiche, e le une e le altre foversi unite di legame strettissimo, anzi come altrettanti rami s' annestassono in sul tronco stesso, ad un tempo vi s' affisasse il vero della metafisica e della teologia, e l' evidenza della logica, il buono e l' equo dell' etica, e l' utile della politica, e il bello della estetica. Nè potea andar altramente la bisogna, quando si pensi che al postutto, come abbiain più fiate ripetuto, il vero della metafisica non sia disforme dal vero del diritto, essendo pur uno il vero, a cui se la metafisica in ispeculando aderisce come in ragion del suo primo principio, il diritto in operando vi s' attiene come in ragion del suo ultimo fine. Or niuna più annemigliorata scuola del diritto puossi rinvenir che non sia quella, dove la dirittura de' fatti ci venga annmisurata dalla ragione stessa della legge naturale; dove di questa natural legge si dia la più alta e più vera definizione, e più ampia, e meglio atteggiata a regolar tutt' i rapporti giuridici, qual' è quella appunto portane dal medesimo San Tommaso, che fin la nomina partecipazione fatta alla creatura ragionevole della stessa mente di Dio. Dove, secondo lo stesso filosofo, ormandosi le medesime altissime dottrine, la legge civile è detta l' ordinazione della stessa ragione diretta al ben comune, e promulgata da chi ha la cura della comunità. *Quaedam rationis ordinatio ad bonum commune, et ab eo qui curam communitatis habet, promulgata.* E quale altra definizione in tutt' i libri de' giureconsulti e dei filosofi rinvenir mai si possa, la quale per l' ampiezza e precellenza d' origine, e per l' esattezza di formola, stia al paraggio di quella? E chi la genesi e 'l fondamento e la natura del giure ha indagato meglio che non ha fatt' egli nel suo celebre trattato delle leggi?

Non saprei immaginar puntello più stabile , e rocca più incrollabile, per costruirvi sopra il grande edificio delle leggi sociali , che non sia quel dov'egli superedifica. Con una catena di oro, oh quanto più maravigliosa di quella con cui il Giove Omerico legava le terrene e le celesti cose , dopo d' aver unizzato il giusto umano e 'l retto della ragione , il retto stesso della ragione va ripescando nella legge di natura , e l' una e l' altra ragione rappicca poi alla ragion eterna , ch' è la mente stessa di Dio. Onde la gravità veramente scientifica di quella dottrina ammoderatrice di tutti gli atti di quaggiù , e regolatrice d' ogni positiva legislatura , e d' ogai parte della legislatura medesima. *In rebus humanis dicitur esse aliquod justum ex eo quod est rectum secundum regulam rationis. Rationis autem prima regula est lex naturae. Unde omnis lex humanitus posita in tantum habet de ratione legis , in quantum a lege naturae derivatur ; si vero in aliquo a lege naturali disordet , jam non erit lex, sed legis corruptio.* In tutto questo la moralità degli atti umani ne dee gir necessariamente supponendo i due termini della libertà e della legge , la subbiettività e l' obbiettività , e per la conformità o disformità degli atti liberi dalla legge si fa ragion della bontà o pravità degli atti medesimi. Onde si vede come una cosiffatta filosofia non s' incontri nè punto nè poco con la sensistica , conciossiachè quella in rinnegando lo spirito mettea il corpo e le affezioni del corpo come determinazion del dritto, e quindi da un tal sistema era profligata ogni libertà. Molto men si affà col panteismo , essendochè questo di troppo concedendo al libero arbitrio , da condizion ch' esso sol è della moralità degli atti , il traduce a causa formale della moralità e del diritto. Se pur la libertà medesima potesse attecchir in un cotal sistema , il qual mette radice nella sustanza unica e identica , e nelle fatali evoluzioni dello spirito.

E Giambattista Vico , la cui metafisica abbiain veduto quanto fermamente s' impervi in sul vero eterno ed immutabile , per le ragioni medesime ne dovea andar recando studi al pari precellenti nelle altre sue filosofiche elucubrazioni. Ond' è che non s' ammira quanto basti il genio della sua legal filosofia in quella stupenda opera dell'unico principio e del fine unico del diritto , nella quale vien egli lavorando i principii della giureprudenza su l'intinua conoscenza dell'uma-

na natura , e però vi si vedon dessi rampollar con logica deduzione da quello stesso primo vero che avea posto alla base delle sue metafisiche speculazioni. Dopo d' aver egli preposta la distinzione delle due sustanze , l' intelligente e la corporea , vien allogando nel corpo , e in tutto ciò ch' è attenenza del corpo , le sole occasioni , e non le cause delle idee eterne delle cose che si destano nella mente. E però non solleva le manchevoli e sensate utilità a capo del diritto , bensì l' equo e l' onesto , ch' è incorporeo ed immateriale , e rientra sol nelle appartenenze dello spirito. E con alla mano tal luminosa face ne va poi addomandando i diritti del nome d' altrettante idee , e viene così legittimando que' placiti della giureprudenza romana , esser cioè i diritti indivisibili , andar soggetti bensì ad estinguersi non già a rompersi , e benchè i corpi nel tempo nascessero e nel tempo si finissero , non esser per altro il tempo nè modo di costituire nè di dissolvere le obbligazioni , e con l' animo i diritti procacciarsi e conservarsi e alienarsi. E dall' altro lato , avendo riconosciuta l' intera e intima natura dell' uomo in quelle sue tre facoltà , di conoscere di volere e di potere , queste facoltà le pone come limitate e finite , e però distinte dall' Ente Infinito . a cui l' uom tende con le facoltà medesime. E da Dio dice altresì tutto derivare , e in Dio tutto far ritorno , e in Dio ogni cosa aver permanenza. E quegli stessi più generali elementi di tutto il diritto , cioè il dominio la libertà e la tutela , che fa rampollar da cotali facoltà , vi sono ammoderati dall' equa ragione , cioè dal lume sfolgorante dal primo vero. E però , viene questo gran filosofo al pari ischivando l' uno e l' altro scoglio , in che s' incontra ogni metafisica del dritto , quando non è ben raddrizzata , il sensismo e il panteismo , cioè la manchevole utilità sollevata al grado di signora delle cose giuridiche , ovvero il libero arbitrio , ch' è sol la condizione della moralità , trasformato nella causa formale della moralità medesima. Ed elaborando poi nella scienza nuova sopra gli stessi dati della metafisica , si fa a tracciar il corso reale dell' umanità non disforme dal corso ideale , e v' appare la società non più come il prodotto , o fosse de' soli moti volontari dello spirito umano , ovvero delle fatali evoluzioni dello spirito medesimo ; ma di conserto v' ottiene il debito posto il libero arbitrio dell' uomo e l' ordine provvidenziale di Dio. E l' idea e il fatto s' accordano di trami-

rabile armonia , la filosofia e la filologia vi s' uniscono allo stesso scopo , e 'l metodo istorico non va iscompagnato dal metodo razionale.

E attignendo in queste purissime sorgenti della metafisica di San Tommaso e di Vico, si è venuto poi producendo tale un proselitismo filosofico in tutta Italia, che mai non è mancata la tradizione delle buone dottrine. E oltra a tant' altri studi di scienze pratiche e concrete , si è riuscito a fondar una adeguata e gindiziosa filosofia del dritto , apprezzandolo qual' esso si è nella primigenia sua natura , e fin determinando poi con egregia esattezza i rapporti giuridici che ne derivano , nelle varie condizioni dell' umanità. Nè questa scuola nostrana del giure filosofico ha mai insegnato , come Montesquieu e Bentham , esser la legge civile la sorgente della proprietà , pessimamente confondendo la proprietà e il diritto della proprietà , ch'è di ragion naturale , con la guarentigia e l' organamento della proprietà; che son l' opera del civil convitto. Nè ha dettato d' esser un semplice istituto civile la ragion della successione intestata e testata , come Kant e Fichte. La qual purezza di dottrine giuridiche certo ch' è un portato legittimo di quel principio , per cui diritti si son avuti in conto di cose incorporee necessarie ed eterne , e non già come materiali e contingenti. Ed è soprammodo gradevole d' osservar come non pur in Italia , ma oltramonte ne vada ripullulando il gusto della vera filosofia. E se in quella si cerca con tanta alacrità di procacciar quinci e quindi la più compita edizione delle opere di San Tommaso, ben altrove alla migliore e più eccellente esposizione della filosofia dell' Aquinate è stato posto , non è guarì , condegno guiderdone. Ed in Italia , e fuori , la storica filosofia e la legal metafisica e gli studi giuridici del Vico , dove penetrati insino al midollo , dove sol per la corteccia pregustati , dove esplicati con mirabil maestria , dove frantesi , là seguitati più alla discoperta , quà men palesemente , han stampato nel secol che corre il genio della storia ideale dell' umanità , e della filosofia della istoria , e del diritto.

Per lo chè , disaminata sottilmente ogni cosa, possiam oggimai dedurre di questi nostri studi la final conclusione ne' seguenti pronunziati : 1.º È grande ed irrecusabile l' alleanza delle discipline metafisiche con le discipline giuridiche. 2.º Torce al peggio la scienza del giure , non che il sensismo già esautorato , il panteismo filosofico che

tuttavia signoreggia. 3.º Ad instaurar la più scientifica e prudente e sapiente scuola del dritto, si vuol anzi tutto ammendar l'indirizzo delle speculazioni astratte. 4.º Rettificati gl'insegnamenti della metafisica in San Tommaso, la scuola filosofica del dritto, deesi, quanto è a' sommi principii, derivare dalle opere medesime di lui; e più in particolare dalle opere di Giambattista Vico, onde una vena fecondissima isgora di teorie non periture, che son destinate a riconstituir la sola e vera e classica scuola del giure. 5.º Sol da questi studi seriosi ed elevati puossi invigorir la trattazione delle cose giuridiche, e la spicciolata giureprudenza indigena e oltramontana può sperarne il suo civil miglioramento. 6.º Di cotal guisa, la certezza della scienza astratta e generale del giure scaturirà dalla certezza de'sommi principii; e in particolare le conclusioni pratiche e concrete della scienza medesima, se da un canto si racquisteranno una pari certezza per il poter che s'avranno di risolversi in que' principii, ben dall'altro stupirem i copiosissimi elementi di cultura e di civiltà che man mano si verran esplicando dall'intima relazion di cotai principii e di cotai conclusioni.

MEMORIE MATEMATICHE

PRESENTATE

DA' SOCI ALL' ACCADEMIA NELL' ANNO 1837.

E DA ESSA APPROVATE.

INTORNO
AD ALCUNE SINGOLARI APPARENZE

DEL PIANETA GIOVE

OSSERVATE DURANTE LA SUA OCCULTAZIONE DIETRO LA LUNA,
E PROVA DELL'ESISTENZA DI UN'ATMOSFERA IN QUEST'ULTIMO ASTRO.

MEMORIA

DEL SOCIO ORDINARIO

ANTONIO NOBILE

Le occultazioni dei pianeti dietro la Luna, se mal non mi avviso, non arrecano grande utilità alla scienza degli astri quando l'Osservatore intende solo a notare, come ordinariamente vien praticato, i tempi in cui avvengono le immersioni e le emersioni, o qualunque altra fase di quel fenomeno. Al contrario, sembrami sopra modo importante ch'ei ponga ben mente alle varie apparenze dei due astri, sì in quanto alla luce e sì alle forme che essi van presentando, potendo da quelle apparenze emergere preziosi dati da rischiarare qualche punto intorno alla natura fisica degli astri involta in dense tenebre.

Con tale intendimento mi feci ad osservare l'occultazione di Giove del 2 gennajo del corrente anno. I fenomeni che ne colsi van riferendo ed aggiungendo altre particolarità a quelle per avventura notate da altri Astronomi; e, poichè io son di credere che, infra le altre cose, alcune di esse siano per porgere forti argomenti in prova dell'esistenza di una debole atmosfera intorno alla Luna, io mi farò, innanzi tratto, ad esporle a parte a parte, col medesimo ordine col quale furono per me osservate, e dipoi a farne breve commento.

*

I.

Esposizione delle osservazioni.

Le osservazioni furono eseguite nel Reale Osservatorio astronomico di Napoli con un rifrattore di cui l'apertura è di pollici 7 $\frac{1}{2}$, e la distanza focale di piedi 9. Questo istrumento, opera pregievole di Fraunhofer che l'Osservatorio possiede da gran tempo, essendo stato nella sua origine non solidamente equilibrato nei suoi sostegni, e dipoi improvvidamente situato in una sala a pian terreno dell'Osservatorio medesimo, manca di quella stabilità che addimandano le delicate osservazioni di misure, ed è forza, per drizzarlo al cielo, che si trascinasse a gran fatica fuori una terrazza all'aria libera. Ciò non ostante, mi riuscì in quel giorno di adoperarlo, e lo ingrandimento di cui feci uso si fu di 240 volte, non permettendone lo stato dell'atmosfera altro maggiore.

Il cielo, che era stato totalmente coperto da nubi nel corso del giorno, divenne pressochè sereno nel tempo della occultazione; e, benchè qualche leggiera nuvola a quando a quando ne togliesse la vista dei due astri, nondimeno negli intervalli di visibilità chiaramente apparivano, e la parte oscura della luna rischiarata dalla luce cinerea pur molto distintamente vedevasi, e però le osservazioni non mancaron del tutto.

Appariva Giove ben definito nel suo contorno, e quando trovavasi alquanto lontano dalla Luna, prima della immersione e dopo la emersione, la figura alcun poco allungata, ovvero l'effetto del suo schiacciamento, appariva sensibile ai miei occhi.

Nel tempo del primo apparente contatto di Giove col lembo oscuro ma visibile della luna, ovvero nel momento preciso che ebbe principio la immersione, non mi fu dato di osservare; ma, segnando poscia attentamente il progresso del fenomeno, pochi secondi dopo quella prima fase, quando cioè il diametro del pianeta si era immerso intorno ad $\frac{1}{6}$, mi avvidi che il pianeta medesimo subiva una leggerissima e parziale trasformazione: mi parve allora che la sola parte del suo disco presso a quello della Luna, e propriamente tutta la parte immersa insieme ad

una piccola zona apparentemente in contatto col lembo della Luna, si fosse alcun poco gradatamente rialzata e ristretta in maniera da farne sembrare alquanto minore la lunghezza e la curvatura del suo corrispondente contorno (*fig. 1, a*).

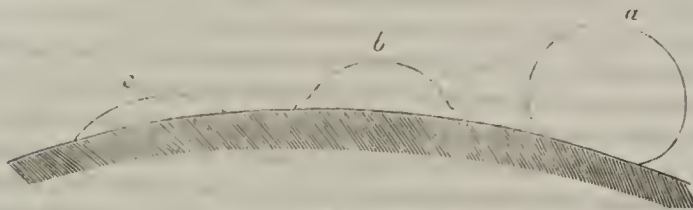


fig. 1.

Una osservazione fatta prima di me dal Barone Dembowski ha molta analogia con questa qui esposta (1).

Tale trasformazione, dopo aver toccato il suo colmo, andò secondo che la immersione approssimavasi alla sua metà; e quando quest'ultima fase ebbe luogo, non era punto riconoscibile trasformazione alcuna, sembrando allora inalterata la metà del disco del pianeta.

Passata questa metà della immersione, vi fu un momento che mi sembrò di vedere un lieve avvallamento in ciascuno de' due lati dell'orlo, e alcun poco allungata una piccola zona sottoposta, e segnatamente quella confinante col lembo della luna (*fig. 1. b*).

Ma, quando il diametro di Giove rimase fuori del nostro Satellite intorno ad 1/5, e anche meno, tutto il suo lembo visibile presentava una curvatura minore di quella che prima si aveva; o, ciò che torna lo stesso, gli estremi del corno mostravansi alquanto allungati, e tutto il suo contorno, o arco visibile, sembrava appartenere ad un cerchio di maggior diametro (*fig. 1, c*). Ho trovato (2) che il Confield, astronomo inglese, aveva già notate simili apparenze in una occultazione di Giove del 1824.

Non avendo potuto osservare le immersioni dei due satelliti che

(1) *Astronomische Nachrichten* n. 1043. Altona 1856.

(2) Vedi *Atti della Società Astronomica di Londra*, V. II. p. 89.

precedevano Giove, presi ad osservare quelle dei due satelliti che lo seguivano nel lato opposto. Giunto uno di essi presso l'orlo della luna, non scorsi diminuzione sensibile di luce; ma, in vece, appena ebbelo raggiunto, pochi momenti prima di immergersi, lo vidi in parte sovrapposto alla Luna, come se situato fosse tra questa e la terra. Il medesimo fenomeno mostrò l'altro satellite nella sua immersione.

L'emersione di Giove dalla parte luminosa della Luna mi parve che presentasse, con ordine inverso, le medesime apparenze che ebbero luogo nella immersione; se non che mi sembrarono molto meno distinte, e spesso impercettibili, probabilmente a cagione di un leggiero tremore del cannocchiale mosso allora da debole vento. Ma, intanto, quel tratto dell'orlo della Luna sovrapposto a Giove appariva ai miei occhi più depresso del resto; o, per dir meglio, una tal parte della linea circolare formante il contorno luminoso del nostro satellite, sembravami alquanto più vicina al centro, e limitata da una linea alquanto sottile ed oscura (*fig. 2*).

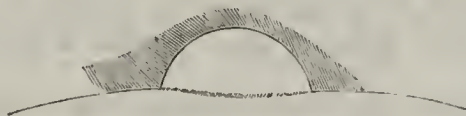


fig. 2.

II.

Considerazioni e conseguenze.

Dando principio alla disamina de' surriferiti fenomeni dall'ultimo di essi, il quale fu, nel medesimo tempo, pur ravvisato dal chiar. collega Capocci con un cannocchiale dell'Osservatorio di Marina, dirò che quella maggior prossimità al centro della Luna della parte del suo orlo luminoso sovrapposto a Giove è da crederla fenomeno subbietivo anzi che obbietivo. Tutti sanno che i corpi luminosi che si proiettano

su di un fondo oscuro ne sembrano alquanto ampliati per opera di una luce fittizia che dipende dall'organo della vista. E questa luce fittizia, questo effetto di irradiazione, non ha luogo quando il corpo luminoso proiettasi su di un fondo egualmente luminoso. Posto ciò, il fenomeno testè riferito potrebbe esserne la legittima conseguenza: imperocchè la parte dell'orlo luminoso della Luna proiettata sul fondo oscuro del cielo, ammesso l'effetto della irradiazione, dovrebbe estendersi nel cielo medesimo e invaderlo alquanto; e l'altra proiettata su Giove dovrebbe apparirne col suo vero termine. Non sarebbe egli da attribuire quella apparenza ad un lieve effetto di irradiazione? E, d'altra parte, la linea di colore oscuro sopra menzionata non sarebbe ella un effetto di contrasto, e, segnatamente, ciò che in ottica appellasi aureola accidentale?

In quanto all'apparente sovrapposizione del satellite sul disco della Luna pochi momenti prima della immersione, è questo un fenomeno osservato in altra simile occultazione dal Ramage (1), ed è della medesima natura di quello notato da molti Astronomi nelle occultazioni di stelle dietro la luna, e che una volta pur si offerse alla mia vista. La spiegazione di quest'ultimo fatto più generalmente accolta dagli Astronomi, poggia su la possibilità che la stella si possa talvolta vedere attraverso le scabrosità dell'orlo della Luna, ovvero tra la gola di due de'suoi monti, molto più che spesso, osservatori in luoghi diversi, non videro la medesima cosa.

Simiglianti apparenze per me e per altri notate ne' satelliti di Giove, quelle non diverse osservate dal Capitano Ross nell'occultazione di Urano nel 1824 (2); e più di tutto, le altre della medesima natura viste dal Ramage in Giove le cui dimensioni sono molto estese, escludono del tutto quella spiegazione. Da ciò segne che i due surriferiti fenomeni, quello cioè delle stelle, e l'altro de'satelliti e pianeti, o sono di ordine diverso e procedono da cagioni diverse, il che non sembra probabile, o l'allegata spiegazione non è da ammettere.

Lahire attribuiva quella apparenza, nel caso delle stelle, ad una luce parasita che circonda l'orlo lunare, attraverso della quale fossero

(1) *Atti della Società Astronomica di Londra* V. II.

(2) *Atti della Società Astronomica di Londra*, Vol. II.

visibili le stelle; ma l'Arago credè, più di ogni altra, probabile questa spiegazione, a condizione nondimeno che quella luce parasita non si abbia ad avere quale effetto di irradiazione, ma in vece una conseguenza di una visibilità non distinta per non esser l'oculare esattamente al fuoco. Il surriferito fenomeno di Giove, apparentemente soprapposto alla Luna, sembra favorevole a questa opinione del celebre Accademico francese.

Venendo alla parte principale di questo lavoro, e però alla disamina delle innanzi descritte trasformazioni viste nel pianeta Giove presso l'orlo della Luna, diremo, che di esse tutte può molto acconciamente e minutamente dar ragione una leggiera atmosfera lunare; perocchè, se ben si ponga mente, son tali coteste deformazioni, quali appunto per avventura avverrebbero se quella vi fosse, e se i raggi luminosi vi subissero una inflessione quando van rasentando la superficie del nostro satellite.

Ed in vero, se ci facciamo a considerare che cotale atmosfera aver deve per effetto indubitabile il rialzare o allontanare più o meno dal centro del nostro satellite secondo le diverse posizioni, quei punti in cui raggi vanno ad immergersi in essa, e quindi renderne anche visibili di quelli che nella sua assenza ne sarebbero invisibili; e, d'altra parte, se poniamo ben mente che son tali le dimensioni di Giove, che, trovandosi esso presso l'orlo della Luna, non tutte le sue parti veggonsi per via di raggi che rasentan la superficie di quest'ultimo astro; ne segue che hanno ad aver luogo, nella ipotesi di un'atmosfera, diverse trasformazioni, secondo le diverse posizioni di Giove, e secondo le varie parti del medesimo che patiscono deformazione, o che rimangono inalterate. Or, seguendo le norme de' surriferiti effetti di rifrazione atmosferica, se prendiamo a considerare le diverse forme apparenti che dovrebbe assumere il pianeta nelle varie fasi della sua occultazione; e, se rappresentiamo tali forme per via di una costruzione grafica anche ordinaria, ne risulterà evidente, esser l'effetto prodotto da un'atmosfera, simile a quello che ne porsero le osservazioni. Che anzi, l'assenza medesima di ogni mutamento di forma, quando il pianeta è per metà occultato dalla Luna, trova anche la sua spiegazione nella piccolezza dell'effetto deformante, che allora deve aver luogo.

Nelle figure qui esposte (*fig. 3*) ho dinotato con punti la parte dell'orlo del pianeta che gradatamente si rialza, con linee continue

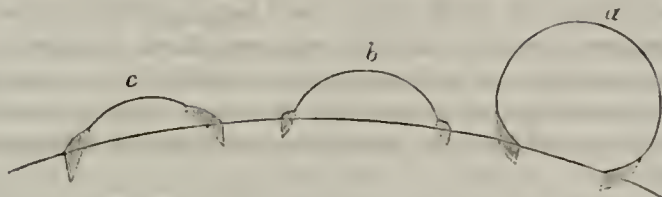


fig. 3.

quella che appare, e le ho congiunte con lincette, per mostrare, benchè grossolanamente, l'effetto progressivo della rifrazione.

Dopo un sì evidente accordo di tutte le diverse forme presentate da Giove ad un'attenta osservazione nelle surriferite sue diverse posizioni, con quelle dedotte dall'ipotesi di un'atmosfera lunare, non sarebbe egli strano il non ammettere l'esistenza di un fluido aeriforme, benchè leggerissimo, intorno al nostro satellite? Nè d'altra parte, ne sarebbe, a rigor di logica, permesso il rivocare in dubbio o attribuire ad illusioni i fenomeni dai quali traggio cotale importante conseguenza, chè, ancor più strano sarebbe che una serie di fenomeni per me scrupolosamente osservati, e, prima di me, visti e descritti senza darne spiegazione alcuna, parte dal Confield e parte dal Dembowski, fossero una serie di illusioni, e nondimeno tali da concorrer tutte a porgerne gli effetti medesimi di una rifrazione astronomica, e però a svelarne una origine comune, un comune legame con un principio teorico che non può altrimenti supporle che fenomeni essenzialmente obbiettivi.

Molto dibattuta e di gran momento si è la quistione dell'esistenza o non esistenza di un'atmosfera lunare, come quella che stimola la curiosità de' sapienti, e tende ad estendere le analogie tra i pianeti, la terra, e l'astro che più a questa si avvicina.

Uno dei più forti argomenti in prova dell'assenza di un'atmosfera lunare, lo traggono gli Astronomi dalle occultazioni delle stelle.

Lo intervallo di tempo che corre tra la immersione e l'emersione di una stella è dentro strettissimi limiti, eguale al tempo che la Luna impiega a percorrere nel cielo un arco che risponde ad una data corda del disco lunare. Da ciò s' inferì, che i raggi partiti dalla stella e che giungono ai nostri occhi, dopo aver corsi rasente la superficie della Luna, non patiscono inflessione alcuna sensibile. Ove si voglia supporre un'atmosfera, una rifrazione di quei raggi, dovrebbe essa abbreviare la durata del fenomeno, ritardando l'immersione ed anticipando l'emersione.

Ma questa pruova non parmi che basti ad escludere del tutto l'esistenza di un'atmosfera. La quale potrebbe essere tanto debole da rendere la differenza di quei due tempi di un'ordine inferiore all'errore delle osservazioni, o all'incertezza intorno alla corda del disco lunare.

Un'altra pruova dell'assenza di un'atmosfera lunare la quale ha fatto peso nell'animo degli Astronomi, muove dal non essersi mai vista alterazione alcuna nella faccia del nostro satellite o nelle sue particolarità, non solo trovandosi esso illuminato, ma anche quando la luce *cinerea* ne permetteva la vista. Ciò, a rigore, fece aperto agli Astronomi, che se ci ha nella Luna un'atmosfera, deve questa non accogliere vapori e non esser mai offuscata da nubi come quella della terra.

Il celebre Schroeter, partendo da altri fatti, venne ad un'opposta sentenza.

Egli credette di ravvisare nelle alte sommità de' monti della Luna che si mostrano distaccate dalla linea luminosa durante il progresso della sua fase, una luce tanto meno viva per quanto più sono esse lontane da quella linea. Da ciò, e dalle apparenze di un debolissimo chiarore che una sola volta vide nel prolungamento delle corna del crescente lunare, e che gli sembrò una luce crepuscolare, ne inferì l'esistenza di un'atmosfera nella Luna. Nondimeno di questa conclusione dello Schroeter non si tennero contenti gli Astronomi, poichè ella fu tratta da osservazioni su le quali molto piono le illusioni, e che non ebbero mai riscontro veruno.

Il Ramage, avendo osservato, come innanzi dissi, in una occultazione di Giove, una parte di questo pianeta sovrapposto alla Luna dopo

averne toccato il lembo, ed avendo eziandio osservato il medesimo fenomeno pochi momenti prima della immersione totale de' satelliti, credette di vedere in questi soli fatti l'effetto di una inflessione di luce prodotta dall'atmosfera lunare. Ma l'effetto di una inflessione di luce conseguenza di rifrazione non consiste punto nel ravvicinar l'astro alla Luna, e farlo sembrar sovrapposto ad essa, ma è precisamente il contrario; e però, l'esistenza di un'atmosfera nella Luna non può venir dimostrata da quel fatto testè riferito, se pur non si voglia supporre, contro ogni ragione, un'atmosfera negativa; o, in altri termini, un'atmosfera che fosse men densa dell'etere che la luce va attraversando nei spazii planetarii.

Da tutto ciò che fin' ora dissi mi sembra poterne dedurre che le uniche, o almeno le più convincenti pruove della presenza di un'atmosfera nel nostro satellite, siano appunto quelle che dianzi allegai, e che trassi dall'analisi delle mie e delle altrui osservazioni.

Nè possiamo, a ragione, opporre ad esse quelle medesime difficoltà di cui innanzi tenemmo discorso, le quali furon tratte dalle occultazioni di stelle, e che determinarono gli Astronomi ad una contraria sentenza; imperocchè, volendo anche ammettere che l'atmosfera della Luna sia tale da cagionare una rifrazione orizzontale intorno ad un minuto secondo, torna essa tuttavia sufficiente a determinare riconoscibili trasformazioni in un pianeta che trovasi presso l'orlo della Luna, ma non è punto sufficiente a manifestarsi per via delle occultazioni di stelle.

Nondimeno, se le allegate pruove non siano per arrecare nell'animo altrui quella convinzione che si è formata nel mio, e se esse non valgono a mettere in sodo un principio teorico cui tien dietro una importante dottrina; potrà questo mio lavoro tornar utile a richiamare l'attenzione degli Astronomi su fenomeni che, meglio studiati, potrebbero condurre a rimuovere ogni dubbiezza intorno ad una quistione tanto vagheggiata da' filosofi di tutti i tempi, e che stimola non poco l'umana curiosità.

III.

*Proposta di un metodo per riconoscere e misurare
l'atmosfera lunare.*

Farò fine a questo lavoro col proporre agli Astronomi che posson disporre di potenti ed opportuni apparati ottici, e che molto si sono esercitati nelle delicate misure micrometriche, un sistema di osservazioni, per via del quale, mi sembra, che non solo potrebbe venir altrimenti provata la presenza di un fluido aeriforme intorno alla Luna, nel caso che vi sia, ma ancora di darne una prossima misura, traendola come conseguenza dell'effetto di rifrazione. In virtù delle leggi che governano la rifrazione astronomica, egli è fuor d'ogni dubbio che in una occultazione di Giove, se la Luna ha un'atmosfera, i diametri di quel pianeta i quali rispondono ai punti di contatto, sia nel momento preciso del principio della immersione, sia in quello della emersione totale, debbono riuscir minori dei medesimi diametri quando il pianeta è lungi dall'orlo lunare, e però quando non può apparir punto deformato dall'effetto di rifrazione. I segni adunque che ne svelano la presenza dell'atmosfera lunare stanno appunto nel raccorciamento dei surriferiti diametri del pianeta.

Su di tali principii semplicissimi poggia il metodo che io mi fo, a proporre.

In una occultazione di Giove, dovrebbero venir misurati accuratamente quei diametri di questo pianeta i cui estremi rispondono al primo contatto e all'ultimo distacco, procedendo nel seguente ordine: 1°. istituire una di tali misure poco tempo innanzi che avvenga il primo contatto, quando cioè quell'astro trovasi alquanto lontano dalla Luna; 2°. eseguire altra misura quando è presso ad immergersi, o nel momento che questa fase avviene. Dopo di ciò farebbe mestieri ripetere le medesime operazioni precisamente quando Giove è per emergere tutto intero, e dipoi quando si è alquanto allontanato dalla Luna.

Nel caso dell'esistenza di un'atmosfera, due delle surriferite misure, cioè quelle ottenute presso il lembo della Luna, e però affette da rifrazione, dovrebbero, come dissi, riuscire rispettivamente minori delle altre due.

Meglio, forse, potrebbe venir raggiunto il desiderato scopo, se, posti due fili di un micrometro esattamente tangenti all'orlo di Giove nei punti estremi di uno degli anzidetti diametri alcun tempo innanzi la immersione del primo lembo, si tenessero con molta accuratezza in tal posizione; e dipoi si mettesse tutta la cura a vedere, se questo lembo, tenendo l'altro sempre tangente al filo, si va alcun poco rimuovendo dalla prima posizione, cacciandosi nell'interno dei fili medesimi nel momento che ha luogo la sua immersione.

Una simile, ma inversa operazione potrebbe praticarsi quando il pianeta emerge interamente dalla luna.

Un tale metodo potrebbe forse applicarsi anche agli altri pianeti che han dischi ben visibili e terminati. Anzi, nel caso di quelli di mediocre grandezza apparente, come, per esempio, Marte, io mi avviso che tornerebbe facile il riconoscere, senza adoperare il micrometro, una deformazione, o una maniera di restringimento o accorciamento di un lato, nel momento che va a toccare l'orlo lunare.

L'accorciamento del diametro anche meno di un secondo, in un piccolo disco, dovrebbe tornare più riconoscibile che in uno di maggior dimensione, e se ne potrebbe valutare la quantità ad un dipresso per istima, riferendola al noto diametro del pianeta.

Oltre la perizia dell'osservatore e la forza del cannocchiale, è mestieri di forte ingrandimento e di condizioni atmosferiche opportune.

RICERCHE
SU LE SUPERFICIE CURVE
MEMORIA

DEL SOCIO ORDINARIO

CAV. FORTUNATO PADULA

Nel vol. 24.^o del giornale di Crelle trovasi pubblicata una Memoria di Steiner su i massimi e minimi, nella quale oltre delle ricerche intraprese e compiute dall'illustre autore varie quistioni trovansi pure enunciate che, per quanto è a nostra conoscenza, sono rimaste finora senza soluzione. Così a pag. 233 del detto volume dopo aver dimostrato il seguente teorema:

Les bases de toutes les pyramides équivalentes en volumes, limitées latéralement par les faces du même angle polyèdre S , touchent toutes une certaine surface courbe F ; les points de contact sont en même tems les centres de gravité des bases respectives; l'angle polyèdre est asymptotique par rapport à la surface F .

Soggiunge l'autore

Nous observons en particulier que

1.^o l'angle S étant trièdre et ses arêtes étant prises pour axes des coordonnées l'équation de la surface F est

$$xyz = A$$

dont il résulte que la surface contient trois systèmes de sections coniques; etc.

2.° L'angolo C étant un cône du second degré, la surface F' est un hyperboloïde à deux nappes.

3.° Une surface donnée du second degré étant coupée par des plans dirigés de manière à former avec les parties correspondantes de la surface des segments équivalents en volume, les bases β de ces segments sont touchées dans leur centre de gravité par une autre surface du second degré qui est semblable à la première, semblablement placée, et concentrique.

E dopo ciò in una nota sta detto:

Il reste à établir un théorème analogue sur des surfaces courbes quelconques; savoir.

Lorsq'on retranche d'une surface courbe quelconque au moyen de plans des segments de volume constant, examiner quelle est la surface qui touche les bases de tous les segments, quels sont les points dans lesquels elle les touche et quelles sont ses autres propriétés.

Queste ricerche indicate da Steiner formano l'oggetto della presente memoria, ed ecco i risultamenti cui son pervenuto.

1.° Allorchè un piano mobile stacca da una superficie qualunque segmenti di volume costante la superficie *inviluppo* tocca le basi dei segmenti ne' loro rispettivi centri di gravità.

2.° Determinando il centro di gravità di ciascun segmento, tutti questi punti stanno sopra una superficie tale che il piano tangente in un dato punto di essa è parallelo alla base del segmento di cui quel punto è centro di gravità.

Risulta dal primo di questi teoremi che la proprietà dimostrata da Steiner per la superficie di un dato angolo poliedro, e per la superficie di secondo grado si avvera pure per una superficie qualunque: dal secondo poi emerge altra proprietà enunciata da Clausen sin dal 1851 negli Annali di matematica pubblicati da Terquem e Gerono nella quistione 240 rimasta finora senza soluzione; cioè che:

La position d'équilibre d'un corps surnageant n'a lieu que lorsque la distance du centre de gravité du liquide déplacé au centre de gravité du corps est un maximum ou un minimum.

1. Prima di considerare il caso di una superficie qualunque crediamo di esaminare la quistione corrispondente nel piano a quella di cui si tratta; cioè supponiamo che si abbia una curva qualunque e

che una retta mobile ne stacchi segmenti di area costante. Si riferisca la curva data a due assi ortogonali e ne rappresenti

$$y = f(x) \quad (1)$$

l'equazione; sia inoltre MM' una posizione qualunque della retta mobile ed s, s' le ascisse dei punti M, M' : saranno $f(s), f(s')$ le corrispondenti ordinate, ed

$$y - f(s) = \frac{f(s') - f(s)}{s' - s} (x - s) \quad (2)$$

l'equazione della retta MM' .

Ciò posto indicando con m l'area costante del segmento che la retta mobile stacca dalla curva, si avrà evidentemente tra s ed s' l'equazione

$$\int_s^{s'} f(x) dx - \frac{1}{2} (s' - s) (f(s) + f(s')) = m, \quad (3)$$

dove derivando rispetto ad s si ricava

$$\left[f(s') - f(s) - (s' - s) f'(s) \right] \frac{ds'}{ds} + f(s') - f(s) - (s' - s) f'(s) = 0. \quad (4)$$

Quindi eliminando dalla (2), dalla sua derivata rispetto ad s , dalla (3) e dalla (4) le quantità $s, s', \frac{ds'}{ds}$, si otterrà un'equazione fra x ed y che apparterrà all'involuppo della retta mobile MM' .

Derivando intanto la (2) rispetto ad s considerando x, y come costanti ed s' funzione di s , si ottiene

$$-f''(s) = \frac{f(s') - f(s) - (s' - s) f'(s) - [f'(s') - f'(s) - (s' - s) f''(s')] \frac{ds'}{ds} (x - s)}{(s' - s)^2} \\ - \frac{f(s') - f(s)}{s' - s},$$

dalla quale in virtù della (4) ricavasi

$$x = \frac{1}{2} (s + s'). \quad (5)$$

L'equazione della curva cercata si otterrà eliminando s, s' dalle equazioni (2), (3), (5): e, come è noto, le equazioni (2) e (5) determineranno le coordinate del punto in cui la MM' tocca la curva che ne rappresenta l'involuppo. Quindi come rilevasi dalla (5) ne segue che

Se una retta stacca da una curva qualunque segmenti di area costante la curva involuppo che ne risulta tocca le basi de' segmenti ne' loro punti di mezzo.

2. Volendo determinare la curva che passa per i centri di gravità di tutti i segmenti di sopra accennati, si rifletta che indicando con X, Y le coordinate del centro di gravità del segmento determinato dalla MM' , cioè dalla retta espressa dall'equazione (2), ponendo questa equazione sotto la forma

$$y = ux + v$$

in cui

$$u = \frac{f(s') - f(s)}{s' - s}, \quad v = f(s) - us, \quad (6)$$

si avrà

$$mX = \int_s^{s'} [f(x) - ux - v] x dx, \quad (7)$$

$$mY = \frac{1}{2} \int_s^{s'} [(f(x))^2 - (ux + v)^2] dx, \quad (8)$$

ed eliminando da queste equazioni e dalla (3) s ed s' si otterrà l'equazione della curva cercata.

Derivando le equazioni (7) e (8) rispetto ad s , ed indicando con u' e v' le derivate $\frac{du}{ds}$, $\frac{dv}{ds}$, si ottiene

$$\begin{aligned} m \frac{dX}{ds} &= (f(s') - us' - v) s' \frac{ds'}{ds} - (f(s) - us - v) \\ &\quad - \int_s^{s'} (u'x + v') x dx, \\ m \frac{dY}{ds} &= \frac{1}{2} \left[(f(s'))^2 - (us' + v)^2 \right] \frac{ds'}{ds} - \frac{1}{2} \left[(f(s))^2 - (us + v)^2 \right] \\ &\quad - \int_s^{s'} (ux + v) (u'x + v') dx \end{aligned}$$

Ma da' valori di u e v si ha

$$f(s') - us' - v = 0, \quad f(s) - us - v = 0$$

dunque sarà

$$m \frac{dX}{ds} = -\frac{u'}{3} (s'^3 - s^3) - \frac{v'}{2} (s'^2 - s^2) \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
 m \frac{dY}{ds} &= -\frac{uu'}{3}(s'^3 - s^3) - \frac{uv' + u'v}{2}(s'^2 - s^2) - vv'(s' - s) \\
 &= -u \left[\frac{u'}{3}(s'^3 - s^3) + \frac{v'}{2}(s'^2 - s^2) \right] \\
 &\quad - v \left[\frac{u'}{2}(s' + s) + v' \right] (s' - s).
 \end{aligned}$$

Inoltre da' valori di u e di v dati dalle equazioni (6) si ha, tenendo presente l'equazione (4) del n. 1.

$$\begin{aligned}
 u' &= \frac{2[f(s') - f(s) - (s' - s)f'(s)]}{(s' - s)^2} = \frac{2(u - f'(s))}{s' - s} \\
 v' &= f'(s) - u - u's;
 \end{aligned}$$

e per conseguenza in virtù dell'equazione (9) si avrà

$$\begin{aligned}
 m \frac{dY}{ds} &= mu \frac{dX}{ds} - v(s' - s) \left[\frac{u'}{2}(s' - s) + f'(s) - u \right]; \\
 &= m u \frac{dX}{ds},
 \end{aligned}$$

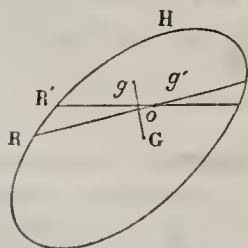
donde

$$\frac{dY}{dX} = u.$$

la quale ci dimostra che la tangente al punto (X, Y) è parallela alla retta MM' . Quindi

Se una retta mobile stacca da una curva qualunque segmenti di area costante, la tangente in un punto qualunque della curva che passa per i centri di gravità de' detti segmenti sarà parallela alla base del segmento di cui il punto che si considera è centro di gravità.

3. Passiamo ora a considerare la quistione nello spazio, e per non impegnarci in calcoli alquanto lunghi e difficili seguiremo altro procedimento.



Sia RHK la superficie data, $RS, R'S'$ due posizioni consecutive del piano segante: dovendo essere $RHS = R'H'S'$, sarà l'unghia $ROR' = SOS'$. Inoltre chiamando m, m' le porzioni della base RS rappresentate dalle OS ed OR ; cioè le aree de' due segmenti nei quali la base RS resta divisa dalla comune sezione de' due piani $RS, R'S'$: h, h' le distanze de' centri di gravità di m ed m'

dalla detta comune sezione de' due piani RS, R'S': $d\varphi$ l'angolo de' due piani, si avrà

$$ROR' = m' h' d\varphi, \quad SOS' = m h d\varphi$$

e per conseguenza

$$m h = m' h'.$$

Quindi la comune sezione de' due piani consecutivi RS, R'S' passa pel centro di gravità della sezione RS; lo stesso avvenendo per tutte le posizioni consecutive ad RS, secondo direzioni qualunque, ne segue che il piano mobile RS passando ad una posizione infinitamente vicina gira intorno al centro di gravità della sezione RS. E però

Quando un piano mobile stacca da una superficie qualunque segmenti di volume costante la superficie involuppo che ne risulta tocca le basi de' segmenti ne' loro centri di gravità.

4. Sieno g, g' i centri di gravità de' segmenti RHS, R'HS'; e z, z' le loro distanze dal piano RS: si chiamino $d\gamma, d\gamma'$ le distanze de' centri di gravità delle unghie SOS', ROR' dallo stesso piano RS e v il volume costante dei vari segmenti RHS, R'HS', etc. sarà

$$\begin{aligned} z' &= \frac{vz - m h d\varphi d\gamma - m h d\varphi d\gamma'}{v} \\ &= z - \frac{m h}{v} d\varphi (d\gamma + d\gamma'). \end{aligned}$$

Quindi la differenza $z' - z$ essendo un infinitesimo di second' ordine ne risulta che $dz = 0$, ovvero che passando il piano RS ad una posizione consecutiva R'S' il centro di gravità g del segmento RHS non esce dal piano condotto per g parallelamente ad RS; e per conseguenza questo piano toccherà in g la superficie che passa per tutti i centri di gravità de' segmenti RHS. Laonde

Se un piano mobile stacca da una superficie qualunque segmenti di volume costante, il piano tangente in un punto qualunque della superficie che passa per i centri di gravità de' detti segmenti sarà parallelo alla base del segmento di cui il punto che si considera è centro di gravità.

5. Da questo teorema come già abbiamo detto più sopra risulta il teorema enunciato da Clausen: infatti supponendo essere RS la sezione a fior d'acqua di un galleggiante in equilibrio e G il centro di

gravità dell'intero corpo sarà Gg perpendicolare ad RS e quindi normale alla superficie che passa per i punti g : e però, in generale, la Gg sarà un massimo o un minimo.

Abbiamo detto in generale perchè, come è nolo, la Gg potrebbe esser normale e non essere nè un massimo nè un minimo; dimodochè nell'enunciato del Clausen deve intendersi (e questa era certamente l'idea dell'illustre autore) che la Gg soddisfaccia alle ordinarie equazioni pel massimo o minimo. Ed aggiungeremo, del che però non abbiamo esatta dimostrazione, che forse l'equilibrio è stabile quando la distanza del centro di gravità del corpo al centro di gravità del segmento immerso è un minimo; è instabile quando è un massimo; ed è indifferente quando la detta distanza soddisfa alle condizioni pe'massimi e minimi che si ottengono uguagliando a zero le derivate di primo ordine, ma non è nè un massimo nè un minimo.

SOPRA LO SVILUPPO DELLA FUNZIONE $\frac{1}{ce^x-1}$,

E SOPRA UNA NUOVA ESPRESSIONE DEI NUMERI DI BERNOULLI.

MEMORIA

DEL SOCIO CORRISPONDENTE

E. FERGOLA.

Durante la breve dimora fatta in Napoli dal sig. *Sylvester* (*) questo geometra parlando di una sua invenzione sulla partizione dei numeri, mi fece rimarcare l'importanza della determinazione dell'espressione generale dei coefficienti dello sviluppo della funzione $\frac{1}{ce^x-1}$ secondo le potenze ascendenti di x , espressione che non è stata ancora da alcuno determinata. La formula che rappresenta la derivata di un ordine qualunque di una funzione mediante le derivate della funzione inversa (**), e che io ho data in una memoria a cui questa Accademia mi ha fatto l'onore compartire la sua approvazione, mi porge un mezzo facilissimo per la determinazione dei coefficienti in parola. Si potrebbe dare a questi coefficienti la denominazione di *numeri ultra-Bernoulliani*, perchè basta supporre eguale al-

(*) In gennajo 1857.

(**) Ved. in questo vol. per l'anno 1856 da pag. 20,0 a 206.

l'unità una costante nella funzione che li genera, per ottenere la funzione dallo sviluppo di cui traggono origine i numeri di *Bernoulli*.

Il passaggio dall'espressione dei numeri *ultra-Bernoulliani* a quella dei numeri di *Bernoulli* non è così facile come di leggieri potrebbe farlo credere la forma delle funzioni da cui questi numeri si ricavano; mentre sebbene l'una di quelle due funzioni possa ottenersi particolarizzando una costante che si contiene nell'altra, pure non avviene lo stesso dei loro sviluppi, i quali differiscono essenzialmente pel fatto, che in uno di essi deve trovarsi un termine che diviene infinito per un valore nullo della variabile, ed un tal termine non può avere il suo corrispondente nell'altro sviluppo. Seguendo però un andamento indiretto ho potuto evitare questa difficoltà, e sono pervenuto ad una nuova espressione generale dei numeri di *Bernoulli*, la quale è interamente differente da quella data da *Laplace* (*), e dall'altra trovata da *Abel* sotto forma di integrale definito.

Siccome le espressioni che ho trovate per i numeri *Bernoulliani* ed *ultra-Bernoulliani* sono formate mediante le soluzioni intere e positive dell'equazione $q_1 + 2q_2 + 3q_3 + \dots + nq_n = n$, così ho creduto che alcune rimarchevoli relazioni fra le soluzioni medesime non sarebbero fuori luogo in fine di questa memoria.

(**) Indicando con B_1, B_2, B_3, \dots i numeri di *Bernoulli*, l'espressione di B_{2n-1} trovata da *Laplace* è la seguente :

$$\pm \frac{2n}{(2^{2n}-1)2^{2n-1}} \left[\begin{aligned} & \frac{1}{2} n^{2n-1} - (n-1)^{2n-1} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{2n}{1} \right) \\ & + (n-2)^{2n-1} \left(1 + \frac{2n}{1} + \frac{1}{2} \frac{2n(2n-1)}{1.2} \right) \\ & + (n-3)^{2n-1} \left(1 + \frac{2n}{1} + \frac{2n(2n-1)}{1.2} + \frac{1}{2} \frac{2n(2n-1)(2n-1)}{1.2.3} \right) \\ & + \text{ec.} \end{aligned} \right]$$

L'espressione della stessa quantità trovata da *Abel* è

$$\frac{2n}{2^{2n}-1} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^{2n-1}}{e^{t\pi}-1} dt.$$

Ved. *Lacroix* — *Traité du calcul différ. et du calcul intégr.* t. 3 pag. 114.

Abel — *OEuvres complètes* t. 2 pag. 226.

1.

In ciò che segue rappresento con $\sum_n f(q_1, q_2 \dots q_n)$ la somma di tutti i valori che assume $f(q_1, q_2 \dots q_n)$ per tutti i valori interi e positivi (incluso zero) di $q_1, q_2 \dots q_n$, che verificano l'equazione $q_1 + 2q_2 + \dots + nq_n = n$; indico con Πk il prodotto $1.2.3 \dots k$; e chiamo q la somma $q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n$.

Ho dimostrato altrove, che se y ed x rappresentano due funzioni l'una inversa dell'altra, si deve avere

$$(1) \ y^{(n+1)} = \sum_n \frac{(-1)^q \Pi(n+q)}{\Pi 2^{q_1} \Pi 3^{q_2} \dots \Pi(n+1)^{q_n} \Pi q_1 \Pi q_2 \dots \Pi q_n} \frac{x^{nq_1} x^{nq_2} \dots x^{(n+1)q_n}}{x^{n+q+1}}$$

Ecco come questa formula può servire a formare lo sviluppo della funzione $\frac{1}{ce^x - 1}$.

Si faccia $y = \frac{1}{ce^x - 1}$, e si supponga che lo sviluppo richiesto sia

$$\frac{1}{c-1} + C_1 x + C_2 \frac{x^2}{1!2} + C_3 \frac{x^3}{1!3} + \text{ec.};$$

è chiaro che dovrà essere

$$C_{n+1} = y_o^{(n+1)}$$

dove l'indice o dinota doversi mettere $x=o$ dopo le derivazioni. Intanto dalla relazione stabilita fra y ed x si ricava facilmente

$$x = \log(y+1) - \log y - \log c,$$

e per conseguenza

$$x_o^{(n+1)} = (-1)^{n+1} \Pi n \frac{(c^{n+1} - 1)(c-1)^{n+1}}{c^{n+1}}.$$

Deducendo da quest'ultima equazione i valori di x'_0, x''_0, \dots col porvi successivamente $n=0, 1, 2, \dots$, e sostituendo nella formola (1), si avrà per C_{n+1} l'espressione

$$C_{n+1} = \sum \frac{(-1)^{q_1}(n+q)}{1!2^{q_1} 3^{q_2} \dots (n+1)^{q_n} 1!q_1 1!q_2 \dots 1!q_n} \times \\ \times \frac{\left((-1)^{q_1} \frac{(c^2-1)(c-1)^2}{c^2} \right)^{q_1} \left((-1)^{q_2} \frac{(c^3-1)(c-1)^3}{c^3} \right)^{q_2} \dots}{\left(-\frac{(c-1)^3}{c} \right)^{n+q+1}}$$

la quale, a motivo delle relazioni

$$\begin{aligned} q_1 + 2q_2 + \dots + nq_n &= n \\ q_1 + q_2 + \dots + q_n &= q \\ 2q_1 + 3q_2 + \dots + (q+1)q_n &= n+q, \end{aligned}$$

si riduce all'altra

$$(c) \quad C_{n+1} = \frac{c}{(c-1)^{n+2}} \sum \frac{(-1)^{q-1}(n+q)}{n! 2^{q_1} 3^{q_2} \dots (n+1)^{q_n} 1!q_1 1!q_2 \dots 1!q_n} \times \\ \times (c+1)^{q_1} (c^2+c+1)^{q_2} \dots (c^n + c^{n-1} + \dots + c+1)^{q_n}.$$

Questa è la cercata espressione generale dei coefficienti dello sviluppo della funzione $\frac{1}{ce^x-1}$ secondo le potenze ascendenti di x .

II.

È noto che i numeri di *Bernoulli* sono i valori di B_1, B_3, B_5, \dots nello sviluppo

$$\frac{1}{e^x-1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + B_1 \frac{x}{1!2} - B_3 \frac{x^3}{3!4} + B_5 \frac{x^5}{5!6} - \dots$$

Ora cercando lo sviluppo di tgx secondo le potenze ascendenti di x , si può esprimere il coefficiente di un termine qualunque tanto mediante i numeri B_1, B_3, B_5, \dots , che mediante le soluzioni intere e positive dell'equazione

$$q_1 + 2q_2 + 3q_3 + \dots + nq_n = n;$$

allora eguagliando le due espressioni, che si troveranno per un medesimo coefficiente, si avrà un'equazione da cui potrà ricavarsi immediatamente una formola generale per rappresentare i numeri di *Bernoulli*.

Questo è ciò che ora passo ad esporre.

Per esprimere tgx in funzione di quantità esponenziali immaginarie si ha la formola

$$tgx = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{e^{2x\sqrt{-1}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \left[\frac{1}{e^{-2x\sqrt{-1}} + 1} - \frac{1}{e^{2x\sqrt{-1}} + 1} \right].$$

Intanto, per qualunque valore di x , si ha

$$\frac{1}{e^x + 1} = \frac{(e^x - 1)^2}{(e^{2x} - 1)(e^x - 1)} = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{2}{e^{2x} - 1};$$

quindi, per la definizione dei numeri di *Bernoulli*, sarà

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^x + 1} &= \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + B_1 \frac{x}{112} - B_3 \frac{x^3}{114} + B_5 \frac{x^5}{116} - \text{cc}, \\ &- 2 \left[\frac{1}{2x} - \frac{1}{2} + B_1 \frac{2x}{112} - B_3 \frac{2^3 x^3}{114} + B_5 \frac{2^5 x^5}{116} - \text{cc} \right] \end{aligned}$$

ossia

$$\frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{2} - (2^2 - 1)B_1 \frac{x}{112} + (2^4 - 1)B_3 \frac{x^3}{114} - (2^6 - 1)B_5 \frac{x^5}{116} + \text{cc}.$$

Mutando in questa equazione x in $-x$, e sottraendo si avrà

$$\frac{1}{e^{-x}+1} - \frac{1}{e^x+1} = 2(2^2-1)B_1 \frac{x}{\Pi 2} - 2(2^4-1)B_3 \frac{x^3}{\Pi 4} + 2(2^6-1)B_5 \frac{x^5}{\Pi 6} - \text{ec.};$$

quindi sostituendo $2x\sqrt{-1}$ ad x , e dividendo per $\sqrt{-1}$, si troverà per lo sviluppo di tgx

$$(2) \quad tgx = 2^2(2^2-1)B_1 \frac{x}{\Pi 2} + 2^4(2^4-1)B_3 \frac{x^3}{\Pi 4} + 2^6(2^6-1)B_5 \frac{x^5}{\Pi 6} + \text{ec.}$$

Da un'altra parte, si può formare lo sviluppo di tgx anche nel modo seguente.

Si faccia $tgx=y$, e si avrà pel teorema di *Maclaurin*

$$(3) \quad tgx = y'_0 x + y''_0 \frac{x^2}{\Pi 2} + y'''_0 \frac{x^3}{\Pi 3} + \text{ec.}$$

Per trovare l'espressione generale dei coefficienti di questa serie, si ha dall'equazione (1)

$$y_0^{(2n+1)} = \sum_{2n} \frac{(-1)^q \Pi(2n+q)}{\Pi 2^{q_1} \Pi 3^{q_2} \dots \Pi (n+1)^{q_n} \Pi q_1 \Pi q_2 \dots \Pi q_n} \cdot \frac{x_0^{n'1} x_0^{m'2} \dots x_0^{(2n+1)'2n}}{x_0^{2n+q+1}};$$

ma per essere

$$x = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \text{ec.},$$

è chiaro che

$$x_0^{(2i)} = 0, \quad x_0^{(2i+1)} = (-1)^i \Pi(2i);$$

dunque nella somma, che trovasi al secondo membro del valore di $y_0^{(2n+1)}$ saranno identicamente nulli i termini corrispondenti ai sistemi di $q_1, q_2, q_3 \dots q_{2n}$ in cui uno, o più dei numeri $q_1, q_2, q_3 \dots$ sono differenti da zero. Quindi è che sopprimendo nel valore di $y_0^{(2n+1)}$ i fattori

$$\left(\frac{x_0^{n'1}}{\Pi 2}\right)^{q_1}, \left(\frac{x_0^{m'2}}{\Pi 3}\right)^{q_2}, \left(\frac{x_0^{l'3}}{\Pi 6}\right)^{q_3}, \dots,$$

potrà estendersi la somma a tutte le soluzioni intere e positive dell'equazione $q_2 + 2q_4 + 3q_6 + \dots + nq_{2n} = n$; e perciò mutando

$$q_2, q_4, q_6 \dots q_{2n}$$

rispettivamente in

$$q_1, q_2, q_3 \dots q_n,$$

sarà

$$y_0^{(2n+1)} = \sum_n \frac{(-1)^{n+q} \Pi(2n+q)}{3^{q_1} 5^{q_2} \dots (2n+1)^{q_n} \Pi q_1 \Pi q_2 \dots \Pi q_n}.$$

Eguagliando ora i termini moltiplicati per x^{2n+1} nelle serie (2) e (3) si avrà

$$2^{2n+2} (2^{2n+2} - 1) \frac{B_{2n+1}}{\Pi(2n+2)} = \frac{1}{\Pi(2n+1)} \sum_n \frac{(-1)^{n+q} \Pi(2n+q)}{3^{q_1} 5^{q_2} \dots (2n+1)^{q_n} \Pi q_1 \Pi q_2 \dots \Pi q_n},$$

e quindi

$$(b) \quad B_{2n+1} = \frac{n+1}{2^{2n+1} (2^{2n+2} - 1)} \sum_n \frac{(-1)^{n+q} \Pi(2n+q)}{3^{q_1} 5^{q_2} \dots (2n+1)^{q_n} \Pi q_1 \Pi q_2 \dots \Pi q_n},$$

che è la cercata espressione generale dei numeri di *Bernoulli*.

III.

Dalla formula (1) si ricavano delle relazioni fra le soluzioni intere e positive dell'equazione $q_1 + 2q_2 + \dots + nq_n = n$; e queste relazioni possono moltiplicarsi indefinitamente, essendo arbitraria la relazione che può stabilirsi fra le variabili x ed y che nell'equazione (1) si contengono. Così, per esempio, facendo $xy = 1$ si ricaverà dopo facili riduzioni

$$(d) \quad \Pi(n+1) = \sum_n \frac{(-1)^{n+q} \Pi(n+q)}{\Pi q_1 \Pi q_2 \dots \Pi q_n}.$$

Similmente, facendo $y = \log x$, si troverà

$$(e) \dots \Pi n = \sum_n \frac{(-1)^{n+q} \Pi(n+q)}{\Pi 2^{q_1} \Pi 3^{q_2} \dots \Pi(n+1)^{q_n} \Pi q_1 \Pi q_2 \dots \Pi q_n}.$$

Ancora, mettendo $y = \operatorname{sen} x$, si avrà

$$(f) \dots (-1)^n = \sum_n \frac{(-1)^q \Pi(2n+q)}{\Pi q_1 \Pi q_2 \dots \Pi q_n} \left(\frac{1}{2.3}\right)^{q_1} \left(\frac{1.3}{2.4.5}\right)^{q_2} \dots \left(\frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n(2n+1)}\right)^{q_n}.$$

Supponendo $y = x^a$ si avrà, qualunque sia a ,

$$(g) \dots (a-1)(a-2) \dots (a-n) = \sum_n \frac{(-1)^q \Pi(n+q)}{\Pi 2^{q_1} \Pi 3^{q_2} \dots \Pi(n+1)^{q_n} \Pi q_1 \Pi q_2 \dots \Pi q_n} \times \\ \times (1-a)^{q_1} ((1-a)(1-2a))^{q_2} \dots ((1-a)(1-2a) \dots (1-na))^{q_n}.$$

IV.

Prima di dare un esempio del calcolo di qualcuna delle precedenti formule, indicherò come possono trovarsi prontamente tutte le soluzioni intere e positive dell'equazione

$$q_1 + 2q_2 + \dots + nq_n = n.$$

Supponiamo per un momento che

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, 0, 0, \dots, 0$$

sia un sistema di valori di

$$q_1, q_2, \dots, q_k, q_{k+1}, q_{k+2}, \dots, q_n$$

che verificano quell'equazione. Da α_1 si tolga successivamente $k+1$, $2(k+1)$, $3(k+1)$, ..., e per valori di q_{k+1} si scrivano per ordine 1, 2, 3, ... Indi dall'istesso α_1 si tolga successivamente $k+2$, $2(k+2)$,

$3(k+2) \dots$, e per valori di q_{k+2} si scrivano per ordine 1, 2, 3,... Poi da α_1 si tolga $k+3$, $2(k+3)$, $3(k+3) \dots$, e si scrivano ordinatamente 1, 2, 3..., per valori di q_{k+3} . Si seguiti così finchè da α_1 si arriverà a togliere $k+h=\alpha_1$. È chiaro che tutti i valori ottenuti dovranno verificare l'equazione proposta. Ora un sistema di valori che evidentemente soddisfa questa equazione è

$$n, 0, 0, \dots, 0;$$

partendo da questo sistema, ed applicando successivamente il procedimento ora detto a tutti i sistemi che ne risulteranno, si perverrà, a formare tutte le soluzioni dell'equazione proposta a risolvere.

Vogliasi ora calcolare il valore di B_{15} per mezzo della formula (b). Sarà in questo caso $n=7$, e l'equazione

$$q_1 + 2q_2 + 3q_3 + 4q_4 + 5q_5 + 6q_6 + 7q_7 = 7$$

avrà le seguenti soluzioni (*)

7	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	0	0	0
3	2	0	0	0	0	0
1	3	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0	0
1	0	2	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0
2	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	1
2	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	2	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0

(*) Il numero di queste soluzioni è 15. In generale il numero delle soluzioni intere e positive dell'equazione $q_1 + 2q_2 + \dots + nq_n = n$ è il coefficiente di x^n nello sviluppo

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) \dots} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + \dots$$

(V. *Eulero. Introductio in analysin infinitorum* t. I. pag. 257.

risulterà in conseguenza

$$B_{15} = \frac{8}{2^{15}(2^{16}-1)} \left[\begin{array}{ccccc} \frac{\Pi 21}{3^7 \Pi 7} & - \frac{\Pi 20}{3^{55} \Pi 3} & + \frac{\Pi 19}{3^{55} \Pi 3 \Pi 2} & - \frac{\Pi 18}{3.5^3 \Pi 3} & - \frac{\Pi 19}{3^4 7 \Pi 4} \\ - \frac{\Pi 17}{3.7^2 \Pi 2} & + \frac{\Pi 18}{3^{39} \Pi 3} & - \frac{\Pi 17}{3^{211} \Pi 2} & + \frac{\Pi 16}{3.13} & - \frac{\Pi 15}{15} \\ + \frac{\Pi 18}{3^{25.7} \Pi 2} & - \frac{\Pi 17}{3.5.9} & + \frac{\Pi 16}{5.11} & - \frac{\Pi 17}{3^{23} \Pi 2} & + \frac{\Pi 16}{7.9} \end{array} \right]$$

SOPRA UNA EQUAZIONE

DI GRANDE IMPORTANZA

NELLA TEORICA DE' MOVIMENTI DE' PIANETI

M E M O R I A

DEL SOCIO ORDINARIO

CAV. A. DE GASPARIS

Nel vol. VII delle notizie mensili della Società Reale Astronomica di Londra, il sig. Waterston propone una curva che venendo descritta graficamente una volta per tutte, ed intersegata da una retta la cui posizione è determinata in ciascun caso particolare, fornisce prontamente e con discreta approssimazione la distanza di un corpo celeste dalla terra. Il sig. Challis nel vol. XVII delle memorie della stessa Accademia, dopo aver fatto vedere il modo di giungere alla determinazione della equazione della curva, dà altresì le espressioni de' coefficienti della retta nella ipotesi che nello sviluppo delle coordinate eliocentriche in funzione del tempo, si tenga conto solo de' termini moltiplicati pe' quadrati di questo. Nella presente memoria mi propongo di mostrare, che nel determinare i coefficienti della retta, si può tener conto ancora de' termini moltiplicati pe' cubi de' tempi, la equazione della curva restando la medesima. Conseguo da ciò che i risultati che si ottengono sono di gran lunga più esatti, come vien confermato da appositi esempi numerici.

Onde meglio venga fatto il paragone de' due casi relativi al tener

conto de' quadrati, o de' quadrati e cubi de' tempi, mi farò ad esporli entrambi, cominciando dal primo, ed avverto che adotto i simboli del Gauss.

Si hanno dunque le equazioni

$$\begin{aligned} x &= x' - \frac{dx'}{dt} t'' + \frac{d^2x'}{dt^2} \frac{t''^2}{2} \\ x'' &= x' + \frac{dx'}{dt} t'' + \frac{d^2x'}{dt^2} \frac{t''^2}{2} \\ y &= y' - \frac{dy'}{dt} t'' + \frac{d^2y'}{dt^2} \frac{t''^2}{2} \\ y'' &= y' + \frac{dy'}{dt} t'' + \frac{d^2y'}{dt^2} \frac{t''^2}{2} \\ z &= z' - \frac{dz'}{dt} t'' + \frac{d^2z'}{dt^2} \frac{t''^2}{2} \\ z'' &= z' + \frac{dz'}{dt} t'' + \frac{d^2z'}{dt^2} \frac{t''^2}{2} \end{aligned} \quad (1)$$

nelle quali se introduciamo le distanze accorciate ϱ, ϱ'' per mezzo delle equazioni

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \alpha + R \cos l \\ x'' &= \varrho'' \cos \alpha'' + R'' \cos l'' \\ y &= \varrho \sin \alpha + R \sin l \\ y'' &= \varrho'' \sin \alpha'' + R'' \sin l'' \\ z &= \varrho \operatorname{tg} \beta, \quad z'' = \varrho'' \operatorname{tg} \beta'' \end{aligned}$$

avremo sei equazioni dalle quali si potranno eliminare le cinque incognite $\varrho, \varrho'', \frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt}$. Si avrà dunque una equazione contenente $x', y', z', \frac{d^2x'}{dt^2}, \frac{d^2y'}{dt^2}, \frac{d^2z'}{dt^2}$ nella quale, mediante le relazioni conosciute

$$\begin{aligned} x' &= \varrho' \cos \alpha' + R' \cos l' \\ y' &= \varrho' \sin \alpha' + R' \sin l' \\ z' &= \varrho' \operatorname{tg} \beta' \end{aligned}$$

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = -\frac{x'}{r'^3}, \quad \frac{d^2y'}{dt'^2} = -\frac{y'}{r'^3}, \quad \frac{d^2z'}{dt'^2} = -\frac{z'}{r'^3}$$

potremo introdurre ϕ' , ed r' ; quindi avremo

$$\phi'(a\phi' - b) \left(1 - \frac{\phi\phi''}{2r^3}\right) = c\phi + d\phi''$$

e moltiplicando ambi i membri per $\left(1 - \frac{\phi\phi''}{2r^3}\right)^{-1}$, trascurando il termine $\frac{\phi^2\phi''^2}{4r^6}$ si ha l'equazione

$$a\phi' = b + \frac{c\phi + d\phi''}{\phi'} \left(1 + \frac{\phi\phi''}{2r^3}\right) \quad (2)$$

È questa l'equazione di cui si serve il sig. *Challis*, e la stessa di quella proposta da *Gauss* per ottenere una prima approssimazione. (Vedi *Gauss* Th. mot. pag. 148 in cui sono adoprate questi stessi simboli). L'equazione (2) adunque si è dedotta dalle equazioni (1) in cui sono ritenuti i soli termini moltiplicati pe' quadrati de' tempi. Vengo all' altro caso, ed assumo le coordinate nel piano stesso dell'orbita. Avremo perciò

$$\begin{aligned} x &= x' - \frac{dx'}{dt} \phi'' + \frac{d^2x'}{dt^2} \frac{\phi''^2}{2} - \frac{d^3x'}{dt^3} \frac{\phi''^3}{6} \\ x'' &= x' + \frac{dx'}{dt} \phi + \frac{d^2x'}{dt^2} \frac{\phi^2}{2} + \frac{d^3x'}{dt^3} \frac{\phi^3}{6} \\ y &= y' - \frac{dy'}{dt} \phi'' + \frac{d^2y'}{dt^2} \frac{\phi''^2}{2} - \frac{d^3y'}{dt^3} \frac{\phi''^3}{6} \\ y'' &= y' + \frac{dy'}{dt} \phi + \frac{d^2y'}{dt^2} \frac{\phi^2}{2} + \frac{d^3y'}{dt^3} \frac{\phi^3}{6} \end{aligned} \quad (3)$$

ora sottraendo la terza divisa per y' dalla prima divisa per x' , e la quarta divisa per y' dalla seconda divisa per x' , tenendo presente che si ha

$$\begin{aligned} \frac{d^2x'}{dt^2} &= -\frac{dx'}{r'^3 dt} + \frac{3x' dr'}{r'^4 dt} \\ \frac{d^2y'}{dt^2} &= -\frac{dy'}{r'^3 dt} + \frac{3y' dr'}{r'^4 dt} \end{aligned}$$

avremo le due relazioni

$$\frac{n}{n'} = \frac{\phi'(6r'^3 - \phi^2)}{\phi'(6r'^3 - \phi'^2)}, \quad \frac{n''}{n'} = \frac{\phi''(6r'^3 - \phi'^2)}{\phi'(6r'^3 - \phi'^2)}$$

quindi sostituendo tali rapporti nella nota equazione

$$(a\zeta' - b)n' = cn + dn''$$

verrà finalmente

$$\theta c \frac{6r'^3 - \theta^2}{6r'^3 - \theta'^2} + \theta'' d \frac{6r'^3 - \theta''^2}{6r'^3 - \theta'^2} = \theta'(a\zeta' - b) \quad (4)$$

ed è chiaro che l'equazione (4) si verifica quando si tien conto ancora de' cubi de' tempi.

Tutto il detto fin qui, è noto. Ora per venire al mio scopo, osservo che l'equazione (4) può mettersi sotto la forma

$$-\frac{\theta c + \theta'' d}{\theta' b} \left\{ \frac{r'^3 - \frac{\theta^2 c + \theta''^2 d}{6(\theta c + \theta'' d)}}{r'^3 - \frac{\theta'^2}{6}} \right\} = 1 - \frac{a\zeta'}{b} \quad (5)$$

ed eseguendo la divisione indicata nel coefficiente di $\frac{\theta c + \theta'' d}{\theta' b}$, e trascurando il termine moltiplicato per $\frac{1}{36r'^6}$ avremo

$$-\frac{\theta c + \theta'' d}{\theta' b} \left\{ 1 + \frac{1}{r'^3} \left(\frac{\theta'^2}{6} - \frac{\theta^2 c + \theta''^2 d}{6(\theta c + \theta'' d)} \right) \right\} = 1 - \frac{a\zeta'}{b} \quad (6)$$

Ora l'equazione (2) è la stessa che

$$-\frac{\theta c + \theta'' d}{\theta' b} \left\{ 1 + \frac{1}{r'^3} \frac{\theta \theta''}{2} \right\} = 1 - \frac{a\zeta'}{b} \quad (7)$$

Le equazioni adunque (6) (7) nella prima delle quali si è tenuto conto de' cubi, e nella seconda de' soli quadrati del tempo, hanno la stessa forma e solo differiscono nel coefficiente di $\frac{1}{r'^3}$, de'quali la differenza è

$$\frac{\theta \theta'' (\theta - \theta'') (c - d)}{6(\theta c + \theta'' d)}.$$

Da ciò apparisce che le due equazioni in parola diventano la

stessa cosa quando $\theta = \theta''$, cioè quando l'osservazione media equidista dalle estreme. Debbo dire, prima di passar oltre, che la possibilità della trasformazione (5) ha dato origine al presente lavoro.

Si ponga ora per brevità

$$B^2 = R'^2 - R'^2 \cos^2 \varphi' \cos^2 (\theta' - \alpha')$$

$$C = R' \cos (\theta' - \alpha') \cos^2 \varphi'$$

$$e = \frac{\theta'^2}{6} - \frac{\theta'^2 c + \theta''^2 d}{6(\theta' c + \theta'' d)}$$

$$A = - \frac{\theta' c + \theta'' d}{\theta' b}$$

si faccia altresì

$$y = \frac{\varphi' + R' \cos (\theta' - \alpha') \cos^2 \varphi'}{B \cos \varphi'}$$

ricordando inoltre che fra φ', r' vi è la relazione

$$r'^2 = \varphi'^2 \sec^2 \varphi' + R'^2 - 2R' \varphi' \cos (\theta' - \alpha')$$

avremo infine

$$\frac{b + aC - bA}{aB \cos \varphi'} = y + \frac{Abe}{B^2 a \cos \varphi'} (y^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} \quad (8)$$

Dal fin qui detto si rileva che la differenza tra il procedimento di *Challis*, e l'attuale consiste in ciò che nel primo il valore di e è $\frac{\theta \theta''}{2}$, e nell'altro è $\frac{\theta^2}{6} - \frac{\theta^2 c + \theta''^2 d}{6(\theta' c + \theta'' d)}$, e, quel che più importa, nel primo si sono ritenuti i soli termini moltiplicati pe' quadrati, mentre in questo sono entrati in calcolo anche i cubi de' tempi.

Assumendo essere $x = (y^2 + 1)^{-\frac{3}{2}}$ l'equazione della curva costante, l'equazione della retta è

$$\frac{b + aC - bA}{aB \cos \varphi'} = y + \frac{Abe}{B^2 a \cos \varphi'} x.$$

Onde esibire una prova numerica dalla quale si rileva che l'equazione (2) è meno esatta della equazione (4) ho sostituito in entrambe i valori delle costanti e delle incognite (determinate per altra

via) prese dall'esempio numerico dato da *Gauss* per Giunone a pag. 167 della Th. Motus. I valori numerici dei due membri dell'equazione (2) sono risultati

$$+ 590665 , - 590693$$

per l'equazione (4) si è ottenuto

$$+ 2147569 , - 2147570$$

da cui si rileva che il secondo errore è molto più piccolo.

FORMOLE E TAVOLE NUMERICHE

PER CALCOLARE PRONTAMENTE

LA DISTANZA DI UN CORPO CELESTE DALLA TERRA.

MEMORIA

DEL SOCIO ORDINARIO

CIV. A. DE GASPARIS

In questa memoria mi sono proposto di costruire una tavola numerica a doppia entrata dalla quale si possa calcolare la distanza di un pianeta o di una cometa dalla Terra, con quell'approssimazione che risulta dall'aver tenuto conto fino ai termini moltiplicati per le quarte potenze del tempo inclusivamente, nelle serie che indicano lo sviluppo delle coordinate eliocentriche. Si vedrà che gli argomenti della tavola dedotti in prima col ritenere i cubi, sono prontamente ottenibili ne' casi particolari, e che l'incognita determinata ha relazioni semplicissime colla distanza accorciata, il raggio vettore, e finalmente l'incognita z determinata da *Gauss* mediante un'equazione di quarto grado. Si vedrà altresì che quest'ultima relazione fornisce un mezzo onde non cadere in equivoco nella scelta della incognita stessa, ne' casi in cui il problema ammette due soluzioni.

Il presente lavoro è stato il risultato del precedente. In esso io mi propongo adunque di ridurre in tavola l'equazione

$$m = y + n(y^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} \quad (1)$$

nella quale m, n sono indicati da

$$m = \frac{b + aC - bA}{aB \cos \varphi'}, \quad n = \frac{Abe}{B^2 a \cos \varphi'}$$

e pel valore de' simboli rinvio alla precedente memoria.

La tavola fornisce, essendo cogniti i valori di m, n il valore della incognita y , di cui la relazione con φ' è

$$y = \frac{\varphi' + R' \cos(l' - \alpha') \cos^2 \varphi'}{B \cos \varphi'}$$

e fra y ed r' si ha

$$r' = B \sqrt{y^2 + 1}$$

nella quale si è posto

$$B = R' \sqrt{1 - \cos^2 \varphi' \cos^2(l' - \alpha')}.$$

Facendo attenzione a questo valore di B si vede che la quantità sotto il radicale è precisamente la quantità contrassegnata con $\text{sen } \varphi$ da *Gauss* pag. 150. Si ha adunque

$$r' = \frac{R' \text{sen } \varphi'}{\text{sen } z} = B(y^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$$

da cui si deduce la relazione semplicissima $\text{sen } z = (y^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$. Onde posto $\text{tg } \varphi = y$, viene $\text{sen } z = \cos \varphi$. Quindi è che i criterii insegnati da *Gauss* per la scelta di z , ne' casi particolari, serviranno a far dedurre il valore di y , ed è inutile d'insistere su di ciò.

Nè tampoco parlerò del metodo di abbreviazione che ho messo in pratica per ridurre in tavola l'equazione (1) perchè è lo stesso di quello che ho adoperato per la soluzione del problema di *Keplero*, come può vedersi ne' numeri 1082 - 83 - 84 delle *Astronomische Nachrichten*.

È necessario invece mostrare come si possa tener conto de' termini moltiplicati per le quarte potenze del tempo.

Per questo proposito ricordo i valori di $\frac{n}{n'}, \frac{n''}{n'}$, esatti fino alle quarte potenze del tempo inclusivamente, e riportati nella mia settima

memoria sulla determinazione delle orbite planetarie. (Vol. 1° delle memorie di nostra Accademia). Tali valori sono

$$\frac{n}{n'} = \frac{0 - \frac{\theta^3}{6r'^3} + \frac{\theta^4}{4r'^4} \frac{dr'}{dt}}{\theta' - \frac{\theta'^3}{6r'^3} + \frac{\theta'^4}{4r'^4} \frac{dr'}{dt}}$$

$$\frac{n''}{n'''} = \frac{\theta'' - \frac{\theta''^3}{6r''^3} - \frac{\theta''^4}{4r''^4} \frac{dr''}{dt}}{\theta' - \frac{\theta'^3}{6r'^3} + \frac{\theta'^4}{4r'^4} \frac{dr'}{dt}}.$$

Ora dalle due serie

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{r'^3} - \frac{\theta''}{dt} d \frac{1}{r'^3} + \frac{\theta''^2}{2dt^2} d^2 \frac{1}{r'^3}$$

$$\frac{1}{r'^3} = \frac{1}{r^3} + \frac{\theta}{dt} d \frac{1}{r^3} + \frac{\theta^2}{2dt^2} d^2 \frac{1}{r^3}$$

potremo eliminare $d^2 \frac{1}{r^3}$, e determinare $d \frac{1}{r'^3}$ in funzione di r, r', r'' .

Quindi è che dopo aver ottenuto r' da una prima approssimazione (quella in cui si ritengono i cubi) potremo da formole conosciute e semplicissime dedurre r, r'' , co' quali si determinerà $\frac{dr'}{dt}$. È perciò

che un secondo valore più esatto di $\frac{n}{n'}$ sarà dato da

$$\frac{n}{n'} = \frac{0 - \frac{\theta^3}{6r'^3} \left(1 - \frac{3\theta}{2r'} \frac{dr'}{dt}\right)}{\theta' - \frac{\theta'^3}{6r'^3} \left(1 - \frac{3(\theta' - \theta'')}{2r'} \frac{dr'}{dt}\right)}$$

altrettanto si dica per $\frac{n''}{n'''};$ dove si vede che i valori di $\frac{n}{n'}, \frac{n''}{n'''}$ avranno presa la forma

$$\frac{n}{n'} = \frac{0 - \frac{\theta^3}{6r'^3} h}{\theta' - \frac{\theta'^3}{6r'^3} h'}, \quad \frac{n}{n''} = \frac{\theta'' - \frac{\theta''^3}{6r''^3} h''}{\theta' - \frac{\theta'^3}{6r'^3} h'}$$

la quale è la stessa di quella che avevano allorchè si sono adoperati

onde fornire l'equazione $m = y + n(y^2 + 1)^{-\frac{3}{2}}$ e ciò perchè h, h', h'' diventano quantità assegnabili numericamente dopo la prima approssimazione. Ho voluto fare una prova numerica delle tavole in parola applicandole all'esempio numerico di *Gauss* pag. 167 da cui ho tratto il valore $\varphi' = 1.20151$.

Dalle presenti tavole si ha

$$m = 4.11166, \quad n = 16.3716$$

$$y = 3.84314, \quad \varphi' = 1.20181$$

onde l'errore è -0.0003 . Ove l'approssimazione si limiti ai soli quadrati de' tempi, si ha

$$m = 4.11166, \quad n = 16.7992$$

$$y = 3.8342, \quad \varphi' = 1.2499$$

onde l'errore è -0.0484 .

Ne' numeri 1101—2 delle *Astronomische Nachrichten* si trova stampata per intero la tavola di cui dò un saggio qui appresso.

Tavola per l'equazione $m = y + n(y^2 + 1)^{-\frac{3}{2}}$;
 m, n, y , sono positivi

m	n	y	m	n	y	m	n	y	m	n	y	m	n	y
3.8	24.606	2.4	4.0	12.134	3.8	4.0	8.485	1.0	4.2	34.587	2.6	4.4	0.000	4.4
3.8	22.581	2.2	4.0	20.863	3.6	4.0	6.721	0.8	4.2	31.637	2.4	4.4	16.095	4.2
3.8	20.125	2.0	4.0	26.708	3.4	4.0	5.392	0.6	4.2	28.226	2.2	4.4	28.037	4.0
3.8	17.461	1.8	4.0	30.147	3.2	4.0	4.498	0.4	4.2	24.597	2.0	4.4	36.402	3.8
3.8	14.777	1.6	4.0	31.623	3.0	4.0	4.030	0.2	4.2	20.954	1.8	4.4	41.727	3.6
3.8	12.222	1.4	4.0	31.540	2.8	4.0	4.000	0.0	4.2	17.464	1.6	4.4	44.513	3.4
3.8	9.910	1.2	4.0	30.264	2.6	4.2	0.000	4.2	4.2	14.259	1.4	4.4	45.220	3.2
3.8	7.920	1.0	4.0	28.122	2.4	4.2	14.019	4.0	4.2	11.434	1.2	4.4	44.272	3.0
3.8	6.301	0.8	4.0	25.403	2.2	4.2	24.268	3.8	4.2	9.051	1.0	4.4	42.053	2.8
3.8	5.075	0.6	4.0	22.361	2.0	4.2	31.295	3.6	4.2	7.141	0.8	4.4	38.910	2.6
3.8	4.218	0.4	4.0	19.208	1.8	4.2	35.610	3.4	4.2	5.710	0.6	4.4	35.152	2.4
3.8	3.818	0.2	4.0	16.121	1.6	4.2	37.683	3.2	4.2	4.748	0.4	4.4	31.049	2.2
3.8	3.800	0.0	4.0	13.241	1.4	4.2	37.947	3.0	4.2	4.242	0.2	4.4	26.833	2.0
4.0	0.000	4.0	4.0	10.672	1.2	4.2	36.796	2.8	4.2	4.200	0.0	4.4	22.700	1.8

Questo saggio è la trentesima sesta parte dell'intera tavola.

FORMOLE E TAVOLE

PER TROVARE LA DISTANZA DI UN PIANETA, O DI UNA COMETA
DALLA TERRA

CON QUATTRO OSSERVAZIONI, MANCANTI DELLE LATITUDINI ESTREME

MEMORIA

DEL SOCIO ORDINARIO

CAV. A. DE GASPARIS

Tutti i metodi finora inventati da Geometri per la determinazione delle orbite, ad eccezione di uno de' metodi di *Gauss*, cadono in difetto nel caso del movimento del pianeta nel piano dell'eclittica, e danno risultati mal sicuri nel caso di latitudini molto piccole. Ora ricordo che nella mia sesta memoria su tale argomento, inserita colle precedenti nel 1° volume delle memorie della nostra Accademia per gli anni 1852-53-54 trattando il caso specialissimo del moto dell'astro nel piano stesso dell'eclittica, ho promesso un metodo generale applicabile a tutti i casi. Ciò mi propongo ora di fare, e ricordo altresì che nel giugno 1857 ho presentato due memorie aventi per titolo *Formole e tavole per la determinazione della distanza di un corpo celeste dalla terra*. In queste, e propriamente nella prima, tenendo conto fino ai termini moltiplicati pe' eubi de' tempi inclusivamente, nello sviluppo delle coordinate eliocentriche, riduco il problema a dipendere da una curva descritta graficamente una volta per tutte, ed intersegata da una retta le cui costanti vengono esibite dai dati delle osservazioni. E qui debbo dire che ciò sapeva farsi solo nel caso che si ritenessero i termini moltiplicati pe' quadrati de' tempi. Nella secon-

da memoria riduco in tavola l'equazione della curva costante, ed introduco nel calcolo anche i termini di quarto ordine, onde avere risultati più esatti. In tali due memorie i dati del problema erano *tre osservazioni complete*. In questo lavoro i dati saranno, *quattro osservazioni mancanti delle latitudini estreme*; mostrerò che il problema può essere risoluto mediante l'uso della tavola anzidetta, e terrò conto altresì de' termini moltiplicati per le quarte potenze del tempo, in una seconda approssimazione.

Siano t, t', t'', t''' i tempi delle osservazioni. Si ponga
 $\vartheta'' = k(t' - t)$, $\vartheta' = k(t'' - t)$, $\vartheta = k(t''' - t')$, $\vartheta_1 = k(t''' - t')$, $\vartheta_2 = k(t''' - t'')$
 e siano r, r', r'', r''' i quattro raggi vettori.

Contrasegneremo con $n01, n02, n12, n23, n13$ le note aje triangolari, descritte ne' tempi $t' - t$, $t'' - t$, ecc.

Ciò posto, dalle note equazioni generali si ha

$$0 = \begin{cases} n12 (\varrho \cos \alpha + R \cos l) \\ - n02 (\varrho' \cos \alpha' + R' \cos l') \\ n01 (\varrho'' \cos \alpha'' + R'' \cos l'') \end{cases} \quad (1)$$

$$0 = \begin{cases} n12 (\varrho \sin \alpha + R \sin l) \\ - n02 (\varrho' \sin \alpha' + R' \sin l') \\ n01 (\varrho'' \sin \alpha'' + R'' \sin l'') \end{cases} \quad (2)$$

$$0 = \begin{cases} n23 (\varrho' \cos \alpha' + R' \cos l') \\ - n13 (\varrho'' \cos \alpha'' + R'' \cos l'') \\ n12 (\varrho''' \cos \alpha''' + R''' \cos l''') \end{cases} \quad (3)$$

$$0 = \begin{cases} n23 (\varrho' \sin \alpha' + R' \sin l') \\ - n13 (\varrho'' \sin \alpha'' + R'' \sin l'') \\ n12 (\varrho''' \sin \alpha''' + R''' \sin l''') \end{cases} \quad (4)$$

eliminando ϱ fra (1) e (2), e ϱ'' fra (3) e (4) avremo

$$0 = \begin{cases} n12 R \sin(l - \alpha) \\ - n02 \{ \varrho' \sin(\alpha' - \alpha) + R' \sin(l' - \alpha) \} \\ n01 \{ \varrho'' \sin(\alpha'' - \alpha) + R'' \sin(l'' - \alpha) \} \end{cases} \quad (5)$$

$$0 = \begin{cases} n12 R''' \sin(l''' - \alpha''') \\ - n13 \{ \varrho'' \sin(\alpha'' - \alpha''') + R'' \sin(l'' - \alpha''') \} \\ n23 \{ \varrho' \sin(\alpha' - \alpha''') + R' \sin(l' - \alpha''') \} \end{cases} \quad (6)$$

eliminando finalmente φ'' fra (5) e (6) si troverà

$$0 = \begin{cases} n12.n13R \operatorname{sen}(l-\alpha) \operatorname{sen}(\alpha''-\alpha''') \\ - n02.n13R' \operatorname{sen}(l''-\alpha) \operatorname{sen}(\alpha''-\alpha''') \\ n01.n13R'' \operatorname{sen}(l'''-\alpha) \operatorname{sen}(\alpha''-\alpha''') \\ n12.n01R''' \operatorname{sen}(l'''-\alpha''') \operatorname{sen}(\alpha''-\alpha) \\ - n01.n13R'' \operatorname{sen}(l'''-\alpha''') \operatorname{sen}(\alpha''-\alpha) \\ n01.n23R' \operatorname{sen}(l'-\alpha'') \operatorname{sen}(\alpha''-\alpha) \\ - \varphi' n02.n13 \operatorname{sen}(\alpha''-\alpha''') \operatorname{sen}(\alpha'-\alpha) \\ \varphi' n01.n23 \operatorname{sen}(\alpha'-\alpha''') \operatorname{sen}(\alpha''-\alpha) \end{cases}$$

e dividendo tutto per $n01.n13$ si trova

$$\begin{aligned} & + \operatorname{sen}(\alpha''-\alpha''') \left\{ \frac{n12}{n01} R \operatorname{sen}(l-\alpha) - \frac{n02}{n01} R \operatorname{sen}(l''-\alpha) + R'' \operatorname{sen}(l'''-\alpha) \right\} \\ & + \operatorname{sen}(\alpha''-\alpha) \left\{ \frac{n12}{n13} R''' \operatorname{sen}(l'''-\alpha''') - R'' \operatorname{sen}(l''-\alpha''') + \frac{n23}{n13} R' \operatorname{sen}(l'-\alpha''') \right\} \\ & = \varphi' \left\{ \frac{n02}{n01} \operatorname{sen}(\alpha'-\alpha) \operatorname{sen}(\alpha''-\alpha''') - \frac{n23}{n13} \operatorname{sen}(\alpha''-\alpha) \operatorname{sen}(\alpha'-\alpha''') \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Ora è noto che col ritenere fino ai termini moltiplicati pe' cubi de' tempi ne' sviluppi della forma

$$x'' = x' + \frac{dx'}{dt} t + \frac{d^2x'}{dt^2} \frac{t^2}{2} + \frac{d^3x'}{dt^3} \frac{t^3}{6} \quad (8)$$

$$x = x' - cc.$$

rappresentando x, x' cc. y, y' cc. le coordinate prese nel piano stesso dell' orbita, si hanno le equazioni

$$\frac{n12}{n01} = \frac{0}{t''} \frac{6r^{13}-t^2}{6r^{13}-t^{12}}, \quad \frac{n02}{n01} = \frac{0}{t''} \frac{6r^{13}-t^{12}}{6r^{13}-t^{12}}.$$

Similmente sviluppando x'' ed x''' in funzione di x', y' ed y''' in funzione di y' , con equazioni simili alla (8) si troverà

$$\frac{n12}{n13} = \frac{0}{t'} \frac{6r^{13}-t^2}{6r^{13}-t^{12}}, \quad \frac{n23}{n13} = \frac{0}{t'} \frac{6r^{13}-t^{12}}{6r^{13}-t^{12}}.$$

Sostituendo tali valori nella (7) e dividendo poi tutto per $\operatorname{sen}(\alpha''-\alpha''')$ $\operatorname{sen}(\alpha''-\alpha)$, si ha

$$\begin{aligned} & + \frac{0}{t''} \frac{6r^{13}-t^2}{6r^{13}-t^{12}} \frac{R \operatorname{sen}(l-\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha''-\alpha)} - \frac{0}{t''} \frac{6r^{13}-t^{12}}{6r^{13}-t^{12}} \frac{R' \operatorname{sen}(l''-\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha''-\alpha)} + \frac{R'' \operatorname{sen}(l'''-\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha''-\alpha)} \\ & + \frac{0}{t'} \frac{6r^{13}-t^2}{6r^{13}-t^{12}} \frac{R'' \operatorname{sen}(l'''-\alpha''')}{\operatorname{sen}(\alpha''-\alpha''')} - \frac{R'' \operatorname{sen}(l''-\alpha''')}{\operatorname{sen}(\alpha''-\alpha''')} + \frac{0}{t'} \frac{6r^{13}-t^{12}}{6r^{13}-t^{12}} \frac{R' \operatorname{sen}(l'-\alpha''')}{\operatorname{sen}(\alpha''-\alpha''')} \\ & = \varphi' \left\{ \frac{0}{t''} \frac{6r^{13}-t^{12}}{6r^{13}-t^{12}} \frac{\operatorname{sen}(\alpha'-\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha''-\alpha)} - \frac{0}{t'} \frac{6r^{13}-t^{12}}{6r^{13}-t^{12}} \frac{\operatorname{sen}(\alpha'-\alpha''')}{\operatorname{sen}(\alpha''-\alpha''')} \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

*

ora si rifletta che $\frac{6r'^2 - \theta^2}{6r'^2 - \theta'^2} = 1 + \frac{\theta'^2 - \theta^2}{6r'^2} + \frac{\theta'^2(\theta'^2 - \theta^2)}{36r'^4}$ cc. e trascurando il terzo termine come piccolissimo, si riterrà $\frac{6r'^2 - \theta^2}{6r'^2 - \theta'^2} = 1 + \frac{\theta'^2 - \theta^2}{6r'^2}$, e ciò s'intenda fatto in tutti i termini della stessa forma. Poste le quali cose, si faccia

$$\left. \begin{aligned} & + \frac{\theta}{\theta''} \frac{R \sin(l - \alpha)}{\sin(\alpha'' - \alpha)} - \frac{\theta'}{\theta''} \frac{R' \sin(l' - \alpha)}{\sin(\alpha'' - \alpha)} + \frac{R'' \sin(l'' - \alpha)}{\sin(\alpha'' - \alpha)} \\ & + \frac{\theta}{\theta'} \frac{R'' \sin(l''' - \alpha''')}{\sin(\alpha'' - \alpha''')} - \frac{R'' \sin(l'' - \alpha''')}{\sin(\alpha'' - \alpha''')} + \frac{\theta_i}{\theta'_i} \frac{R' \sin(l' - \alpha''')}{\sin(\alpha'' - \alpha''')} \end{aligned} \right\} = A$$

$$\left. \begin{aligned} & + (\theta'^2 - \theta^2) \frac{\theta}{\theta''} \frac{R \sin(l - \alpha)}{\sin(\alpha'' - \alpha)} - (\theta'^2 - \theta^2) \frac{\theta'}{\theta''} \frac{R' \sin(l' - \alpha)}{\sin(\alpha'' - \alpha)} \\ & + (\theta'^2 - \theta^2) \frac{\theta}{\theta'_i} \frac{R'' \sin(l''' - \alpha''')}{\sin(\alpha'' - \alpha''')} - (\theta'^2 - \theta^2) \frac{\theta_i}{\theta'_i} \frac{R' \sin(l' - \alpha''')}{\sin(\alpha'' - \alpha''')} \end{aligned} \right\} = B$$

$$\frac{\theta'}{\theta''} \frac{\sin(\alpha' - \alpha)}{\sin(\alpha'' - \alpha)} - \frac{\theta_i}{\theta'_i} \frac{\sin(\alpha' - \alpha''')}{\sin(\alpha'' - \alpha''')} = C$$

$$(\theta'^2 - \theta^2) \frac{\theta'}{\theta''} \frac{\sin(\alpha' - \alpha)}{\sin(\alpha'' - \alpha)} - (\theta'^2 - \theta^2) \frac{\theta_i}{\theta'_i} \frac{\sin(\alpha' - \alpha''')}{\sin(\alpha'' - \alpha''')} = D.$$

Onde l'equazione (9) diventerà

$$A + \frac{B}{6r'^2} = \varphi' \left(C + \frac{D}{6r'^2} \right)$$

la quale può evidentemente scriversi così

$$\varphi' = \frac{A}{C} \left\{ 1 + \frac{\frac{D}{6C} - \frac{B}{6A}}{r'^2} \right\} \quad (10)$$

Dopo ciò si prenda l'equazione notissima

$$r'^2 = \varphi'^2 \sec^2 \varphi' + R'^2 - 2\varphi' R' \cos(l' - \alpha')$$

e fattovi $\varphi' = \Delta' - R' \cos(l' - \alpha') \cos^2 \varphi'$ viene

$$r'^2 = \Delta'^2 \sec^2 \varphi' + R'^2 - R'^2 \cos^2(l' - \alpha') \cos^2 \varphi'$$

onde $r'^2 = \left\{ \Delta'^2 \sec^2 \varphi' + R'^2 - R'^2 \cos^2(l' - \alpha') \cos^2 \varphi' \right\}^{\frac{1}{2}}$

e perciò l'equazione (10) col sostituirvi il valore di r'^3 or trovato, e l'altro di φ' in funzione di Δ , diventa

$$\Delta' - R' \cos(l' - \alpha') \cos^2 \varphi' = \frac{A}{C} \left\{ 1 + \frac{\frac{D}{6C} - \frac{B}{6A}}{\left\{ \Delta'^2 \sec^2 \varphi' + R'^2 - R'^2 \cos^2 \varphi' \cos^2(l' - \alpha') \right\}^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

e messo $R' \cos(l' - \alpha') \cos^2 \varphi' = C'$, $R'^2 - R'^2 \cos^2(l' - \alpha') \cos^2 \varphi' = B'^2$

$$\frac{D}{6C} - \frac{B}{6A} = -e', \quad \frac{A}{C} = A' \quad \text{si deduce}$$

$$\Delta' - C' = A' \left\{ 1 - \frac{e'}{B'^2 \left(\frac{\Delta'^2 \sec^2 \varphi'}{B'^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

si faccia $y^2 = \frac{\Delta'^2 \sec^2 \varphi'}{B'^2}$, d'onde $\Delta' = B' \cos \varphi' y$

e finalmente si ricaverà

$$\frac{A' + C'}{B' \cos \varphi'} = y + \frac{A' e'}{B'^2 \cos \varphi'} (y^2 + 1)^{-\frac{3}{2}}$$

cioè ponendo $\frac{A' + C'}{B' \cos \varphi'} = m$, $\frac{A' e'}{B'^2 \cos \varphi'} = n$ si ha

$$m = y + n (y^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} \quad (11)$$

dalla quale si tratta di ricavare l'incognita y . Per riuscirvi prontamente ho costruito delle tavole per l'equazione (11) le quali si trovano stampate ne' numeri 1101 - 1102 delle *Astronomische Nachrichten*, poichè di detta tavola non ho dato che un saggio nella seconda memoria sopra citata, e presentata all'Accademia in giugno 1857.

Ora è necessario mostrare il legame fra il raggio vettore, la distanza accorciata e l'incognita y , onde trovata questa, si possano dedurre le altre. In primo luogo avendosi

$$\Delta' = B' \cos \varphi' y \quad \text{e} \quad \varphi' = \Delta' - C' \quad \text{si dedurrà} \quad \varphi' = B' \cos \varphi' - C'$$

essendo di più $y^2 = \frac{\Delta'^2 \sec^2 \varphi'}{B'^2}$, e $r'^2 \Delta'^2 \sec^2 \varphi' + B'^2$ avremo

$$r'^2 = B'^2 \left(\frac{\Delta'^2 \sec^2 \varphi'}{B'^2} + 1 \right) \quad \text{e quindi} \quad r' = B' (y^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$$

Or qui è importante far notare che $B' = R' \text{sen } z'$ e che per essere

$r' = \frac{R' \text{sen } z'}{\text{sen } z}$ viene $(y^2 + 1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\text{sen } z}$. Pel valore de' simboli z', z , vedi *Gauss* Th. mot. pag. 157. La relazione fra z ed y è utilissima per la scelta della incognita y nel caso delle doppie soluzioni, essendo note le regole semplicissime date da *Gauss* per la scelta della z . La relazione sudetta fra z ed y mostra che la nominata tavola può essere considerata come atta a dare prontamente anche l'incognita z , lo che può riuscir utile a chi volesse risolvere il problema co' metodi di *Gauss*.

Per tener conto de' termini di quarto ordine, rifletto che se nelle due equazioni

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^3} &= \frac{1}{r'^3} - \frac{d}{dt} \frac{1}{r'^3} \theta'' + \frac{d^2}{dt^2} \frac{1}{r'^3} \frac{\theta'^2}{2} \\ \frac{1}{r'^3} &= \frac{1}{r'^3} + \frac{d}{dt} \frac{1}{r'^3} \theta + \frac{d^2}{dt^2} \frac{1}{r'^3} \frac{\theta^2}{2} \end{aligned}$$

si tien conto de' soli termini moltiplicati per le prime potenze de' tempi, si ottiene l'equazione

$$\frac{\theta}{r^3} + \frac{\theta''}{r'^3} = \frac{\theta'}{r'^3}$$

questa, ottenuta per altra via nella settima memoria stampata nel volume dell'Accademia sopra citato, si verifica fino ai termini di quarto ordine. Onde se prendiamo l'equazione

$$\frac{1}{r'^3} = \frac{1}{r'^3} + \frac{d}{dt} \frac{1}{r'^3} \theta$$

avremo da essa il valore di dr' col suddetto grado di approssimazione. Eseguendo la differenziazione, si trova

$$\frac{1}{12} \left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r'^3} \right) = \frac{\theta}{4r'^4} \frac{dr'}{dt} \quad (12)$$

Ricordo ora i valori di $\frac{n01}{n12}$, $\frac{n02}{n12}$ esatti fino ai termini moltiplicati per le quarte potenze del tempo. Essi sono

$$\frac{n01}{n12} = \frac{\theta'' 6r'^3 - \theta'^2 - \frac{3\theta'^3 dr'}{2r' dt}}{\theta 6r'^3 - \theta^2 + \frac{3\theta^3 dr'}{2r' dt}}$$

$$\frac{n02}{n12} = \frac{\theta'}{\theta} \frac{6r'^3 - \theta'^2 - \frac{3\theta'^2(\theta - \theta'')dr'}{2r'dt}}{6r'^3 - \theta^2 + \frac{3\theta^2 dr'}{2r'dt}}$$

e sostituendo in queste il valore di $\frac{dr'}{dt}$ dato dalla (12) sarà

$$\frac{n01}{n12} = \frac{\theta''}{\theta} \frac{6r'^3 - \theta'^2 - \frac{\theta'^3}{2\theta} \left(1 - \frac{r'^3}{r'^{1/3}}\right)}{6r'^3 - \theta^2 + \frac{\theta^3}{2} \left(1 - \frac{r'^3}{r'^{1/3}}\right)}$$

$$\frac{n02}{n12} = \frac{\theta'}{\theta} \frac{6r'^3 - \theta'^2 + \frac{\theta'^2(\theta - \theta'')}{2\theta} \left(1 - \frac{r'^3}{r'^{1/3}}\right)}{6r'^3 - \theta^2 + \frac{\theta^3}{2} \left(1 - \frac{r'^3}{r'^{1/3}}\right)}$$

Similmente si ha, fino alle quarte potenze del tempo

$$\frac{n13}{n12} = \frac{\theta'_1}{\theta} \frac{6r'^3 - \theta'^2 + \frac{3\theta'^3 dr'}{2r'dt}}{6r'^3 - \theta^2 + \frac{3\theta^3 dr'}{2r'dt}}$$

$$\frac{n23}{n12} = \frac{\theta_1}{\theta} \frac{6r'^3 - \theta_1^2 + \frac{3\theta_1^2(\theta_1^3 + \theta)}{2r'dt}}{6r'^3 - \theta^2 + \frac{3\theta^3 dr'}{2r'dt}}$$

quindi sostituendo anche in queste per $\frac{dr'}{dt}$ il valore dato dalla (12) avremo

$$\frac{n13}{n12} = \frac{\theta'_1}{\theta} \frac{6r'^3 - \theta_1'^2 + \frac{\theta_1'^3}{2\theta} \left(1 - \frac{r'^3}{r'^{1/3}}\right)}{6r'^3 - \theta_1^2 + \frac{\theta_1^3}{2} \left(1 - \frac{r'^3}{r'^{1/3}}\right)}$$

$$\frac{n23}{n12} = \frac{\theta_1}{\theta} \frac{6r'^3 - \theta_1^2 + \frac{\theta_1^3(\theta_1^3 + \theta)}{2\theta} \left(1 - \frac{r'^3}{r'^{1/3}}\right)}{6r'^3 - \theta^2 + \frac{\theta^3}{2} \left(1 - \frac{r'^3}{r'^{1/3}}\right)}$$

Si ponga per brevità

$$\theta'' + \frac{\theta'^3}{2\theta} \left(1 - \frac{r'^3}{r'^3}\right) = L, \theta'^2 - \frac{\theta'^2(\theta - \theta'')}{2\theta} \left(1 - \frac{r'^3}{r'^3}\right) = M$$

$$\theta'^2 - \frac{\theta'^3}{2\theta} \left(1 - \frac{r'^3}{r'^3}\right) = N, \theta' - \frac{\theta'^2(\theta' + \theta)}{2\theta} \left(1 - \frac{r'^3}{r'^3}\right) = P.$$

$$\theta^2 - \frac{\theta^2}{2} \left(1 - \frac{r'^3}{r'^3}\right) = Q$$

e l'equazione (7) mediante la sostituzione de' valori corretti di $\frac{n01}{n02}$,

$$\frac{n02}{n01}, \frac{n13}{n12}, \frac{n23}{n12} \text{ diverrà.}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{\theta}{\theta''} \frac{6r'^3 - Q}{6r'^3 - L} \frac{R \text{sen}(\ell - \alpha)}{\text{sen}(\alpha'' - \alpha)} - \frac{\theta'}{\theta''} \frac{6r'^3 - M}{6r'^3 - L} \frac{R' \text{sen}(\ell' - \alpha)}{\text{sen}(\alpha'' - \alpha)} + \frac{R'' \text{sen}(\ell'' - \alpha)}{\text{sen}(\alpha'' - \alpha)} \\ & + \frac{\theta}{\theta'} \frac{6r'^3 - Q}{6r'^3 - N} \frac{R''' \text{sen}(\ell''' - \alpha''')}{\text{sen}(\alpha'' - \alpha''')} - \frac{R'' \text{sen}(\ell'' - \alpha''')}{\text{sen}(\alpha'' - \alpha''')} + \frac{\theta'}{\theta'} \frac{6r'^3 - P}{6r'^3 - N} \frac{R' \text{sen}(\ell' - \alpha''')}{\text{sen}(\alpha'' - \alpha''')} \\ & = \theta' \frac{\theta'}{\theta''} \frac{6r'^3 - M}{6r'^3 - L} \frac{\text{sen}(\alpha' - \alpha)}{\text{sen}(\alpha'' - \alpha)} - \theta' \frac{\theta'}{\theta'} \frac{6r'^3 - P}{6r'^3 - N} \frac{\text{sen}(\alpha' - \alpha''')}{\text{sen}(\alpha'' - \alpha''')} \end{aligned}$$

ed allo stesso modo come si è praticato per la equazione (9), rimanendo inalterati i valori di A, C, sostituendo ai valori di B, D i valori corretti b , d dati da

$$\begin{aligned} b &= \left\{ (L - Q) \frac{\theta}{\theta''} \frac{R \text{sen}(\ell - \alpha)}{\text{sen}(\alpha'' - \alpha)} - (L - M) \frac{\theta'}{\theta''} \frac{R' \text{sen}(\ell' - \alpha)}{\text{sen}(\alpha'' - \alpha)} \right. \\ & \quad \left. (N - Q) \frac{\theta}{\theta'} \frac{R''' \text{sen}(\ell''' - \alpha''')}{\text{sen}(\alpha'' - \alpha''')} - (N - P) \frac{\theta'}{\theta'} \frac{R' \text{sen}(\ell' - \alpha''')}{\text{sen}(\alpha'' - \alpha''')} \right\} \\ d &= (L - M) \frac{\theta'}{\theta''} \frac{\text{sen}(\alpha' - \alpha)}{\text{sen}(\alpha'' - \alpha)} - (N - P) \frac{\theta'}{\theta'} \frac{\text{sen}(\alpha' - \alpha''')}{\text{sen}(\alpha'' - \alpha''')} \end{aligned}$$

onde si vede che il nuovo valore corretto di e' , e che chiamo e'' , si ha da $-e'' = \frac{d}{6C} - \frac{b}{6A}$. Perciò i valori m , n della equazione

$$= y + n(y^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} \text{ si hanno da}$$

$$m = \frac{A' + C'}{B' \cos \beta'} \text{ come prima, ed } n = \frac{A' e''}{B'^2 \cos \beta}$$

avremo dunque il mezzo di ottenere il valor corretto di y .

Onde raggiungere maggior esattezza si può ne' valori di b, d sostituire $(L-Q) \left(1 + \frac{L}{6r^3}\right)$ ad $L-Q$; $(L-M) \left(1 + \frac{L}{6r^3}\right)$ ad $L-M$
 $(N-Q) \left(1 + \frac{N}{6r^3}\right)$ ad $N-Q$; $(N-P) \left(1 + \frac{N}{6r^3}\right)$ ad $N-P$.

Premesse queste cose è necessario fare le seguenti riflessioni.

Per ottenere il valore di $\frac{dr'}{dt}$ si vede che bisogna conoscere il valore di r'' . Ora nella prima approssimazione, quella cioè in cui si tien conto che termini moltiplicati fino ai cubi dei tempi si ottiene dalle tavole il valore di y , e quindi quelli di φ' , r' . Col valore conosciuto di r' si calcoleranno i rapporti delle aje dalle equazioni

$$\frac{n12}{n01} = \frac{\varphi}{\varphi'} \frac{6r'^3 - \varphi^2}{6r'^3 - \varphi'^2}, \quad \frac{n02}{n01} = \frac{\varphi'}{\varphi''} \frac{6r'^3 - \varphi'^2}{6r'^3 - \varphi'^2}$$

$$\frac{n12}{n13} = \frac{\varphi}{\varphi'} \frac{6r'^3 - \varphi^2}{6r'^3 - \varphi'^2}, \quad \frac{n23}{n13} = \frac{\varphi'}{\varphi''} \frac{6r'^3 - \varphi'^2}{6r'^3 - \varphi'^2}$$

quindi l'equazione (5) conoscendo φ' fornirà φ'' , e per riprova di calcolo lo stesso valore di φ'' si otterrà dalla (6), molto prossimamente. Da φ'' si ha immediatamente r'' dalla notissima equazione

$$r''^2 = \varphi'' \sec^2 \varphi'' + R''^2 - 2 R'' \varphi'' \cos (l'' - \alpha'') \dots (13)$$

E qui è importante far osservare che i valori di r' φ' si sono ottenuti da' cinque dati arbitrari α , α' , α'' , α''' , φ' invece de' sei ordinariamente richiesti. Tale circostanza ha avuto pur luogo nella mia quinta memoria, e nella seconda nota delle medesime. In tutti questi casi però, pel compimento della soluzione, è necessario introdurre il sesto dato arbitrario che nel caso presente è φ'' . Debbo altresì far notare che il valore di $\frac{dr'}{dt}$ fornito in questo lavoro è meno esatto di quello dato nella seconda memoria che ho presentato all'Accademia in Giugno 1857, e che colla prima è inserita nelle *Astronomische Nachrichten* n° 1101-1102.

Ora è d'uopo mostrare come si deducono gli elementi dell'orbita. Ottenuto il valor corretto di y , della seconda approssimazione, se ne

dedurranno φ' , r' , e quindi φ'' , r'' dalle equazioni (5) (6) (13). Dopo ciò si avranno le coordinate da

$$\begin{aligned} x' &= \varphi' \cos \alpha' + R' \cos l', & y' &= \varphi' \sin \alpha' + R' \sin l', & z' &= \varphi' \operatorname{tg} \beta' \\ x'' &= \varphi'' \cos \alpha'' + R'' \cos l'', & y'' &= \varphi'' \sin \alpha'' + R'' \sin l'', & z'' &= \varphi'' \operatorname{tg} \beta'' \end{aligned}$$

L'inclinazione, ed il nodo φ ed i , si avranno da

$$\operatorname{tg} i \sin \varphi = \frac{y' z'' - y'' z'}{x' y'' - x'' y'}, \quad \operatorname{tg} i \cos \varphi = \frac{x' z'' - x'' z'}{x' y'' - x'' y'}$$

contrassegnando con λ' , λ'' gli angoli fatti da' raggi vettoriali colla linea de' nodi, avremo

$$\sin (\lambda'' - \lambda') = \frac{y' z'' - y'' z'}{r' r'' \sin i \sin \varphi} = \frac{x' z' - x'' z'}{r' r'' \sin i \cos \varphi}$$

e posto $\frac{y'}{x'} = \operatorname{tg} \omega'$, $\frac{y''}{x''} = \operatorname{tg} \omega''$ avremo ancora

$$\cotg \lambda' = \cotg (\omega' - \varphi) \cos i, \quad \cotg \lambda'' = \cotg (\omega'' - \varphi) \cos i$$

dalle quali si avranno i valori di λ' , λ'' .

Il valore assoluto di n_{12} sarà dato da

$$n_{12} = r' r'' \sin (\lambda'' - \lambda')$$

e dalla prima delle equazioni (13) si conoscerà ancora il valore assoluto di n_{01} . Si avrà, dopo ciò, quanto è necessario per calcolare il valore del semiparametro dalla equazione da me trovata nella settima delle memorie citate, e che è

$$\sqrt{p} = \frac{1}{\theta \theta' \theta''} \frac{\theta^3 n_{01} + \theta''^3 n_{12}}{\theta^2 - \theta \theta'' + \theta'^2 - \frac{\theta^2 \theta'^2}{6 r^3}}$$

altri cinque valori potrebbero formarsi del semiparametro con equazioni somiglianti, dalla combinazione cioè di n_{12} , n_{02} ; n_{12} , n_{02} ; n_{23} , n_{12} ; n_{13} , n_{12} ; n_{23} , n_{13} . Vedi la mia memoria inserita nelle *Astronomische Nachrichten* num. 1101-1102.

La longitudine del perielio, e l'eccentricità π ed e vengono date dalle due

$$\frac{p}{r'} = 1 + e \cos (\lambda' - \pi); \quad \frac{p}{r''} = 1 + e \cos (\lambda'' - \pi)$$

Il semiasse maggiore a si ottiene da $p = a (1 - e^2)$

Conosciuti gli angoli φ , π , λ' , λ'' è agevolissimo dedurne la longitudine vera o media ad un'epoca qualunque, poichè da a è noto il movimento medio, e con e si può far passaggio dell'anomalia vera alla media, ed eccentrica, e viceversa.

SULLE STELLE DOPPIE

FORMOLE

PER LA DETERMINAZIONE DELLE LORO ORBITE RELATIVE.

MEMORIA

DEL SOCIO ORDINARIO

CAV. A. DE GASPARIS

Uno de' fenomeni più maravigliosi del cielo si è alcerto quello di veder circolare stelle intorno a stelle, o, a dirla in altri termini, il vedere soli che compiono la loro orbita intorno ad altri soli. Devesi al primo Herschel l'osservazione che il ravvicinamento di due stelle non era sempre dovuta a circostanza puramente accidentale, o meramente ottica, al fatto cioè fortuito che due stelle si trovino di corrispondere lungo la stessa visuale, e sieno nel fatto lontanissime l'una dall'altra. Egli notò dunque il prezioso fatto che le due stelle erano *fisicamente* legate fra loro di maniera che l'una di esse, la minore, in un certo numero di anni trovavasi di aver compiuto un giro intorno alla maggiore. Questi nuovi dati fecero naturalmente sorgere il pensiero che in quei *liti sì lontani* avesser similmente gioco le forze centrali, e si sospettò che l'attrazione vi si esercitasse colle stesse leggi che il Newton ebbe scoperto nel nostro sistema solare. Savary intanto fu il primo ad assoggettare al calcolo le osservazioni raccolte fino ai suoi tempi, ed inventò un metodo col quale si possono calcolare gli elementi dell'orbita descritta dalla stella satellite, ritenendo che realmente i moti di questa fossero governati dalla legge Newtoniana. Adottò come basi del calcolo quattro osservazioni, ed in ciò fu seguito dal celebre Encke che alla sua volta presentò un altro metodo di più facile applicazione del primo. E qui torna accon-

cio il dire che i dati sui quali il calcolo si appoggia sono le distanze (apparenti) due astri, non che gli angoli che la congiungente dei loro centri fa con una retta fissa in date epoche. Ora è da riflettere che l'estrema piccolezza delle distanze in parola (in generale di pochi secondi in arco) e la difficoltà della misura degli angoli sopradetti, esercita un'influenza noccevole sull'esattezza dei risultati, e ciò unicamente per gli errori inevitabili delle osservazioni. Quindi non è raro il caso di trovare notevole differenza fra gli elementi della stessa orbita calcolata con dati diversi. In vista di questo grave sconcio il secondo Herschel propose un metodo grafico, al quale posteriormente ha in parte indossato la veste analitica (adopro le sue espressioni) metodo in cui fa entrare in calcolo tutte le osservazioni fatte, in maniera da eliminar quelle che più si allontanano dall'andamento generale delle rimanenti, ed ottenere così un risultato medio di tutte.

Così le diverse applicazioni numeriche da lui fatte mostrano la maggiore convenienza del suo operare. Il proposito di utilizzare il maggior numero di osservazioni possibile ha altresì suggerito in questi ultimi tempi al Villareceau l'uso delle derivate, di cui si giova per basare novelle formole riuscite anche queste di felice applicazione. E qui non debbo trasandare di far onorata menzione del metodo del Klinkerfues, che richiede l'uso di tre sole osservazioni, e che per la eleganza della soluzione null'altro lascerebbe a desiderare ove i dati dell'osservazione potessero ottenersi con sufficiente precisione.

Per ciò che riguarda l'attuale mio lavoro su tale spinoso argomento, ecco quanto ho a dire prima di venire all'esposizione delle formole. Il metodo da me dato pel calcolo delle orbite ellittiche dei pianeti contiene delle equazioni che convenientemente modificate pel caso attuale, prontamente esibiscono i valori delle incognite del problema anche adoperando tre osservazioni. (*) E prima di proceder oltre trovo essenziale di far notare per quale circostanza il problema può esser risolto con tre sole osservazioni, mentre di sua natura pare che ne richieda quattro, o a rigore richieda o la distanza, o l'angolo di posizione della quarta osservazione. La ragione per cui questo problema sembra richiedere al di là di tre osservazioni si è che oltre

(*) Vedi la mia settima memoria inserita nel 1° volume de' lavori Accademici per gli anni 1852. 53. 54 pag. 316.

le sei incognite per determinare la posizione e gli altri parametri dell'ellisse, ci è altresì incognito il valore della costante di Gauss pel sistema binario che si considera. Le seguenti formole mostreranno che tale incognita figura come fattor comune e quindi si può eliminarla, senza che ciò sia di ostacolo al rinvenimento del valore delle altre incognite. Poste queste cose, se da un lato l'impiego di poche osservazioni richiede minor lavoro numerico, fa temere dall'altro poco buona riuscita nei risultati finali; e se vuolsi far uso di osservazioni molte, la probabilità del buon successo è pagata a troppo caro prezzo per le lunghissime calcolazioni da fare. Ho creduto adunque attenermi ad una via di mezzo, ed ecco in qual modo. Invece di tre, adotto cinque osservazioni. Combinandole a tre a tre, e rigettando quelle in cui si trovano la prima e la quinta, mi riesce agevole di calcolare ciascuno dei raggi vettori della seconda, terza, e quarta osservazione da cinque combinazioni diverse. Ove i cinque valori calcolati della stessa incognita si accordino plausibilmente fra loro, si adotterà il medio fra tutti, quando ciò non accada, si farà uso di altre osservazioni, risparmiando la fatica di dedurre illusori elementi da dati evidentemente inconciliabili fra loro. Ho detto di voler rigettare le combinazioni in cui entrano la prima e la quinta osservazione, perchè siccome le formole che sono per esibire sono esatte fino ai termini di quarto ordine inclusivamente, esse potrebbero essere influenzate nel caso che si ritenessero osservazioni troppo lontane.

Le ricerche sulle stelle doppie accennano ai futuri progressi dell'Astronomia. A forza di perseveranza, la scienza si trova già arricchita di un catalogo di orbite di sistemi binari, risultato delle calcolazioni de' più celebri astronomi, e sempre maggiormente il fatto vien confermando la giustezza della ipotesi assunta che i movimenti in quelle lontanissime regioni stellari si eseguano secondo le leggi Newtoniane.

A N A L I S I

Siano ρ ρ' ρ'' le distanze, e φ φ' φ'' gli angoli di posizione osservati ai tempi t t' t'' , espressi in anni.

Sia i l'inclinazione del piano dell'orbita della stella satellite al

piano ch'è perpendicolare al raggio visuale menato alla stella centrale. Sia ω la longitudine del nodo.

Sia T il valore dell'anno siderico in giorni, e sia k' pel sistema binario, cioè che pel nostro sistema è la costante Gaussiana k .

Ove si contrassegnino, come si è solito di fare, con n'' n' n i tre settori rettilinei compresi fra il primo e secondo, primo e terzo, secondo terzo raggio vettore, e s'indichino con m'' m' m rispettivamente le tre quantità date immediatamente dalle osservazioni

$$\rho\rho' \sin(\varphi' - \varphi) , \rho\rho'' \sin(\varphi'' - \varphi) , \rho'\rho'' \sin(\varphi'' - \varphi')$$

avremo le relazioni

$$m'' = n'' \cos i , m' = n' \cos i , m = n \cos i$$

Siano altresì r r' r'' i tre raggi vettori per le epoche t t' t'' . Ove si trattasse del calcolo dell'orbita ellittica di un pianeta osservato nei tempi τ τ' τ'' (espressi in giorni) ponendo

$$\theta'' = k(\tau' - \tau) , \theta' = k(\tau'' - \tau) , \theta = k(\tau'' - \tau')$$

ho dimostrato in altra memoria che si hanno le relazioni

$$\begin{aligned} \frac{1}{6r^3} &= \frac{(\theta'^2 + \theta'\theta'' + \theta'^2)n + (\theta''^2 - \theta\theta'' - \theta'^2)n' - (\theta^2 + 3\theta\theta'' + \theta''^2)n''}{\theta'^2\theta''^2n + \theta'^2\theta^2n'' - \theta^2\theta''^2n'} \\ \frac{1}{6r'^3} &= \frac{(\theta\theta'' - \theta^2 - \theta''^2)n + (\theta\theta'' - \theta^2 - \theta''^2)n' + (\theta\theta'' - \theta^2 + \theta''^2)n''}{\theta'^2\theta''^2n + \theta'^2\theta^2n'' - \theta^2\theta''^2n'} \\ \frac{1}{6r''^3} &= \frac{-(\theta^2 + \theta''^2 + 3\theta\theta'')n + (\theta^2 - \theta\theta'' - \theta''^2)n' + (\theta^2 + \theta\theta' + \theta'^2)n''}{\theta'^2\theta''^2n + \theta'^2\theta^2n'' - \theta^2\theta''^2n'} \end{aligned}$$

Sostituendo in queste i valori di m , m' , m'' espressi per n n' n'' e ricordando che t t' t'' sono espressi in anni, avremo pel calcolo dei raggi vettori della stella satellite le equazioni

$$\begin{aligned} (A) \quad \frac{T^2 k'^2}{6r^3} &= \frac{(\theta'^2 + \theta'\theta'' + \theta'^2)m + (\theta''^2 - \theta\theta'' - \theta'^2)m' - (\theta^2 + 3\theta\theta'' + \theta''^2)m''}{\theta'^2\theta''^2m + \theta'^2\theta^2m'' - \theta^2\theta''^2m'} \\ (B) \quad \frac{T^2 k'^2}{6r'^3} &= \frac{(\theta\theta'' - \theta^2 - \theta''^2)m + (\theta\theta'' - \theta^2 - \theta''^2)m' + (\theta\theta'' - \theta^2 + \theta''^2)m''}{\theta'^2\theta''^2m + \theta'^2\theta^2m'' - \theta^2\theta''^2m'} \end{aligned}$$

$$(C) \quad \frac{T^2 k'^2}{6r'^3} = \frac{-(\theta^2 + \theta'^2 + 3\theta\theta'')m + (\theta^2 - \theta\theta'' - \theta'^2)m' + (\theta^2 + \theta\theta' + \theta'^2)m''}{\theta'^2\theta''^2m + \theta'^2\theta^2m'' - \theta^2\theta''^2m'}$$

e per verificare il calcolo serve l'equazione $\frac{\theta}{r^3} + \frac{\theta''}{r'^3} = \frac{\theta'}{r'^3}$

In queste equazioni i secondi membri sono quantità note poichè vi si è fatto $\theta = \ell'' - \ell'$, $\theta' = \ell'' - \ell$, $\theta'' = \ell' - \ell$, si vede adunque con quanta facilità si possano calcolare le incognite $\frac{k'^2}{r'^3}$, $\frac{k'^2}{r^3}$, $\frac{k'^2}{r'^3}$ operando sui dati forniti direttamente dalle osservazioni.

Vediamo ora come si debba procedere al calcolo delle altre incognite. In primo luogo è chiaro che le equazioni precedenti danno i valori dei rapporti $\frac{r'}{r}$, $\frac{r''}{r'}$ tuttochè i valori assoluti di k' , e di r , r' , r'' siano tuttavia incogniti.

Onde determinare l'inclinazione e la longitudine del nodo adopereremo adunque le due equazioni seguenti

$$\frac{\theta'^2}{r'^2} \{g^2 i \sin (\varphi + \varphi' - 2\omega) = (1 - \frac{\theta'^2 r'^2}{r'^2 r'^2}) \operatorname{cosec} (\varphi - \varphi')$$

$$\frac{\theta'^2}{r'^2} \{g^2 i \sin (\varphi' + \varphi' - 2\omega) = (1 - \frac{\theta'^2 r'^2}{r'^2 r'^2}) \operatorname{cosec} (\varphi' - \varphi'')$$

dalle quali si calcoleranno prontamente ω ed i .

Per ciò che riguarda il calcolo del semiparametro ricordo che i valori che ne ho dati nella citata memoria diventano nel caso attuale

$$k' \sqrt{p \theta \theta' \theta''} = \frac{(\theta''^2 m + \theta^2 m') \sec i}{\theta^2 - \theta\theta'' + \theta'^2 - \frac{T^2 k'^2 \theta'^2}{6r'^2}}$$

e per controllo serviranno le altre due

$$k'Vp \, \vartheta \, \vartheta' \vartheta'' = \frac{(\vartheta'^4 m'' - \vartheta''^4 m') \sec i}{\vartheta'^2 + \vartheta' \vartheta'' + \vartheta''^2 - \frac{T^2 k'^2 \vartheta'^2 \vartheta''^2}{6r^3}}$$

$$k'Vp \, \vartheta \, \vartheta' \vartheta'' = \frac{\vartheta'^4 m - \vartheta^4 m' \sec i}{\vartheta^2 + \vartheta \vartheta' + \vartheta'^2 - \frac{T^2 k'^2 \vartheta'^2 \vartheta^2}{6r'^3}}$$

I valori dei raggi vettori $r \, r' \, r''$ non potendo aversi altrimenti che in parti delle distanze $\rho \, \rho' \, \rho''$ cioè in parti della stessa unità (in secondi di arco) con cui queste si sono misurate, serviranno le equazioni semplicissime e note

$$\begin{aligned} r^2 &= \rho^2 \left(1 + \operatorname{tg}^2 i \sin^2 (\varphi - \omega) \right) \\ r'^2 &= \rho'^2 \left(1 + \operatorname{tg}^2 i \sin^2 (\varphi' - \omega) \right) \\ r''^2 &= \rho''^2 \left(1 + \operatorname{tg}^2 i \sin^2 (\varphi'' - \omega) \right) \end{aligned}$$

Avendosi ora i valori di $\frac{k'^3}{r^2}$ di $k'^2 p$, e di r in secondi, si avrà

anche p espresso in parti della stessa unità.

Si determinino ora gli angoli $\Pi \, \Pi' \, \Pi''$ dalle equazioni

$$\begin{aligned} \cot g \Pi &= \cot g (\varphi - \omega) \cos i, & \cot g \Pi' &= \cot g (\varphi' - \omega) \cos i, \\ \cot g \Pi'' &= \cot g (\varphi'' - \omega) \cos i \end{aligned}$$

e dopo tale calcolo per determinare il periclio Π e l' eccentricità e serviranno le equazioni

$$\frac{p}{r} = 1 + e (\Pi - \Pi), \quad \frac{p}{r'} = 1 + e \cos (\Pi' - \Pi), \quad \frac{p}{r''} = 1 + e \cos (\Pi'' - \Pi)$$

Per avere il semiasse maggiore a avremo l' equazione $a = p (1 - e^2)$ venendo a espresso anche in secondi di arco.

Dalla precedente analisi risulta che il problema può esser risoluto co' dati delle osservazioni fatte ai tempi $t \, t' \, t''$. Intanto bisogna avvertire che l'esattezza de' risultati finali può esser compromessa per

doppia ragione. La prima si è l'imperfezione inerente ed inevitabile delle osservazioni, la seconda sorge dalla forma stessa de' numeratori de' secondi membri delle equazioni (A) (B) (C). Questi considerati attentamente mostrano essere quantità assai piccole, e tanto più quanto maggiormente ravvicinati fra loro sono i tempi delle osservazioni. Quindi è che gli errori delle osservazioni medesime (in questo spinoso problema ordinariamente considerevoli) diventano anche più gravi, e quel ch'è peggio dello stesso ordine, ed anche inferiore alle quantità che si cercano. Il metodo adunque che mi sembra meglio conducente ad ottenere plausibili risultati, o ad indicare fin da primi passi la fiducia che può accordarsi alle calcolazioni, si è quello di scegliere cinque osservazioni ottenute colla maggior cura possibile, e distanti fra loro di un quindici o sedici anni almeno, nulla potendo dirsi *a priori* de' limiti più favorevoli da esistere fra le osservazioni.

Ed invero tali limiti dipendono in gran parte dalla celerità dei moti apparenti, e dalla precisione messa in apprezzarli.

Indicando le osservazioni in parola colle cifre 1, 2, 3, 4, 5 potremo combinarle a tre a tre, escludendo quelle in cui entrano contemporaneamente 1 e 5 ne' seguenti sette modi

1.2.3 (1), 1.2.4 (2), 1.3.4 (3), 2.3.4 (4), 2.3.5 (5), 2.4.5 (6), 3.4.5. (7).

Onde segue che lo stesso valore $\frac{T^2 k'^2}{6r^2}$ potrà esser dato dalle combinazioni (1) (2) (4) (5) (6) da equazioni della stessa forma di (A) ed ove si notasse notevole disaccordo fra questi differenti risultati, che pur dovrebbero essere identici, si farà nuova scelta di dati, o si eliminerà quello che cogli altri non s'accorda. Similmente la quantità $\frac{T^2 k'^2}{6r'^3}$ sarà data dai sistemi (1) (3) (4) (5) (7), ed il valore $\frac{T^2 k'^2}{6r''^3}$ sarà calcolato colle combinazioni (2) (3) (4) (6) (7). Illo qui indicato con r r' r'' i raggi vettori della 2^a 3^a e 4^a osservazione, ed è naturale il dedurre che per basi del calcolo dell'orbita si riterranno i valori medii delle cinque determinazioni di ciascuno dei raggi vettori. Il resto, come si è veduto, procede con calcolo semplice e diretto. Si è visto altresì che si ottenevano i valori del semiparametro, del semiasse maggiore, e de' raggi rettori in secondi di arco, trovo qui non inutile il far osservare che se ne avrebbero i valori effettivi ove per al-

tra via si conoscesse la distanza della stella centrale dal nostro sistema, ed in tal caso avremmo altresì il valore di k' cioè la massa della stella in confronto della massa solare, quando la stella satellite fosse di massa trascurabile, o la somma delle due masse in parti di quella del nostro sole.

Prima di terminar questa menziona aggiungerò poche parole intorno alla circostanza precedentemente notata che le equazioni (A) (B) (C) sono esatte fino ai termini di quarto ordine inclusivamente. Ora è a sapere che il Gauss, trattandosi di calcolo di orbite ellittiche di pianeti, ha mostrato aversi risultati non lontani dai veri sol che si ritengano i termini di secondo ordine; e gl' intervalli fra le osservazioni siano di pochi giorni; ed il Challis ha fondato un suo metodo sul calcolo delle orbite planetarie (metodo di compiuta buona riuscita) spingendo le approssimazioni fino ai termini di quarto ordine inclusivo, nell'eseguire lo sviluppo delle coordinate eliocentriche in funzione del tempo. Ora per le stelle doppie, la cui rivoluzione è ordinariamente oltre i cento anni, mi sembra che si possano ritenere come convergenti le serie dello sviluppo di un raggio vettore in funzione di un altro, e del tempo frapposto, allorchè questo è molto piccolo in confronto dell'inferio periodo.

SULLA PARTIZIONE DE' NUMERI

MEMORIA

DEL SOCIO CORRISPONDENTE

G. BATTAGLINI

La Teoria della partizione de' numeri, dovuta all'immortale Eulero, per la sua importanza in varie difficili quistioni di Analisi, ha formato l'oggetto dei lavori di Geometri distinti; in prima dell'illustre italiano Pietro Paoli, e posteriormente di Herschell, Kirkman, Cayley e Sylvester. Convien riconoscere però che in una delle più importanti ricerche di tale teoria, di determinare cioè in quante vie possa comporsi un dato numero intero con altri numeri interi ancor dati, i metodi dei suddetti Geometri, eccetto quello del sig. Sylvester, non diano che il modo di risolvere, con più o meno generalità, una tale quistione, solo in alcuni casi particolari: l'esistenza di una universale rappresentazione analitica del numero cercato sembrava anzi non essere neppur sospettata, pria che il sig. Sylvester in un suo mirabil Teorema non l'avesse indicata. Secondo l'illustre autore il suddetto numero può esprimersi con una quantità collettiva, formata da una serie di analoghe-periodiche, o periodico-progressive funzioni, in numero eguale a quello dei distinti elementi che concorrono alla formazione del numero proposto, ed i loro periodi essendo misurati rispettivamente dal numero delle unità di ciascuno dei medesimi elementi; una tale espressione viene quindi paragonata dall'illustre au-

tore ad una grande onda, composta di varie onde minori, di ampiezze eguali a quella dell'onda totale, o summultipli di essa — Questo teorema, d'immenso vantaggio pratico nella quistione delle partizioni, in paragone dell'enorme complicazione di calcolo richiesta dai metodi di Kirkman, di Herschell, e dello stesso Cayley, costituendo inoltre per se stesso un singolarissimo risultato analitico, è certamente importante il darne una dimostrazione, non avendo indicato l'illustre autore nel suo lavoro, che i principii da cui è stato diretto nella sua ricerca, ed il risultato finale — In verità il chiarissimo Professor Brioschi di Pavia, in un suo recente scritto, partendo da un risultato ottenuto dal Paoli nella medesima quistione con l'integrazione di un'equazione alle differenze finite, ed adoperando il calcolo dei residui, col giovarsi principalmente di una formola del sig. Cauchy relativa al cambiamento delle variabili nella determinazione del residuo integrale di una funzione, è giunto con molta semplicità ed eleganza a dimostrare il teorema del sig. Sylvester; ciò non pertanto, per evitare il sussidio di teorie non tanto comuni, e rendere la dimostrazione più generalmente accessibile, non ho creduto inutile cercarne una più elementare, formandone l'oggetto del presente scritto, che ho l'onore di presentare all'Accademia. Ed in prima pervengo facilmente al risultato del Paoli, evitando l'integrazione di equazioni alle differenze finite; passo quindi a stabilire il teorema del sig. Sylvester nel caso semplicissimo che i numeri con i quali debba comporsi il numero proposto siano tutti eguali all'unità, con considerazioni al possibile elementari, e quindi con la sola decomposizione di una frazione razionale in frazioni parziali, senza l'uso del calcolo dei residui, pervengo finalmente al teorema in quistione in tutta la sua generalità.

Raggiunto così lo scopo principale del lavoro, ho dimostrato inoltre come possa darsi generalmente alle quantità indicate dal sig. Sylvester col nome di onde, per mezzo delle funzioni circolanti di Herschell, la forma detta da Cayley dei circolatori primi, che è la più conveniente nelle applicazioni, questa proprietà non essendo dimostrata neanche nel lavoro del sig. Sylvester, ma solo verificata in un esempio particolare.

SULLA PARTIZIONE DEI NUMERI

Il problema sulla partizione dei numeri, di cui intendiamo occuparci, ha per oggetto, essendo dato un numero intero, di determinare in quanti modi possa comporsi con altri numeri interi ancor dati; indicando con n il numero proposto, e con $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_m$, i numeri interi, elementi della sua composizione, la quistione si ridurrà evidentemente a trovare il numero delle soluzioni intere e positive dell'equazione

$$\sum_i^m a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_i x_i + \dots + a_m x_m = n.$$

Sia N il numero di tali soluzioni; ponendo

$$\sum_i = \sum_0^\infty x_i x^{a_i x_i} \quad \text{e} \quad \Sigma = \sum_i \sum_2 \dots \sum_i \dots \sum_m$$

sarà

$$\Sigma = \sum x^{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_i x_i + \dots + a_m x_m}$$

e come ogni sistema di valori dei numeri

$$x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_m$$

che rende

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_i x_i + \dots + a_m x_m = n$$

dà nello sviluppo di Σ il termine x^n , il numero cercato N di tali sistemi

sarà il coefficiente di x^n nel detto sviluppo.

Ora essendo

$$\sum_i = \sum_0^\infty x_i x^{a_i x_i} = 1 + x^{a_i} + x^{2a_i} + \dots$$

due termini consecutivi T_{x_i} e T_{x_i+1} di questa serie daranno la legge ricorrente

$$T_{x_i+1} = x^{a_i} T_{x_i};$$

il paragone con quella dello sviluppo del binomio

$$(\alpha + \beta)^k = \sum \frac{k(k-1) \dots (k-x_i+1)}{1 \cdot 2 \dots x_i} \alpha^{k-x_i} \beta^{x_i}, \text{ o sia}$$

$$T_{x_i+1} = \frac{k-x_i}{x_i+1} \frac{\beta}{\alpha} T_{x_i} \text{ darà}$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = -x^{a_i}, \quad k = -1, \text{ onde sarà}$$

$$\sum_i = (1-x)^{a_i-1}, \quad \sum = (1-x)^{a_1-1} (1-x)^{a_2-1} \dots (1-x)^{a_m-1},$$

e si avrà quindi il teorema del Paoli.

Il numero delle maniere di comporre un numero n con i numeri interi a_1, a_2, \dots, a_m , è eguale al coefficiente di x^n nello sviluppo secondo le potenze di n dell'espressione

$$\frac{1}{(1-x^{a_1})(1-x^{a_2}) \dots (1-x^{a_m})}$$

Per ottenere intanto questo coefficiente, nel che consiste propriamente la difficoltà del problema, si ha un teorema del sig. Sylvester che intendiamo dimostrare. Consideriamo da principio il caso semplicissimo in cui gli m elementi a_i siano tutti eguali all'unità, il che corrisponde a cercare in quante vie possa comporsi il numero n con m termini della serie dei numeri naturali.

Pel teorema precedente sarà in tal caso N eguale al coefficiente di x^n nello sviluppo dell'espressione $\frac{1}{(1-x)^m}$ sicchè indicandolo con $S_{m,n}$ si avrà evidentemente

$$S_{m,n} = \frac{m(m+1) \dots (m+n-1)}{1 \cdot 2 \dots n}.$$

Ora essendo identicamente

$$\frac{1}{(1-x)^m} = \frac{1}{(1-x)^{m-1}} + \frac{x}{(1-x)^m}$$

è facile vedere che $S_{m,n}$ è una tale funzione di m ed n da soddisfare all'equazione alle differenze finite

$$S_{m,n} = S_{m-1,n} + S_{m,n-1}$$

e ne sarà un integrale particolare, poichè non racchiude alcuna funzione arbitraria.

Si ponga intanto $S_{m,n} = F_m f_n$; si avrà

$$\frac{F_m}{F_m - F_{m-1}} = \frac{f_n}{f_{n-1}} = e'$$

onde $F_n = (1 - e^{-t})^{-n}$, $f_n = e^{nt}$, ed

$$S_{m,n} = \frac{e^{nt}}{(1 - e^{-t})^m} = \sum_{-m}^{\infty} T_{m,i} t^i,$$

e poichè questa espressione di $S_{m,n}$ soddisfa all'equazione alle differenze finite indipendentemente da t , i coefficienti $T_{m,i}$ delle potenze di t nel suo sviluppo vi soddisferanno ancora, e ne saranno perciò integrali particolari; sarà quindi $S_{m,n}$ eguale ad uno di questi coefficienti; supponghiamo $S_{m,n} = T_{m,i}$, e resterà a determinare l'indice i . A tale oggetto si osservi che, per la natura stessa della quistione, allorchè $m = 1$, sarà $S_{m,n} = 1$, qualunque sia il numero n ; ma il solo termine dello sviluppo dell'espressione $\frac{e^{nt}}{(1 - e^{-t})^m}$ che per $m = 1$ sia indipendente da n essendo evidentemente il primo, che è affetto dalla potenza -1 di t , sarà $i = -1$, $S_{m,n} = T_{m,-1}$, e si avrà quindi la proprietà: Il coefficiente di x^n nello sviluppo dell'espressione $\frac{1}{(1-x)^m}$ è eguale al coefficiente di $\frac{1}{t}$ nello sviluppo di $\frac{e^{nt}}{(1 - e^{-t})^m}$.

Questo risultato, che corrisponde al teorema del sig. Sylvester pel caso particolare esaminato, in cui gli elementi a siano eguali all'unità, ci dà il mezzo di dimostrare questo teorema in tutta la sua generalità, nel seguente modo.

Si ponga

$$X = \frac{1}{(1-x_1^{a_1})(1-x_2^{a_2}) \dots (1-x_k^{a_k})}$$

ed indicando con $x_1, x_2, \dots, x_1, \dots, x_k$ le radici dell'equazione $X = \infty$, e con $m_1, m_2, \dots, m_1, \dots, m_k$ i loro rispettivi gradi di

multiplicità, siano $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_k$ le somme delle frazioni parziali, corrispondenti a queste radici, in cui può decomporsi la funzione X ; sarà

$$X_i = \frac{A_{i,0}}{(x-x_i)^{m_i}} + \frac{A_{i,1}}{(x-x_i)^{m_i-1}} + \dots + \frac{A_{i,m_i-1}}{x-x_i}$$

Siano $S_1, S_2, \dots, S_i, \dots, S_k$ i coefficienti di x^n nello sviluppo delle espressioni $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_k$, sarà evidentemente la loro somma il coefficiente di x^n nello sviluppo di X , e quindi pel teorema del Paoli si avrà

$$N = S_1 + S_2 + \dots + S_i + \dots + S_k.$$

Ora ponendo in X_i $x = x_i s$, sarà

$$(-)^{m_i} X_i = \frac{A_{i,0}}{x_i^{m_i}} \frac{1}{(1-s)^{m_i}} - \frac{A_{i,1}}{x_i^{m_i-1}} \frac{1}{(1-s)^{m_i-1}} \dots \pm \frac{A_{i,m_i-1}}{x_i} \frac{1}{s-1}$$

e chiamando $S_{m,n}$ il coefficiente di s^n nello sviluppo di $\frac{1}{(1-s)^m}$ sarà evidentemente

$$(-)^{m_i} S_i = \frac{A_{i,0}}{x_i^{n+m_i}} S_{m_i,n} - \frac{A_{i,1}}{x_i^{n+m_i-1}} S_{m_i-1,n} \dots \pm \frac{A_{i,m_i-1}}{x_i^{n+1}} S_{1,n}$$

ma da un'altra parte ponendo nell'espressione $x^{-n} X_i$, $x = x_i e^{-t}$, sarà

$$\begin{aligned} (-)^{m_i} x^{-n} X_i &= \frac{A_{i,0}}{x_i^{n+m_i}} \frac{e^{nt}}{(1-e^{-t})^{m_i}} - \frac{A_{i,1}}{x_i^{n+m_i-1}} \frac{e^{nt}}{(1-e^{-t})^{m_i-1}} \\ &\quad \pm \frac{A_{i,m_i-1}}{x_i^{n+1}} \frac{e^{nt}}{1-e^{-t}} \end{aligned}$$

e chiamando T_i il coefficiente de' $\frac{1}{t}$ in questo sviluppo, e $T_{m,-1}$ l'a-

nalogo coefficiente nello sviluppo dell'espressione $\frac{e^{nt}}{(1-e^{-t})^n}$, si avrà

$$\begin{aligned} (-)^{m_i} T_i &= \frac{\Lambda_{i,0}}{x_i^n + m_i} T_{m_i-1} - \frac{\Lambda_{i,0}}{x_i^n + m_i - 1} T_{m_i-1, -1} \dots \\ &\pm \frac{\Lambda_{i, m_i-1}}{x_i^n + 1} T_{1, -1} \end{aligned}$$

ma per le cose dette si ha $S_{m,n} = T_{m,-1}$ adunque $S_i = T_i$ e quindi

$$N = T_1 + T_2 \dots + T_i \dots + T_k.$$

Ora ponendo nell'espressioni $x^{-n} X_1, x^{-n} X_2 \dots x^{-n} X_k$ eccetto $x^{-n} X_i, x = x_i e^{-t}$ è facile vedere che i loro sviluppi non avranno potenze negative di t , sarà quindi il coefficiente di $\frac{1}{t}$ nello sviluppo di $x^{-n} X_i$ lo stesso che il coefficiente di $\frac{1}{t}$ nello sviluppo di $x^{-n} X$; adunque il coefficiente di x^n nello sviluppo dell'espressione

$$\frac{1}{(1-x^{a_1})(1-x^{a_2}) \dots (1-x^{a_m})}$$

è eguale a quello di $\frac{1}{t}$ nello sviluppo di

$$\sum_i^k \frac{x_i^{-n} e^{nt}}{(1-x_i^{a_1} e^{-a_1 t})(1-x_i^{a_2} e^{-a_2 t}) \dots (1-x_i^{a_m} e^{-a_m t})}$$

il simbolo Σ estendendosi a tutte le radici $x_1, x^2 \dots x_i \dots x_k$ dell'equazione $X = \infty$. Si osservi finalmente che se x_i non fosse una radice dell'equazione $X = \infty$, lo sviluppo precedente non avrebbe potenze negative di t , quindi se supponghiamo che x_i sia una radice primitiva di una delle equazioni $x-1=0, x^2-1=0, x^3-1=0 \dots$ potremo estendere il simbolo Σ dell'espressione precedente a tutte le

radici primitive di queste equazioni, poichè quelle radici che non coincideranno con alcuna delle radici dell'equazione $X = \infty$ non contribuiranno alla formazione di N , ed inoltre queste ultime radici si troveranno fra le radici primitive di quelle equazioni: abbiamo così il teorema generale del Sig. Sylvester.

Indicando con $x_1, x_2 \dots x_i \dots x_k$ le radici primitive dell'equazione $x^r - 1 = 0$, e con W_r il coefficiente di $\frac{1}{r}$ nello sviluppo dell'espressione

$$\Theta = \sum_i^k \frac{x_i^{-n} e^{nt}}{(1-x_i^{a_1} e^{-a_1 t}) (1-x_i^{a_2} e^{-a_2 t}) \dots (1-x_i^{a_m} e^{-a_m t})}$$

il numero delle maniere di comporre il numero n con gli elementi $a_1, a_2 \dots a_i \dots a_m$ sarà

$$N = W_1 + W_2 + W_3 + \dots$$

Le quantità W_r sono indicate dal Sig. Sylvester col nome di onde, ed è chiaro che hanno un valore effettivo solamente quelle in cui l'indice r è divisore di alcuno degli elementi a_i . Nel determinarle, nei casi particolari, converrà distinguere tra gli elementi $a_1, a_2 \dots a_m$ quelli che sono divisibili per r da quelli che non sono tali; siano $a'_1, a'_2 \dots a'_m$, i primi, ed $a''_1, a''_2 \dots a''_m$ i secondi essendo $x_i^{a'_i t} = 1$, sarà

$$\Theta = \sum_i^k \frac{x_i^{-n} e^{nt}}{(1-e^{-a'_1 t}) \dots (1-e^{-a'_m t}) (1-x_i^{a''_1} e^{-a''_1 t}) \dots (1-x_i^{a''_m} e^{-a''_m t})}$$

e ponendo

$$\tau = \log(1-e^{-a'_1 t}) + \log(1-e^{-a'_2 t}) \dots + \log(1-e^{-a'_m t})$$

si avrà

$$\Theta = \sum_i^k \frac{x_i^{-n} e^{nt-\tau}}{(1-x_i^{a''_1} e^{-a''_1 t}) \dots (1-x_i^{a''_m} e^{-a''_m t})}$$

Ora essendo

$$\frac{d \log(1-e^{-t})}{dt} = \frac{1}{e^t - 1} = \frac{1}{t} - \frac{1}{2} + \frac{B_1}{1.2} t - \frac{B_2}{1.2.3.4} t^3 + \dots$$

in cui B_{2i+1} rappresentano i numeri di Bernoulli, sarà

$$\log(1-e^{-t}) = \log t - \frac{1}{2}t + \frac{B_1}{1 \cdot 2^2}t^2 - \frac{B_3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4^2}t^4 + \dots$$

onde ponendo successivamente in luogo di t , $a'_1 t$, $a_2 t \dots a'_{n'} t$, e chiamando s_i la somma delle potenze i degli elementi $a'_1, a'_2 \dots a'_{m'}$, si avrà

$$\tau = \log a'_1 a'_2 \dots a'_{m'} t^{m'} - \frac{1}{2} s_1 t + \frac{B_1}{1 \cdot 2^2} s_2 t^2 - \frac{B_3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4^2} s_4 t^4 + \dots$$

e ponendo

$$\theta = (n + \frac{1}{2} s_1) t - \frac{B_1}{1 \cdot 2^2} s_2 t^2 + \frac{B_3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4^2} s_4 t^4 - \dots$$

verrà

$$\theta = \frac{1}{a'_1 a'_2 \dots a'_{m'} t^{m'}} \sum_1^k \frac{x_i^{-n} e^{\theta}}{(1 - x_i^{a'_1} e^{-a''_1}) \dots (1 - x_i^{a''_{m'}} e^{-a''_{m'}})}$$

Se $r=1$, sarà $a'_i = a_i$, $a''_i = 0$, $s_i = a_1^i + a_2^i \dots a_m^i \dots$,
e $\theta = \frac{e^{\theta}}{a_1 a_2 \dots a_m t^m}$, laonde essendo W , il coefficiente di $\frac{1}{t}$ in
 θ , sarà W , il coefficiente di t^{m-1} nello sviluppo dell'espressione
 $\frac{e^{\theta}}{a_1 a_2 \dots a_m}$.

Se gli elementi $a_1, a_2 \dots a_m$ sono tutti numeri primi, o solamente primi tra loro, sarà $W_r = 0$ per i valori di r diversi dagli elementi stessi (eccetto per $r=1$); se poi $r = a_i$, sarà

$$\theta = \frac{1}{a_i t} \sum_1^k \frac{x_i^{-n} e^{\theta}}{(1 - x_i^{a'_1} e^{-a''_1 t}) \dots (1 - x_i^{a''_{m-1}} e^{-a''_{m-1} t})}$$

ora per ottenere il coefficiente di $\frac{1}{t}$ in questa espressione dovendosi considerare evidentemente il primo termine dello sviluppo della quan-

tà sottoposta al segno Σ , e che si ha ponendo $l=0$, sarà

$$W a_i = \frac{1}{a_i} \sum_i^k \frac{x_i^{-n}}{(1-x_i^{a'_1}) \dots (x_i^{a'_{m-1}})}$$

Nel calcolo delle onde occorre di determinare i valori di espressioni della forma $\sum \frac{F_a}{F_b} x_i^{-n}$, essendo F_a ed F_b delle funzioni razionali di x_i , ed il simbolo Σ estendendosi a tutte le radici immaginarie di un'equazione binomia $x^k - 1 = 0$: ora si può dare al risultato una forma osservabile, lasciando indeterminato l'esponente n , nel seguente modo.

Sia $F_a = \sum_{\mu} A_{\mu} x_i^{\mu}$, $F_b = \sum_{\nu} B_{\nu} x_i^{\nu}$, e sia $\mu = \alpha$, $\nu = \beta$ mod. k ; essendo $x_i^{\mu} = x_i^{\alpha}$ si potrà supporre che F_a ed F_b siano ridotte alla forma $F_a = \sum_0^{k-1} \alpha A_{\alpha} x_i^{\alpha}$, ed $F_b = \sum_0^{k-1} \beta B_{\beta} x_i^{\beta}$ — Ciò posto potranno determinarsi i coefficienti c in modo che sia

$$\frac{F_a}{F_b} = (c_0 + c_1 x_i + c_2 x_i^2 + \dots + c_{k-1} x_i^{k-1});$$

infatti nell'identità

$$F_a = F_b (c_0 + c_1 x_i + c_2 x_i^2 + \dots + c_{k-1} x_i^{k-1})$$

eguagliando tra loro i coefficienti delle potenze simili x_i^i di x_i , si avrà

$$A_i = B_0 c_i + B_1 c_{i-1} + B_2 c_{i-2} + \dots + B_{k-1} c_{i+k-1},$$

o cioè che torna lo stesso

$$A_i = B_i c_0 + B_{i-1} c_1 + B_{i-2} c_2 + \dots + B_{i+k-1} c_{k-1};$$

ponendo in questa equazione successivamente $i=0, 1, 2, \dots, k-1$, si avranno k equazioni di 1° grado per determinare i coefficienti c_0, c_1, \dots, c_{k-1} .

Sarà quindi

$$\sum \frac{F_a}{F_b} x_i^{-n} = c_0 \sum x_i^{-n} + c_1 \sum x_i^{-n+1} + \dots + c_{k-1} \sum x_i^{-n+k-1},$$

dovendosi estendere Σ alle radici dell'equazione $x_i^{k-1} + x_i^{k-2} + \dots + x_i^2 + x_i + 1 = 0$.

Ora indicando con s_i la somma delle potenze i delle radici di

questa equazione, sarà $s_0 = k - 1$, $s_{-i} = s_i$, e per le note relazioni tra le somme delle potenze simili delle radici di un'equazione, ed i suoi coefficienti, si avrà

$s_i + 1 = 0$, $s_2 + s_1 + 2 = 0 \dots s_i + s_{i-1} + s_{i-2} \dots + i = 0$,
essendo $i \leq k - 1$, onde $s_1 = s_2 = \dots = s_i = -1$; si avrà quindi, secondo che

$$n \equiv 0, 1, 2 \dots k - 1, \text{ mod. } k$$

$$\sum \frac{F_a}{F_b} x_i^{-n} = \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_{k-1}, \quad \text{essendo}$$

$$c_0 (k-1) - c_1 - c_2 \dots - c_{k-1} = \gamma_0$$

$$c_1 (k-1) - c_2 - c_3 \dots - c_0 = \gamma_1$$

$$c_2 (k-1) - c_3 - c_4 \dots - c_1 = \gamma_2$$

$$c_{k-1} (k-1) - c_0 - c_1 \dots - c_{k-2} = \gamma_{k-1}$$

e quindi

$$\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 \dots + \gamma_{k-1} = 0;$$

adunque indicando col simbolo $\left(\frac{i}{k}\right)$ una quantità che è eguale all'unità allorchè i è divisibile per k , ed è zero nel caso opposto, si avrà

$$\sum \frac{F_a}{F_b} x_i^{-n} = \gamma_0 \left(\frac{n}{k}\right) + \gamma_1 \left(\frac{n-1}{k}\right) \dots + \gamma_{k-1} \left(\frac{n-k+1}{k}\right).$$

che è la forma alla quale intendevamo pervenire, detta dal sig. Cayley, circolatore primo.

M E M O R I E

P E R L E

S C I E N Z E N A T U R A L I

P R E S E N T A T E

D A ' S O C I I A L L ' A C C A D E M I A N E L L ' A N N O 1857.

E D A E S S A A P P R O V A T E .

FORAMINIFERI DELLE MARNE TERZIARIE DI MESSINA

MEMORIA

DEL SOCIO ORDINARIO

O. G. COSTA

(Continuazione)

Genere *Frondicularia*, d'Orb.

Il nome assegnato a tal genere indica nettamente la forma, la figura e la struttura delle conchiglie alle quali si è applicato; compresse ed assottigliate a modo di fronda, aventi un appendice che ne rappresenta il picciuolo, con le cavità lineari rilevate, che diresti le nervature, e l'asse che ne adombra il nervo decorrente primario: tutto questo concorre a conciliar loro l'aspetto di una fogliolina.

E meglio ancora ne assoda l'analogia l'intima struttura della prima cavità, per la quale si esordiscono i successivi incrementi. Perciò, esaminato al microscopio quel primo elemento si trova, che il suo primordio è un tubolino, la cui estremità posteriore costituisce l'appendice o picciuolo, e l'anteriore si tumefà, si ramifica, ed in varie guise si anastomizzano indi coteste ramificazioni, sicchè tu vedi in realtà il processo dello svolgimento di una fogliolina. Questo complesso di vasellini costituisce una spezie di bottone più o meno tumido e ritondato, dal cui diverso sviluppo risulta la forma che successivamente va prendendo la conchiglia. Questo stesso bottone costituisce

la cavità primitiva, che poscia dividesi in due, e procede, sia con ordine simmetrico, sia difforme, come successivamente vedremo. E la intera conchiglia, nella sua totalità, acquista la figura or lanceolare, ora cordata, ora falcata o semilunare, ora allungata ed anche lineare; come ben vedesi dando uno sguardo alla monografia di tal genere di quelle spettanti alle diverse località, tanto nostrali che di terre straniere.

Intanto il d'Orbigny, a cui si deve la fondazione di questo genere, come de' tanti altri della classe de' Foraminiferi, così lo definisce:

« Conchiglia libera, regolare, equilaterale, oblonga o romboidale, fortemente compressa da ciascun lato; costituita da cavità delle presse, rappresentante ciascuna un semicerchio, o i due lati di un triangolo, la cui estremità superiore è sovente prolungata, la prima (cavità) costantemente ovale e regolare; asse fittizio dritto. Apertura rotondata, unica, perforata alla estremità anteriore dell'angolo costituito da ciascuna cavità. »

Dalla quale definizione risulta evidentemente, che le specie da noi indicate come *falciformi*, *lineari*, e *non simmetriche* debbono essere escluse dal genere Frondicolaria. Ed in realtà l'autore le riporta al genere prossimo *Cristellaria*. Tale è la sua *Cristellaria lanceolata*.

Proseguita da ciò la necessità di chiarire le specie di questi due generi; la qual cosa non può farsi altrimenti che per l'analisi comparativa della organizzazione delle conchiglie tipiche spettanti all'uno ed all'altro genere.

Sono pel d'Orbigny *Cristellarie* quelle specie di conchiglie *libere, regolari, equilaterali, oblonghe od ovali, compresse*; e fin qui, eccettuando la forma romboidale ammessa nel genere *Frondicolaria*, le specie de' due generi sono confuse o indistinte. Vuole indi le *Cristellarie* esser costituite da una spira intieramente abbracciata oppure no; e formate da cavità compresse, allungate, spesso raggiungenti la spira, o sivero un poco progettate ed oblique, l'ultima delle quali perforata da un'apertura rotonda posta sull'angolo carente, ossia sul lato opposto al rivolgimento della spira.

Esaminiamo ora qual'è la forma delle rispettive cavità nelle conchiglie de' due generi, quale la loro disposizione, i rapporti e le differenze.

Nelle *Frondicolarie*, dopo quel primo bottone, che superiormente

abbiamo descritto, e che noi abbiamo effigiato nella nostra Tavola III^a, fig. 7^a e 8^a, qual vedesi ad un forte ingrandimento microscopico; succedono due cavità, per effetto della biforcazione di quel primo elemento vascolare che costituisce la cavità primitiva. E queste due cavità, o sono uguali e simmetriche, o l'una è maggiore dell'altra sotto proporzioni diverse. Nel primo caso risulta una forma regolare e simmetrica, come di un ferro di lancia diversamente prolungato e dilatato; come quelle che vengono rappresentate dalla fig. 13, 13^a e 15 della citata tavola III^a, e le altre della tavola II^a fig. 20, 21, 22, 23 e 24. E queste sole sarebbero riconosciute e ritenute dal d'Orbigny come *Frondicolarie*. Nel secondo caso le cavità disuguali in lunghezza, serbando sempre una inclinazione angolare tra loro, procedono difformemente; e ne risulta una conchiglia che affetta forma alquanto spirale, senza che realmente n' esistesse vestigio. Ed in vero; prendasi una di quelle frondicolarie più falciformi, nelle quali le disparità delle due serie di cavità è maggiore, e che meglio si accostano a talune delle vere *Cristellarie*; sottopongasi al microscopio, a lume rifratto, ossia per trasparenza; e la si troverà, non mica composta da cavità *semplici, compresse ed allungate*; nè alcuna rivolta in spira; nè altre che *raggiungessero questa*, che non esiste; nè finalmente alcuna che si proiettasse quasi tangentialmente alla curva di quella; come ciò in realtà si trova nelle *Cristellarie*. In vece le cavità sono divise in due per l'asse comune; e quelle di una delle due serie, essendo più lunghe e più inclinate delle altre, costituiscono una espansione laterale; le altre della serie opposta, essendo più brevi, meno inclinate, e quasi perpendicolari all'asse, formano una fascia angusta, ma proporzionalmente più rilevata, carenata allo esterno, ed allo interno separata dalla prima per un cordone rilevato, ch'è l'asse comune, o il prolungamento del tubo primitivo, che si era ramificato, e poi riunito per le anastomosi sue medesime.

Qui risiede dunque la differenza essenziale e fondamentale tra i due generi di conchiglie: differenze che una volta stabilite per la microscopica esplorazione, è facile riconoscerle col semplice aiuto di una lente d'ingrandimento, la quale soccorresse la vista ordinaria, tanto che basti a riconoscere —

1.° La presenza del prolungamento peduncolare; che se tal-

volta manca per effetto di mutilazione, di esso non trovasi giammai alcun vestigio nelle *Cristellarie*:

2.° Il rigonfiamento o bottone che immediatamente succede al picciuolo; rigonfiamento costantemente guernito di un numero diverso di risalti, cordoni, o pieghe longitudinali; e che propriamente son dessi gli elementi vascolari, di cui si è già discorso:

3.° Il risalto longitudinale medio, il quale è ben distinto dalla carena marginale, per uno spazio appianato più o meno largo; mentre nelle *Cristellarie*, quando la carena vi esiste, non vi è altro marchio nè di cordone nè di solco veruno.

Dopo ciò succede la forma totale della conchiglia, la quale, derivando dallo andamento e dalla proporzione delle due diverse ed opposte serie di cavità, risulta delle seguenti figure:

A — Romboidale o a ferro di lancia, se le cavità si prolungano ugualmente da entrambi i lati. E secondo la loro inclinazione od angolosità ne prosegue un rombo a lati più o meno disuguali, ma sempre *bilaterali*.

B — Falcata, se le cavità sono più estese da uno de'lati, il quale sarà più o meno sinuoso, mentre il lato opposto è incurvato e convesso; e però appariscono *unilaterali*.

C — Alternanti, quando le cavità, in luogo di succedersi dall'uno e dall'altro lato ugualmente separate da una linea mediana, l'una succede all'altra alternativamente, come ciò fassi nelle *Testolarie*.

D — In fine taluna ve ne à di forma *lanecolare*, sulla quale le cellole sono trasversali, orizzontali, e parallele tra loro, direttamente opposte, seguendo il loro incontro una linea mediana od asse comune.

Dopo questa metodica e primordiale distribuzione è cosa facilissima la ricognizione delle specie, se tali dir si possono tutte quelle variazioni che risultano forsi per eventuali cagioni, e per mutilazioni nelle loro appendici; e si possono ben indicare con pochissime parole, schivando quelle inutili e noiose ripetizioni, di che molto si risentono le frasi comunemente impiegate. Facendone noi qui quindi l'applicazione, speriamo incontrare la commune soddisfazione.

Frondicularie equilaterali (*aequilateralia*).

1. *Frondicularia denticulata* — Tav. II, fig. 22.

Fr. nucleo longitudinaliter striato; loculis inferne productis; denticulis latis, obtusis, decresecentibus.

— —

— —

var. a) fig. 20; lateribus difformibus

— —

— —

var. b) Tav. III fig. 4; loculis angustissimis, lateribus inaequalibus.

Affinissima è questa specie alla *Frondicularia annularis* di d'Orbigny, in quanto alla figura totale della conchiglia ed alla disposizione delle cavità; non à però di quella le tre prime cavità circolarmente disposte intorno al nocciuolo, nè alcuna delle altre si prolunga posteriormente così come nella nostra, ma solo vi forma una piccola espansione delicata, che fa dire all'autore aver l'apparenza di lacerazione. Ciò però mostra la sua naturale tendenza, che poscia meglio sviluppa, come nella nostra var. b), e nella *F. spinosa*.

2. *Frondicularia spinosa*, Tav. II, fig. 23.

Fr. nucleo nullo — loculis inferne aliis rotundatis, aliis in spinam acutam productis; parte media compressa, et detruncata.

3. *Frondicularia parabolica*, Cos. Tav. III, fig. 10.

Fr. nucleo concentricè striato; loculis postice muticis in lineam parum flexuosam terminatis.

4. *Frondicularia rhombea*, Cos. Tav. III, fig. 15.

Fr. nucleo postice acuminato; loculis 4 simplicibus, figura rhombea.

5. *Frondicularia elata*, Cos. Tav. III, fig. 12.

Fr. nucleo compresso expanso; loculis paucis lateralibus; lamella cinetis, posticeque sub mucronata.

6. *Frondicularia acuminata*, Cos. Tav. III, fig. 13.

Fr. nucleo nullo, loculis angustissimis numerosis; figura rhombea, postice valde acuminata.

7. *Frondicularia elongata*, Cos. Tav. III, fig. 1.

Fr. nucleo compresso elongato, longitudinaliter striato-plicato, lo-

culis 5 anterioribus; antice acuminata; postice elongata, obtusa.

8. *Frondicularia spatulata*, Cos. Tav. II, fig. 19. (*rovesciata*).

Fr. nucleo compresso valde elongato, longitudinaliter striato; loculis antice areuatis quatuor.

Specie a cavità alternanti (*alternantia*)

9. *Frondicularia inaequalis*, Cos. Tav. III, f. 3.

Fr. nucleo avanescente postice mucronato; loculis alternantibus, latere altero postice compressis, altero lamellatis, lamella utplurimum spiniforme.

10. *Frondicularia compressa*, Cos. Tav. III, f. 2.

— — — — — *utroque latere aequae compressis.*

Specie unilaterali (*unilateralia*).

11. *Frondicularia typica*, Cas. Tav. III, fig. 5.

Fr. nucleo elongato, postice mucronato, mucrone longinseulo; loculis 11, latere altero longissimis, oblique descendentibus, altero brevissimis horizontalibus; figura sub falcata.

12. *Frondicularia angustata*, Cos. Tav. III, f. 9.

Fr. nucleo valde elongato, mucrone subarcuato producto; loculis latere altero magis elongatis, altero angustissimis; figura lanceolari.

13. *Frondicularia lanceolata*, Cos. Tav. III, f. 7.

Fr. nucleo clato, postice rotundato, vix mucronato; loculis angustissimis, plurimis, latere altero longissimis areuatis, altero evanescentibus; carinis lateralibus amplis, media angusta et acuta.

14. *Frondicularia similis*, Cos. Tav. III, f. 16.

Fr. nucleo clato incurvato, mucrone nullo; loculis paucis elatis.

15. *Frondicularia subfalcata*, Cos. Tav. III, f. 17 e 17.

Fr. nucleo angusto elongato, postice mucronato; loculis 8, latere altero valde inclinatissimis, longissimis, altero evanescentibus; carinis explanatis.

16. *Frondicularia silicula*, Cos. Tav. III, f. 19.

Fr. nucleo elongatissimo vix mucronato; loculis paucis, latis, subarcuatis, ultimo appendiculari.

17. *Frondicularia longiusecula*, Cos. Tav. II, f. 26.

Fr. nucleo expanso, brevi, mucronato; loculis 4 latis, obliquis, carinis subaequalibus.

18. *Frondicularia subangulata*, Cos. Tav. III, f. 14.

Fr. nucleo elato, grosse plicato, plicis subangulatis; loculis paucis subangulatis, lamina tenui undique cinctis.

19. *Frondicularia ovata*, Cos. Tav. III, f. 12.

Fr. ovato rotundata; loculis 2, 3 antice interruptis.

20. *Frondicularia interrupta*, Tav. II, fig. 25.

Fr. nucleo magno, postice mucronato; loculis diversimode interruptis, antice acuminata.

Specie trasversali (*transversata*)

21. *Frondicularia transversa*, Cos. Tav. III, fig. 18.

Fr. nucleo vix conspicuo, postice acuminato; loculis transversis, medio depressis; figura lanecolaris.

SULL' INDUZIONE ELETTROSTATICA

MEMORIE DUE

DEL SOCIO ORDINARIO

A. NOBILE

INTRODUZIONE

La fisica ha da gran tempo messo in sodo esservi una connessione invariabile tra l'attrazione scambievole di due corpi carichi di contrarie elettricità separati da uno strato di materia coibente, ed una maniera di indebolimento o di stato neutro temporario delle medesime elettricità rispetto ai circostanti corpi.

Or questo stato elettrico pressochè latente, conseguenza di preponderante ed esclusiva attrazione tra i due contrarii principii elettrici; questo stato di quasi annullamento di azione di essi principii verso corpi vicini, al quale fu dato il nome di dissimulato o latente, e che venne chiaramente ravvisato per la prima volta, nei dischi conjugati, nel condensatore, nella boccia di Leida, ed in altri simili apparati, si avvera tutte le volte che si hanno in presenza due corpi carichi di contrarie elettricità divisi da strato coibente. E poichè in un conduttore isolato messo sotto l'influsso di un corpo elettrizzato, vi si svolgono i due principii elettrici, e si hanno quindi due elettricità contrarie in presenza, una nell'inducente e l'altra nell'estremo prossimo dell'indotto; e poichè un tal caso di induzione ne porge un sistema non dissimile dai testè menzionati, non sarebbe a un'andar contro le regole



di sana logica il volerlo interpretare altrimenti, escludere in esso l'effetto di scambievole dissimulazione, o apparente e temporario stato neutrale, e però invocare due principii diversi per dar ragione di fatti simili?

Tali, tra le altre, furono le ragioni che in alcune mie precedenti pubblicazioni allegai, indipendentemente da dirette pruove sperimentali, in sostegno del principio che suppone dissimulata la elettricità indotta nei conduttori isolati, o dotata di tensione verso il solo induttore; principio, il quale, come è noto, tratto dal Melloni da alcune sue particolari esperienze, fu per lui divulgato per le stampe, e poscia pur sostenuto dal Chiarissimo P. Volpicelli in varie sue dotte pubblicazioni, nelle quali, e segnatamente nell'ultima, si veggono nuovi fatti, e ingegnosissime esperienze.

Tuttavia, non mancano Chiari Fisici, e tra questi il Regnani, il Belli, il Gavaret nel suo recentissimo trattato di elettricità, ed altri molti, i quali, troppo teneri dell'antica dottrina, si mostran ripugnanti alla nuova, non ostante l'accordo meraviglioso dei fatti con quest'ultima, e la incompatibilità di essi colla prima; e non ostante i surriferiti lavori del chiaro Segretario de' nuovi Lincei, e l'autorevole e ragionato assenso dei de La Rive, Matteucci, Soret di Ginevra, ed altri fisici.

Nondimeno, cotal quistione non è tornata inutile alla scienza, imperocchè non solo ha servito e tuttavia serve a mettere in sodo il vero concetto fondamentale della induzione elettrostatica, ma eziandio ad isvolgere maggiormente le fasi ed i fatti relativi allo importantissimo fenomeno della induzione medesima.

Oltre il desiderio e la speranza di contribuire colle mie deboli forze, a riformare quel fondamentale principio, ed estendere alcun poco le dottrine elettrostatiche, altre particolari ragioni mi hanno spinto a cacciarmi di nuovo in questa delicata quistione. Il Melloni, prima di rendere di ragion pubblica il suo trovato, volle meco conferirne, ed io, non ostante che le esperienze colle quali egli cercò dimostrarlo, lasciassero nel mio spirito qualche dubbio, nondimeno non pure tenni per vera la sua dottrina, ma la credei compresa nei fatti conosciuti, e tale da potersi trarre da questi fatti medesimi; e, d'altra parte, quando il medesimo Fisico comunicolla alla nostra Ac-

cademia, essendo io parte della Commissione destinata a farne rapporto, contribuì con altri miei colleghi a provocarne la debita approvazione.

Importa dunque alla scienza, e alla dignità della nostra Accademia che venga di nuovo ventilato nel suo seno quell'importante argomento, ed importa a me particolarmente ch'io faccia il poter mio perchè l'ultimo pensiero del sommo Fisico che io m'ebbi a compagno ed amico, e che tanto onorò la scienza, non vada perduto, e si abbia, in vece, il suo luogo nella storia dei recenti progressi della Fisica.

Il principio di dissimulazione della elettricità indotta nei conduttori isolati, a cui i Fisici per lungo tempo non posero ben mente, venne messo in campo nella dotta Germania oltre a venti anni or sono; ed ivi combattuto e vinto più dall'autorità di sommi Fisici che da buone ragioni; ed io son di credere che ciò sia addivenuto da un diverso concetto che essi formaronsi della elettricità dissimulata, anzi che da altra cagione, non potendo altrimenti conciliare una profonda dottrina, ed il non riconoscere una facile deduzione da leggi e fatti irrefragabili di cui la Fisica è da gran tempo in possesso.

L'assenza di rigore nel linguaggio, non rade volte torna di ostacolo ad un'analisi esatta. E nel nostro caso, un'idea della elettricità dissimulata diversa da quella innanzi arrecata; il prendere, per esempio, in senso assoluto la parola che l'esprime, intendere cioè per essa una elettricità assolutamente priva di tensione, mentre la si suppone dotata di forte, preponderante ed esclusiva tensione solo verso quella da cui è attratta, spiegherebbe bene la divergenza delle opinioni de' Fisici intorno alla quistione in esame.

So bene che vi ha dei fisici Inglesi, i quali, non fanno punto menzione di elettricità dissimulata, ma ciò non deve farne supporre ch'essi non ammettano il fatto, o quella forma elettrica che presso tutti i Fisici del Continente, va sotto quel nome; imperocchè, non è da credere che siavi tra quelli chi non ammetta un principio di scambievolmente influenza neutralizzante delle due elettricità in presenza, sul quale fondasi il condensatore.

Il celebre Harris, se mal non mi ricorda, parla in generale di forze neutralizzanti, o di scambievolmente neutralizzamento delle due elettricità in presenza. Sotto altro nome adunque parmi che accenni al principio di dissimulazione.

Per questo Fisico, e in generale, per coloro che adottano altre denominazioni, sembrami che la nuova quistione riducasi a sapere, se la elettricità di un inducente e la contraria sviluppata nella faccia ad esso opposta di un conduttore indotto ed isolato (quasi due forze direttamente contrarie) attraendosi scambievolmente, subiscano ad un tempo una mutua o temporaria neutralizzazione, sovente parziale nell'inducente, e totale nello indotto.

I fatti principali che gli oppositori al nuovo principio invocavano erano: la divergenza dei pendolini messi all'estremo di un cilindro indotto prossimo all'inducente, o che vale lo stesso, la divergenza di quelli dell'elettroscopio indotto inferiormente; le indicazioni del saggia-tore, e quelle del piano di prova; e quando il Melloni, ignaro della testè riferita quistione sollevata in Germania, mise di nuovo innanzi il principio di dissimulazione, aggiungendo nuove esperienze e nuove vedute intorno alla distribuzione delle due elettricità su i conduttori; e quando altri Fisici presero a sostenerlo, quei fatti medesimi erano pur invocati per combatterlo.

Al Chiariss. Volpicelli, come dissi, sono principalmente dovuti importanti lavori di tal genere; ma questo dotto fisico, appoggiando e dimostrando la nuova dottrina, non volle occuparsi di proposito della confutazione delle obbiezioni ad essa arretrate, ed io medesimo aveva fatto altrettanto.

Mi propongo ora in quest'ultimo lavoro di fare una nuova analisi di quei fenomeni della induzione elettrostatica che hanno attinenza al principio di dissimulazione; e propriamente, di mettere in vista, richiamare e coordinare gli esperimenti ed i fatti principali vecchi e nuovi, non che le conseguenze che tendono a rischiarare il principio medesimo; loccare alquanto le obbiezioni ad esso opposte, e ridurre al vero valore l'uso dei ripari impiegati dal Melloni e da altri fisici per esplorare l'elettricità nei conduttori indotti. E poichè, quasi a modo di reazione, il dubbio su la elettricità dissimulata nei conduttori indotti isolati, si è voluto anche estendere su la elettricità indotta nei conduttori che, tenuti sotto l'influsso elettrico, comunicano o han per poco comunicato col suolo, così dividerò il mio lavoro in due parti, trattando nella prima, dei fenomeni che hanno attinenza a questo caso; e nella seconda, della elettricità che sotto l'influenza elettrica si svolge sui conduttori isolati.

MEMORIA PRIMA

INTORNO AI FENOMENI DELLA ELETTRICITÀ INDOTTA NEI CONDUTTORI NON ISOLATI, O ISOLATI DOPO AVER PER POCO COMUNICATI COL SUOLO.

I.

È gran tempo che accurate esperienze , han condotto distinti fisici ad ammettere esplicitamente ed implicitamente, che un conduttore comunicante col suolo mentre trovasi sotto l'influsso elettrico, non offra vestigio alcuno di elettricità simile a quella dell'inducente , venendo essa scaricata nel suolo ; e che la elettricità contraria o indotta , essendo attratta fortemente da quella dell'inducente, e tenuta come legata a questa, sia renduta quindi incapace a manifestare la sua influenza su i circostanti corpi : non altrimenti che avviene in chimica delle affinità elettive , in cui una preponderante attrazione di una sostanza verso un'altra congiunta con una terza , se ne impossessa rendendola non solo libera da quest'ultima la quale viene abbandonata, ma inetta ad unirsi con altre sostanze che hanno su di essa minore attrazione. In somma , giova ripeterlo, la tensione di quella elettricità indotta, torna massima ed esclusiva rispetto all'inducente, nulla pei circostanti corpi.

A me sembra che queste proposizioni, ammesse fin'ora, come dissi, da distinti fisici, non abbiano a destare alcun dubbio, e però che non sia mestieri venirle altrimenti dimostrando; molto più che i casi ai quali si riferiscono sono simili, anzi identici a quelli che ne porgono il condensatore , la boccia di Leida , ec.; e si sa che in questi apparati , le elettricità reciprocamente attratte o temporariamente neutralizzate, si possono anche condensare , rimanere dissimulate , e però insensibili ad altre attrazioni o influenze minori. È questa la ragione per cui in altra mia scrittura intorno al teorema fondamentale dell'induzione elettrostatica, supposi incontestabili tali proposizioni.

Nondimeno, poichè, come dissi, le obbiezioni fatte al principio che suppone dissimulata la elettricità contraria svolta da una sorgente elettrica su di un conduttore isolato, si sono anche estese a quella sui conduttori non isolati; e ciò per aver , forse , generalizzato troppo un'e-

sperienza del Riess di cui parleremo, così, per penetrare più addentro in questa delicata materia, e per rimuovere dubbii che potrebbero tornare a danno della scienza, riferirò alcune esperienze, le quali, sebbene non tutte nuove, presentate tutte sotto nuova forma, e con un unico e semplicissimo apparato, varranno a riassumere e coordinare molte circostanze importanti della induzione elettrostatica, le quali più facilmente ne condurranno al divisato scopo.

II.

Un estremo di un filo metallico alquanto lungo si unisce al globettino di un elettroscopio a pile, e l'altro estremo ad un conduttore isolato, per esempio, ad un piccolo disco metallico situato verticalmente su piede isolante. Si facci comunicare tutto questo sistema col suolo prendendo con una mano il filo, e si avvicini ad esso un corpo elettrizzato situandolo in maniera stabile di rincontro al suddetto disco nella parte opposta all'elettroscopio. La foglia d'oro di quest'istrumento rimarrà, in conseguenza, verticale ed immobile tra le due pile; e in questo stato rimarrà eziandio se, senza alterare il sistema, ne viene interrotta la comunicazione col suolo. Nondimeno, nell'uno e nell'altro caso, è del tutto privo di elettricità omologa all'inducente, e carico di elettricità contraria; ma quest'ultima è tutta dissimulata e ritenuta dall'attrazione dell'altra, e però priva di tensione rispetto ai circostanti corpi. Che sia carica di elettricità contraria ritenuta dall'attrazione dell'inducente, si vede chiaro quando quest'ultimo si allontani dal surriferito sistema tenuto isolato dopo aver per poco comunicato col suolo: imperocchè allora la foglia d'oro col suo movimento tosto ne avverte della esistenza di quella elettricità divenuta libera. Che sia la medesima senza tensione pei circostanti corpi quando nel surriferito modo trovasi sotto l'influenza dell'inducente, lo dimostra bene la costante immobilità della foglia d'oro; imperocchè, se nel conduttore e nel filo sottoposti all'induzione vi fosse una benchè minima quantità di elettricità libera, questa dovrebbe venir manifestata dalla sensibilissima foglia medesima, ma lo dimostra eziandio la mancanza di segni elettrici di ogni maniera nel filo e nel conduttore, quantunque convenevolmente esaminati.

Nè è da credere che in tal caso, quando cioè l'indotto trovasi sotto l'influenza ed ha comunicato col suolo, la elettricità contraria a quella dell'inducente che ivi si svolge trovisi unicamente nella faccia di esso indotto opposta allo inducente, e che quando questo venga allontanato, la medesima elettricità corra ad affettare il conduttore e la foglia di oro; imperocchè se mentre tutto il surriferito sistema trovasi sotto la influenza dell'inducente si distacchi celeremente il filo dall'elettroscopio mediante una bacchettina di cera lacca o di vetro, e si tolga l'inducente, si vedrà la foglia d'oro, rimasta insieme coll'elettroscopio, ad un tratto isolata dal sistema, dar segni di elettricità indotta o contraria a quella dell'inducente, e però dimostrare che questa elettricità trovavasi, durante l'induzione, fin nella estremità del conduttore più lontana dall'inducente, e che vi si trovava dissimulata.

È tale quello stato di legamento o di dissimulazione della elettricità indotta che rimane nei conduttori, i quali, restando sotto la influenza, han per poco comunicato col suolo, che, non solo non manifesta la sua azione su i corpi, e su gli elettroscopii che le si avvicinano, ma torna inetta a neutralizzarsi colla elettricità libera contraria, come con ingegnoso esperimento fu per la prima volta dimostrato dal Volpicelli; ed è anche incapace ad unirsi e cooperare con altra dell'istessa natura, ma libera; in maniera che, quei conduttori caricati di elettricità indotta, si conducono come ogni altro corpo non elettrizzato o nello stato neutro.

Una chiara pruova di ciò si ha dal seguente semplicissimo esperimento eseguito col medesimo surriferito apparato; se non che, si aggiunga un filo metallico, il quale, spiccandosi dal disco, termini in globettino, e si mantenga isolato nell'aria alquanto lontano dall'inducente.

Tenendo il filo in comunicazione col suolo, si situi l'inducente come si è detto innanzi, e si isoli poscia tutto il sistema. In questo stato, la foglia d'oro, come è naturale, rimane verticale ed immobile. Ciò posto, si carichi di debole elettricità positiva o negativa, un piccolissimo conduttore, per esempio, una testa di spilla situata alla estremità di una bacchettina di gomma lacca; e con tal conduttore si tocchi l'estremità libera del filo metallico; si vedrà tosto la fogliolina manifestare segni di elettricità corrispondenti a quella di cui era carico il

corpiciuolo, e simili perfettamente a quelli che si avrebbero se il disco, il filo, l'elettroscopio, ovvero tutto il sistema fosse nello stato naturale e privo di elettricità.

Questo esperimento l'ho anche praticato usando, in vece de' globettini elettrizzati, la costante elettricità di una piccola pila a secco.

Se in vece di comunicare direttamente la elettricità all'estremo del filo per via di contatto col corpo elettrizzato, si induca con questo ad una certa distanza, su la estremità del filo: la foglia d'oro dell'elettroscopio darà segni corrispondenti alla natura di quella poca elettricità che agisce per induzione, e non diversi da quelli che darebbe se tutto il sistema fosse senza elettricità e nello stato naturale.

La debole e poca elettricità impiegata in tale esperimento, non fa supporre punto che una parte di essa, nel caso in cui si adopera una elettricità omologa a quella dell'inducente, possa neutralizzarsi colla contraria di cui è carico il sistema, e l'altra passare oltre, ed affettare l'elettroscopio; nondimeno per rimuovere ogni dubbio, ho modificato alquanto l'esperimento.

Restando tutto l'apparato come prima, in vece dell'elettroscopio a pile ho impiegato un elettroscopio a foglie d'oro, ed ho caricato tutto il sistema di elettricità contraria all'inducente, nel modo detto di sopra. Ciò posto, ho caricato egualmente di elettricità omologa all'inducente, ovvero contraria a quella del sistema, due globettini metallici eguali isolati, e poscia con uno di essi ho toccato, come prima, l'estremità del filo, ed ho notato la divergenza delle foglie d'oro. Fatto ciò, ho allontanato l'inducente, scaricato d'ogni elettricità il sistema, e così scaricato, ho ripetuta subito dopo coll'altra pallina la medesima operazione: la divergenza delle foglie d'oro fu ad un dipresso come la prima. Il medesimo risultato ottenni impiegando l'elettricità costante di una piccola pila a secco, ed anche ripetendo le medesime operazioni con ordine inverso dal primo.

Ho variato l'esperimento tenendo l'inducente a diverse distanze per avere nell'indotto una carica più o meno forte, ed ho sempre conseguito simili risultati.

III.

Col medesimo apparato innanzi descritto, impiegando cioè l'elet-

troscopio a pile, possiamo facilmente procurarci non solo le prove della esistenza della elettricità dissimulata, nel caso in esame, ma ancora alcune condizioni che la rendono maggiore o minore.

Dopo che si è caricato di elettricità contraria all'inducente tutto il sistema anzidetto, tenendo il filo tra le mani, e poscia isolandolo e rimanendolo sotto l'influenza, si ha, come si è detto, la verticalità della foglia d'oro, e la sua immobilità tra le due pile. Fatto ciò, se successivamente si avvicini l'inducente all'indotto, si ritorni alla pristina posizione, e poscia si allontani di più, si hanno nel primo caso, segni di elettricità libera omologa a quella dell'inducente; nel secondo, il ritorno alla verticalità della foglia d'oro e quindi di nuovo alla totale dissimulazione della elettricità, e finalmente segni di elettricità contraria; e però, avvicinando lo allontanamento e l'avvicinamento, si vede piegare la foglia d'oro, or da una parte, or da un'altra, e manifestare in conseguenza, servendomi della espressione del Volpicelli, or l'abbandono di una e or di un'altra elettricità.

Simiglianti fenomeni si osservano ancora interponendo e togliendo, o viceversa, una lamina di materia dielettrica di una capacità induttrice specifica maggiore dell'aria, come, una lamina di gomma lacca, di solfo ec.; imperocchè, è noto, che le interposizioni di tali lamine rispondono ad un'avvicinamento, e viceversa. Le oscillazioni della foglia d'oro, accennando ora ad una elettricità e ora ad un'altra, non solo mettono in bella mostra le proprietà dei dielettrici scoperte dall'illustre Faraday, ma ancora, ciò che importa al nostro proposito, le fasi di dissimulazione maggiore o minore della elettricità contenuta nell'indotto.

Il medesimo apparato torna opportuno eziandio per mettere in vista, in maniera semplice, importanti altri casi d'induzione, i quali non riuscirebbero qui inutili allo scopo al quale miriamo, porgendone l'analisi compiuta della influenza dei conduttori su la elettricità di un corpo elettrizzato.

I fisici sanno, quale è l'influenza scambievolmente di due corpi carichi della medesima elettricità o di elettricità contraria, messi in presenza e separati da uno strato coibente; e sanno in conseguenza che se i corpi son carichi delle medesime elettricità, si indebolisce, in generale, la tensione nelle facce opposte, e rinforzasi in tutti gli altri

lati; e, al contrario, se i corpi son carichi di elettricità contraria, la forte attrazione scambievole di esse, le richiama alle facce opposte, le dissimula, indebolendo la loro tensione negli altri lati. Gioverà al nostro proposito di esaminare minutamente la influenza che esercitano i conduttori non isolati e isolati su la carica elettrica di un corpo.

Si sottoponga il surriferito sistema all'azione di un corpo caricato di elettricità e stabilmente situato, tenendo, al solito, il filo in comunicazione col suolo. Avendo così ridotta verticale ed immobile la fogliolina, si avvicini lateralmente all'inducente un conduttore comunicante col suolo: la fogliolina darà segni di elettricità contraria all'inducente, e però piegherà verso quella medesima parte dalla quale vedesi piegare quando l'inducente si allontana dall'indotto. Con quello avvicinamento, adunque, si è prodotto, per effetto di reazione, un indebolimento nella carica elettrica dell'inducente; o, per dir meglio, la induzione preponderante di esso verso un lato, ha indebolito quelle verso gli altri lati; dico induzione preponderante verso un lato, imperocchè, se si esamini convenevolmente col piano di prova lo stato elettrico della parte dell'inducente prossima all'indotto, si trova molto più carica di prima, e più carica degli altri lati dell'inducente medesimo nei quali si trova indebolita. E poichè un simile indebolimento avviene, qualunque sia il lato dell'inducente al quale si avvicina il corpo non isolato; e d'altra parte, essendo quello temporario ed apparente, poichè allontanando il conduttore non isolato, la carica elettrica ritorna al pristino stato; ne segue che la reazione scambievole della elettricità dell'inducente, e quella svolta nel corpo che ad esso si avvicina, ha per effetto un richiamo di elettricità nelle facce prossime, una neutralizzazione temporaria o dissimulazione delle medesime elettricità attratte, e quindi uno scemamento apparente della tensione elettrica dell'inducente, la quale si manifesta col mostrarne diminuite le induzioni laterali. Su di questo principio è fondato il condensatore. Allontanando quindi, ed avvicinando reiteratamente la mano, o ogni altro conduttore non isolato all'inducente dell'apparato dianzi descritto, si deve vedere, e si vede in fatto una oscillazione della foglia d'oro, conseguenza delle vicende di tensione o dissimulazione parziale della elettricità dell'inducente, e quindi del potere induttivo che esso cagionava sul sistema.

I conduttori isolati, avvicinati all' inducente, producono anch'essi i medesimi effetti, ma di molto più deboli.

Un caso particolare, o meglio, una conseguenza di questa conosciuta legge generale, dell'influenza cioè dei conduttori isolati e non isolati di indebolire o dissimulare parte della elettricità di un corpo elettrizzato, è appunto quell'abbandono di elettricità indotta notato dal Volpicelli, avvicinando o allontanando la mano a quell'armatura di una boccia di Leida o di un quadro magico isolati, la quale fu in comunicazione colla macchina.

Se ci facciamo a considerare attentamente, ed in circostanze favorevoli, il fenomeno testè riferito, noi vedremo che in qualunque lato del corpo elettrizzato o inducente si approssimi egualmente il conduttore, si ha ad un di presso, il medesimo indebolimento, purchè non si situi precisamente tra il medesimo inducente e l'indotto, il che porge un fenomeno complesso e può anche, quando il conduttore non isolato è grande, impedire totalmente la induzione. Una tale eguaglianza di indebolimento, se mal non mi avviso, sempre più dimostra nell'induzione elettrica una influenza molecolare anzi che no, ed esclude del tutto non solo la idea di un raggiamento alla maniera della luce e del calorico, ma ancora, come tanti altri fenomeni elettrici, l'ipotesi di uno o due fluidi *sui generis*, o di entità separate dalla materia.

IV.

Le cose fin qui esposte dimostrano le fasi di scambievole dissimulazione della elettricità dell'inducente e della contraria dell'indotto, e danno svariate prove dello stato intieramente dissimulato di quest'ultima che rimane nei conduttori indotti i quali comunicano o han per poco comunicato col suolo, e che rimasero sotto l'influenza.

Nondimeno, coloro che hanno impugnato il principio della dissimulazione della elettricità indotta nei conduttori isolati sottoposti all'influsso elettrico, hanno tutti invocato la divergenza molto spiccata dei pendolini che si pongono alla estremità di un cilindro indotto che è prossima all'inducente.

Questa divergenza, la quale, come è noto, diviene maggiore col mettere una parte qualunque dell'indotto in comunicazione col suo-

lo mentre quella dei pendolini lontani svanisce, ha tutte le apparenze di un' effetto di tensione, e però ostile a quel principio, e non spiegabile coll' azione diretta dell' inducente su i pendolini. Ed in vero, se si ponga ben mente a quella divergenza, non solo si riconosce l' effetto di una forza diretta, ma ancora l' effetto molto sensibile di una forza laterale.

Il celebre Riess, sebbene nel caso dei conduttori isolati sottoposti all' influsso elettrico, metteva in evidenza questa forza laterale ch' egli attribuiva a tensione della elettricità indotta, per via di un' ingegnoso esperimento. Lateralmente ad un cilindro terminato da mezze sfere situato col suo asse in posizione verticale, adattava due pendolini, uno superiormente, e un altro inferiormente, ed in maniera che la pallina di quest' ultimo non oltrepassasse l' estremo inferiore del cilindro. Il corpo inducente di forma sferica era situato al di sotto dell' estremo inferiore del cilindro tenuto isolato.

Con tal disposizione chiaramente si dimostra che quantunque la forza diretta del corpo elettrizzato e la gravità cospirino a tirar giù i pendolini, tuttavia essi divergono lateralmente. Un tal fatto, sotto altra forma, si riproduce molto sensibilmente assoggettando un elettroscopio a paglie o a foglie d'oro ad un' induzione da sotto in sopra, cioè all' estremità inferiore delle paglie o foglie; ed anche più semplicemente, stringendo tra due dita due leggiere foglioline metalliche: queste, in vece di distendersi verso l' inducente inferiore e mantenersi congiunte e verticali, divergono lateralmente.

Questo fatto dell' esistenza di una forza laterale, par che accenni ad una tensione elettrica, ed intanto una tal tensione non è da ammettere, perchè in aperta contraddizione con fatti indubitabili e con tutto ciò che innanzi abbiamo detto ed operato intorno all' assenza di una elettricità libera nei conduttori che nell' atto dell' induzione comunicano col suolo. Per il che deve quel fatto avere un' origine ben diversa dalla tensione. La quale origine, se anche ne rimanesse ignota, la dottrina della dissimulazione non sarebbe men vera.

Nondimeno, ho preso ad analizzare minutamente il fenomeno della divergenza testè menzionato; e vi ho per avventura scorti dei caratteri per lo innanzi non avvertiti, i quali sembranmi contrarii agli effetti di una tensione, ed opportuni a farne travedere una causa pro-

babile, o almeno, un principio che ne porge una facile spiegazione di tutti i particolari del fenomeno medesimo della divergenza.

Egli è noto che un conduttore con pendolini, o un elettroscopio, se vengon caricati di una qualunque elettricità libera, manifestano questa elettricità appunto colla divergenza dei pendolini o delle foglie; e se si elettrizzano per via di induzione dalla parte opposta ai pendolini, questi del pari divergono per elettricità libera. Si avvicini, tanto nell'uno quanto nell'altro caso, lateralmente ad uno di quei pendolini un conduttore non isolato, una punta metallica, un dito, per esempio, si vedrà tosto, per effetto di reazione, il pendolino correre verso questi corpi e però crescere di divergenza; e maggiormente crescere se, nell'istesso tempo si avvicinano ai due lati dei pendolini due conduttori comunicanti col suolo, e anche due conduttori isolati; ma in quest'ultimo caso, l'effetto è molto minore. Da questi fatti trassero argomento i fisici per rendere più sensibile l'elettroscopio a pendolini o a foglie d'oro, situando lateralmente ad esse due colonnette di materia conduttrice comunicanti col suolo.

Ciò posto, sottoponiamo all'induzione elettrica il conduttore coi pendolini, o l'elettroscopio; ma procurando questa volta che l'induzione si eserciti direttamente verso l'estremità dei pendolini: questi, del pari divergeranno, e più ancora divergeranno se l'indotto, restando sotto l'influenza, vien comunicato col suolo. Si avvicini ora lateralmente ai pendolini o foglie d'oro, come si è praticato innanzi, un conduttore non isolato; ed in questo caso, in vece di vederle avvicinare al conduttore medesimo, si vedono, al contrario, fuggire da quello, quasi fosse distrutta la forza che lateralmente l'attirava, e quindi scemare sempre più o annullare la divergenza. E se lateralmente ad uno dei pendolini suddetti, si avvicini l'estremità di una verga di materia conduttrice, ma dalla parte opposta all'inducente, ed in modo che l'influenza di esso pendolino su la verga torni di molto maggiore di quella che può esercitarvi l'inducente medesimo, l'abbassamento di quello ha similmente luogo. La supposizione quindi di una elettricità libera nelle foglioline, non solo torna contraria a ciò che precedentemente dicemmo intorno all'assenza di tale elettricità nel caso dei conduttori comunicanti col suolo, ma ancora contraria a questa maniera di manifestazione dinamica di esse foglioline.

So bene che coloro i quali, contro i fatti e le opinioni di tutti i fisici, voglion supporre nei conduttori indotti, mentre comunicano col suolo, una elettricità libera contraria all'inducente, e che per conseguenza suppongono non dissimulata la elettricità che trovasi nel disco del condensatore o nell'armatura del quadro magico comunicanti col suolo, potrebbero, forse, interpretare altrimenti il fatto testè riferito dell'abbassamento dei pendolini quando ad essi si avvicina un conduttore non isolato. Potrebbero essi, dico, supporre, contro fatti irrepugnabili, essere questo conduttore medesimo anch'esso, per influenza, carico di elettricità libera contraria a quella dello inducente, e dar ragione di quello abbassamento per via di una reciproca ripulsione di elettricità omologhe. Ma, mettendo anche da banda che il suddetto conduttore, approssimandosi di molto ad uno de' pendolini dalla parte opposta all'inducente, dovrebbe risentire molto più l'influenza di quello che di questo, se ci facciamo ad osservare attentamente quell'abbassamento, vedremo di leggieri non esser esso effetto di repulsione, mancandone il carattere principale. Se in vece di avvicinare lateralmente ad uno dei pendolini suddetti un conduttore fermo qualunque, si avvicini in vece con molta accuratezza, un altro lungo pendolino simile non isolato, e si abbia cura che l'avvicinamento abbia luogo, per quanto è possibile, alquanto verso la parte opposta all'inducente: si vedrà il solo pendolino legato al conduttore abbassarsi, e l'altro non manifestare punto gli effetti di una reciproca ripulsione, mostrando semplicemente, come è naturale, una tendenza ad avvicinarsi all'inducente. L'effetto adunque che produce il pendolino, non è diverso da quello a cui da origine ogni altro conduttore comunicante col suolo, e però, anzi che ritenere l'abbassamento del pendolino legato al conduttore indotto come un effetto di ripulsione, sembrami che si debba, in vece, attribuire ad uno indebolimento o deviazione di quella forza laterale che lo faceva divergere, e su la quale ritorneremo.

Nè sembrami, che sia effetto di ripulsione il fatto osservato da un dotto mio Amico e Collega, nel ripetere alcuni de'miei esperimenti, la divergenza cioè dei medesimi pendolini quando in mezzo ad essi si venga adattando convenevolmente una punta di materia conduttrice. A me sembra, in vece, che questo fatto, non solo non accenni ad una ripulsione, ma ancora torni in appoggio ad una ipotesi che or era

alleggeremo per spiegare tutti i fenomeni dei pendolini. Quando la surriferita punta si approssima ai pendolini, prima di adattarla in mezzo ad essi, deve manifestarsi un lieve abbassamento, ma quando ha preso quel luogo, deve ritornare la pristina divergenza, non essendovi ragione per cui le forze laterali, qualunque esse sieno, rimaste libere, non abbiano ad operare la loro azione; e di più, non essendovi neanche ragione per cui il conduttore intermedio, il quale forma coll'altro conduttore e colla terra un solo conduttore, non abbia ad esercitare la solita sua influenza nel far divergere i pendolini.

Dalle cose fin qui dette risulta, che quel carattere molto pronunziato, dell'abbassamento cioè dei pendolini prossimi all'inducente quando ad essi si avvicinano de' conduttori non isolati, carattere, contrario perfettamente all'altro che mostrano i pendolini carichi di elettricità libera, esclude, se non vado errato, l'intervento di una tensione elettrica in quelli, ed include, in vece, uno scemamento o annullamento di quella forza laterale produttrice del fenomeno della divergenza.

Ma donde proviene questa forza attraente laterale che cagiona la divergenza? Donde quello abbassamento testè riferito?

Il Melloni, per dar ragione della divergenza dei pendolini prossimi all'inducente, nel caso di un cilindro isolato fornito agli estremi di tali pendolini, vagamente disse, che essa non dipendeva punto da tensione, ma che poteva avere origine da una perturbazione dell'inducente: nè andò più innanzi. Il più volte citato fisico a cui si debbono importanti lavori su l'argomento che ho preso a trattare, attribui (se ho ben compresa la sua idea) quella divergenza medesima, all'assenza di elettricità nelle parti interne delle foglioline o pendolini, ed all'azione diretta dell'inducente su le parti esterne di essi. A me sembra che l'idea dell'illustre fisico Romano, benchè ingegnosa, non sia per rimuovere tutte le difficoltà; imperocchè, se mal non mi avviso, l'azione diretta dell'inducente su la superficie dei pendolini, come avvertiva il Riess, non pare che possa dar ragione di una spiccata divergenza che suppone una forza laterale diversa dalla prima, se pur non si voglia supporre che le linee laterali di forza elettrica che partono divergenti dall'inducente, si piegino incurvandosi verso il prossimo indotto, e andando così incurvate alle parti esterne dei pendolini ne cagionino la divergenza, attirandoli nel senso delle tangenti a tali curve.

Non conoscendo noi la precisa forma che prende il flusso elettrico che si emana da un corpo elettrizzato, e le modifiche cui forse soggiace nell'atto della induzione, io prenderò ad esaminare in generale quale influenza possa esercitare nel fatto in esame, il flusso medesimo o l'atmosfera elettrica, qualunque essa sia, e comunque si vogliano supporre disposte le linee di forza elettrica che si emanano dall'induceute.

Se si ponga ben mente alla posizione de' pendolini o foglie rispetto all'induttore o alla sorgente elettrica; e d'altra parte se ci facciamo a considerare il luogo che deve occupare l'atmosfera o il flusso elettrico, è giuoco forza ammettere, doversi quelli trovare immersi in questo, ed avere di fronte la sorgente, e ai due lati pressochè tutta la spessezza, per dir così, delle due parti laterali del flusso medesimo, le quali debbono attirare a se i pendolini, e quindi cagionarne la divergenza. Anzi che cercare, adunque, nello stato elettrico de' pendolini, che deve essere dissimulato, o altrove, la cagione di quella forza laterale che li fa divergere, non è egli più ragionevole ripeterla dalle condizioni di posizione in cui quelli si trovano rispetto a tutto intero il flusso elettrico che si emana dall'induceute?

Nel nostro caso, il fatto dell'allontanamento de' pendolini da un corpo comunicante col suolo che ad essi si avvicina, il quale a noi sembra incompatibile coi caratteri della elettricità libera, si spiega facilmente coll'intervento di quel flusso elettrico; anzi, sembrami, che ne sia una conseguenza. Ed in vero, il conduttore non isolato che si avvicina ai pendolini, trovandosi nella parte dell'atmosfera elettrica che noi crediamo causa della divergenza, l'elettricità che ivi si trova si scarica nel suolo, e però scema o annulla la forza attirante, e quindi la divergenza.

Il fatto della divergenza dei pendolini quando in mezzo ad essi vien situata, convenevolmente, l'estremità o la punta di una verga conduttrice, anzi che tornare ostile alla ipotesi per noi allegata, sembrami che ne formi un appoggio. Quando ci facciamo ad avvicinare ai pendolini la suddetta punta, debbono essi manifestare, per le anzidette ragioni, un lieve abbassamento, ma appena vien situata in mezzo, deve ritornare la pristina divergenza, non essendovi ragione per cui le atmosfere laterali, rimaste allora libere, non abbiano ad esercitare la loro azione attirante; anzi, per essere, in tal caso, maggiormente sca-

ricata nel suolo la parte media di essa atmosfera, più forza, se non vado errato, acquistar debbono le parti laterali.

Ma come avviene, dirà taluno, che il saggiaiore o corpo elettrizzato ne presenta ingannevoli apparenze, mostrandoci fenomeni che sembrano provenire da una elettricità libera contraria nei prossimi pendolini? Si sa che avvicinando lateralmente ad uno di essi un altro pendolino isolato con filo di seta o altro corpicciuolo del pari isolato e carichi di elettricità omologa a quella dell' inducente, si manifesta una maggior divergenza in quel pendolino legato al conduttore, e, al contrario manifestasi in esso uno scemamento di divergenza quando il saggiaiore è carico di elettricità contraria. Questi due fatti fecero supporre i pendolini dell'indotto carichi di elettricità contraria libera. Ma cotali illusioni che contribuirono a deviare i fisici da una dottrina armonica con tutti i fenomeni che ne porge l'induzione elettrostatica, cadon del tutto, mi sembra, se si pon mente alla esistenza indubitabile delle due parti laterali dell'atmosfera o flusso elettrico dell'induceute, e alle seguenti considerazioni. Quando il saggiaiore o pendolino isolato, è carico di elettricità omologa a quella dell' induceute, alla elettricità che cagionava la divergenza si aggiunge nuova elettricità della medesima natura, e però, alla forza attirante dell'atmosfera laterale, aggiungendosi altra forza attirante, la divergenza aumenta; ma quando la elettricità di cui è carico il saggiaiore è contraria, questa, neutralizza parte della elettricità laterale, e però, tornando minore la forza attirante, deve quindi scemare la divergenza.

Noi facemmo parola della influenza dei conduttori su i corpi carichi di elettricità ai quali si avvicinano, e ricordammo che questa carica, durante quella vicinanza, temporariamente si indebolisce, perchè una parte della elettricità, in virtù di reazione, si dissimula. Or, quando noi avviciniamo il conduttore non isolato ai pendolini prossimi all'induceute, l'avviciniamo ad un tempo alcuni poco a quest'ultimo, e quindi ne indeboliamo alquanto la carica elettrica. Ciò potrebbe far supporre che questo indebolimento della carica, e quindi anche del flusso elettrico, sia la cagione unica dell'abbassamento di quei pendolini quando ad essi avviciniamo un corpo non isolato, e che la cagione per noi allegata non vi contribuisca punto direttamente. Ma poichè approssimando quel conduttore ad uno dei pendolini suddetti dal lato

opposto all' inducente, il pendolino medesimo tende similmente ad abbassarsi; e poichè d'altra parte, quell'abbassamento, in vece di tornare maggiore quando il conduttore si avvicina lateralmente più all'inducente che ai pendolini, torna, al contrario, sempre maggiore quanto più si approssima ai pendolini, ne segue che non possa con ragione escludersi l'azione diretta del conduttore sul flusso elettrico. Nondimeno, in tutti i casi, rimane sempre inammissibile la supposizione di una elettricità libera nei pendolini, e molto probabile quella della influenza del flusso o atmosfera elettrica dell'inducente.

Noi ritorneremo su di ciò nella 2.^a parte di questo lavoro, quando cioè parleremo dei conduttori isolati sottoposti all'influenza elettrica.

Chinderò questa 1.^a parte col riportare un fatto che non è certo ignoto ai Fisici, e nondimeno sembrami tale da avvalorare la spiegazione da noi adottata della divergenza dei pendolini, e porgere una prova, sebbene indiretta del principio di dissimulazione. Messo in comunicazione col suolo un cilindro coi soliti pendolini ai due estremi, ed espeso un dei capi di esso all'influsso elettrico, i pendolini prossimi all'inducente si aprono e rimangono chiusi gli altri. Ma se cessa la comunicazione col suolo, e poscia si allontani l'inducente, i pendolini lontani si aprono e i vicini da prima inamovibili si chiudono, e subito dopo si riaprono tanto quanto si aprono gli altri. Queste due fasi dei prossimi pendolini tornano favorevoli alla nostra ipotesi: il primo avvicinamento di essi era senza dubbio, dovuto all'allontanamento dell'atmosfera o flusso elettrico, ed il finale allargamento, alla elettricità dissimulata divenuta poscia libera ed operante.

Ad ogni modo, se quella ipotesi per noi allegata, quantunque dia ragione della divergenza dei pendolini, del loro abbassamento, e di ogni altro fenomeno di cui abbiamo tenuto discorso, non sia per soddisfare gli spiriti troppo severi, potrà essa valere per dimostrare, che quella spiegazione che si trae dalla tensione elettrica o dalla repulsione di una elettricità libera, e che è in aperta contraddizione con uno stato elettrico dissimulato risultante da fatti indubitabili, non è la sola spiegazione che può dar ragione di quei fenomeni, e che possono esservene di quelle che ben si accordino con tutti i fatti.

MEMORIA SECONDA

DELL'INFLUENZA DEI CONDUTTORI ISOLATI E NON ISOLATI SU I CONDUTTORI
INDOTTI ED ISOLATI, E SU LO STATO ELETTRICO DI QUESTI ULTIMI.

I.

Nella prima parte di questo lavoro rammentammo le scambievoli influenze che esercitano due corpi messi in presenza e dotati dei medesimi o contrarii principii elettrici; facemmo eziandio parola delle influenze dei conduttori non isolati e isolati su i corpi elettrizzati, e ne traemmo tutte le conseguenze le quali mettono fuor di ogni dubbio lo stato dissimulato della elettricità svolta e ritenuta dallo inducente su i conduttori non isolati, o isolati, dopo aver per poco comunicato col suolo.

Prima di imprendere l'esame dello stato delle due elettricità che si sviluppano nei conduttori isolati sottoposti all'induzione elettrica, il che forma uno degli obbietti principali del presente lavoro, tornerà opportuno di indagare quale influenza esercitano su la elettricità dei medesimi conduttori indotti, altri conduttori che ad essi si approssimano; e ciò, non solo per istudiare maggiormente i fenomeni dell'induzione elettrostatica, ma ancora perchè quell'esame ci condurrà spesso ad avvicinare conduttori ad altri conduttori.

Un corpo metallico o di superficie metallica isolato, che per maggior semplicità supporremo di forma cilindrica terminato da due mezze sfere di eguali diametri a quello del cilindro, si situi a tale distanza da una sorgente elettrica da evitare trasporto. Si approssimi molto ad una parte qualunque di esso, senza toccarla, un'altro conduttore, ma non isolato, e si esamini, con molta diligenza, per mezzo del piano di prova metallico, lo stato elettrico di quella parte. Il piano di prova, distaccato dal cilindro, ed avvicinato ad un elettroscopio, darà sempre segni di elettricità omologa all'inducente molto pronunziati; e, se prima di avvicinare quel conduttore, siasi nel medesimo modo esplorata la elettricità di quella medesima parte, o si esamini dopo che il conduttore non isolato se ne è allontanato, il piano di prova darà sempre segni corrispondenti alla parte del cilindro che si esa-

mina, ma, in generale, sempre meno pronunziati. Ma, se il corpo non isolato che si approssima ad una parte del cilindro indotto, vien per avventura situato precisamente tra questo e l'inducente, ed è grande in maniera da riparare tutto il cilindro dalla influenza o induzione dell'inducente, allora, non solo non trovasi elettricità alcuna in quella parte prossima del cilindro, ma tutto il cilindro medesimo trovasi nello stato naturale, e non può più dirsi indotto.

L'influenza, adunque, di un conduttore non isolato su la elettricità del cilindro indotto isolato è appunto di esaltare o richiamare la omologa in quella parte, qualunque essa sia, alla quale si avvicina, purchè il cilindro non cessi di essere indotto, come nel caso testè menzionato.

Una pruova sensibile di tal verità si ha eziandio spargendo lungo il dorso del cilindro, prima di sottoporlo all'induzione, una serie di aggregati di polvere finissima, come, per esempio, di licopodio. Sottoponendo così all'induzione il cilindro, ed avvicinando un conduttore isolato, o meglio, comunicante col suolo, ad uno qualunque degli aggregati suddetti, si vedrà tosto quella polvere rimuoversi e sollevarsi impetuosamente molto più di quello che prima faceva: e ciò certamente per opera di richiamo di elettricità. Che sia questa omologa a quella dell'inducente, si fa aperto dalla prima esperienza col piano di prova, ma più di tutto dalla seguente.

In qualunque parte del cilindro che trovasi sottoposto all'induzione, si avvicini moltissimo un piccolo conduttore, come per esempio, un dischetto o un globettino metallico situato all'estremità di una bacchetta di cera lacca. Senza adoperare scranni o ripari di lamine conduttrici, si metta, per poco, in comunicazione col suolo quel piccolo conduttore molto prossimo all'indotto, si isoli, e dipoi si allontani per saggiarlo all'elettroscopio. Si avranno sempre segni di elettricità contraria a quella dello inducente: e ciò pruova che la sola elettricità omologa è quella che ha esercitata la sua azione su i corpiccioli medesimi quando comunicavano col suolo. Ben si comprende, che quando un tale esperimento si pratica presso all'estremo dell'indotto prossimo all'inducente, può anche contribuire ed aver parte all'azione e la elettricità di quest'ultimo o la sua atmosfera elettrica; ma, la estrema vicinanza del piccolo conduttore all'indotto, deve far supporre preponderante, o almeno non

senza azione la elettricità omologa che vi si trova e che si accumula nella parte prossima esplorata.

In tutti i casi, è questo un fenomeno o un effetto complesso che dipende dalla distribuzione della elettricità sul conduttore, dal richiamo verso una parte di questo dell' elettricità omologa, e dall' azione dell' inducente e sua atmosfera; ma sempre dimostra essere la elettricità indotta che trovasi nel conduttore inattiva e senza azione su i corpi che le si avvicinano, ed essere operante ed attiva la sola omologa.

II

Ciò posto, facciamoci ora a trattare i punti principali della questione intorno al principio di dissimulazione della elettricità indotta nei conduttori isolati, e a studiare la distribuzione dell' elettricità in essi svolta.

È inutile rammentare qual sia intorno a ciò l' antica dottrina, e quale quella che ragionevolmente ad essa si vuol sostituire: basta solo dire, che la prima suppone libere le due elettricità che si svolgono nel conduttore isolato messo sotto l' influsso elettrico, ed occupanti ad un di presso le due metà di detto conduttore; e la seconda suppone libera la sola omologa all' inducente, dissimulata la contraria, e l' una e l' altra distribuite in tutto il conduttore indotto con una legge che dipende dalla forza dell' inducente, e dalla forma e conducibilità dell' indotto medesimo.

Se ben si ponga mente a ciò che ricordammo nella 1^a parte di questo lavoro, cioè, che l' attrazione dei due principii elettrici contrarii in presenza e separati da uno strato coibente, è una causalità, un antecedente invariabile di una scambievole dissimulazione maggiore o minore dei medesimi principii secondo la loro maggiore o minore prossimità; e d' altra parte, se si consideri che nel conduttore isolato sottomesso all' influsso di un corpo elettrizzato, si sviluppano i due principii elettrici, e che il contrario a quello dell' inducente trovasi nell' estremo prossimo ed a fronte dell' inducente medesimo; deve in conseguenza aver luogo tra essi scambievole attrazione e quindi dissimulazione. Ed in vero, non sarebbe egli contrario ai fatti e alla sana logica lo ammettere la dissimulazione, almeno in parte, della elettricità dell' inducente per opera

della reazione della contraria svolta nell'indotto, siccome innanzi abbiamo visto risultare da indubitabili esperienze, e non ammetterla poi in questa elettricità la quale è attratta da quella, e a sua volta su quella reagisce? Anzi, ogni ragion vuole che tanta ne dissimula quanta ne attrae e svolge; tal che, non vi ha punto di elettricità libera contraria nell'indotto, trovandosi tutta legata ed impegnata, non altrimenti che avviene, come altrove dicemmo, delle affinità chimiche.

Nel condensatore, l'armatura che è in comunicazione colla macchina, tanta elettricità dissimula nell'altra armatura quanta ne attrae, e però non vi è ragione di credere che avvenga altrimenti nella elettricità contraria che svolgesi nell'indotto isolato, e che è del pari attratta.

Nè il trovarsi nell'indotto medesimo anche la omologa libera può destare ragionevoli dubbii su la identità dei casi, e farne supporre che in quest'ultimo la cosa debba correre altrimenti: al contrario, il nostro concetto viene maggiormente rifermato, non solo perchè rimuove la incompatibilità, anzi l'assurdo, di due elettricità libere nel medesimo conduttore senza che abbiano a neutralizzarsi, ma ancora perchè nelle esperienze riportate nella 1^a parte di questo lavoro, mostriamo come possano coesistere nel medesimo conduttore una elettricità dissimulata ed una libera, ed agire questa sul conduttore medesimo come se null'altro vi fosse; e, al contrario, non vi ha, nè mi sembra che possa esservi, una esperienza che ne dimostri i due principii liberi su di un medesimo conduttore.

La più parte dei fatti che ne porge la induzione elettrostatica, sono in contradizione coll'antica dottrina; e, al contrario, tutti armonizzano col principio di dissimulazione; anzi son tali per avventura questi fatti da poterne facilmente trarre, come conseguenza, il principio medesimo. Avendo io, da mia parte, mostrato ciò in altre pubblicazioni, ed il Volpicelli avendo fatta la medesima cosa, ma con maggior dottrina ed estensione, io mi dispenso dal ritornarvi di nuovo. La più parte de' fisici intanto, sempre illusi dalla divergenza dei pendolini messi agli estremi di un cilindro indotto, e ingannati dalle indicazioni del saggiaiore e del piano di prova, (delle quali cose qui appresso terremo proposito) han creduto di riconoscere senza più, gli effetti di una tensione elettrica.

Ciò non ostante, non mancano de' fisici, i quali, quantunque, al pari di tutti gli altri, avessero limitati i casi di elettricità dissimulata, e fatte non opportune eccezioni tra casi simili, nondimeno in presenza di alcuni fatti, furon condotti a trarre conseguenze che esplicitamente e nettamente affermano il principio che noi prendemmo a sostenere.

Mi limiterò a citare il solo Biot. Questo celebre fisico, nel suo classico trattato elaborato con coscienza e sapere grandissimo, nel riportare un'esperienza in cui si mostra che due palle sospese a fili di seta, sottomesse all'influenza elettrica, e dopo alcun tempo sottrattole, acquistano una elettricità permanente, si esprime così: (V. II. p. 283, 284) « et l'une et l'autre (palle) sont favorisées en cela par » le contact de l'air, qui, sous l'influence du corps électrisé, tend » surtout à leur enlever celle de leurs électricité combinée, qui est » repoussée par ce corps, *tandis qu'il a moins de prise sur celle » dont la force répulsive propre est dissimulée par l'attraction.* » E altrove, parlando dei cangiamenti a cui va soggetto la elettricità di un cilindro isolato ed indotto quando l'estremo lontano dall'inducente si mette in contatto con un terzo corpo isolato, dice (V. II p. 285) » Alors la quantité totale accumulée en K (estremo prossimo) se trouve » nécessairement plus considérable que l'autre, puisque cette dernière » seule a été affaiblie par le contact de C (corpo aggiunto al cilindro). Aussi, lorsque vous soustrayez B (cilindro) à l'influence de A » (induttore positivo) cette électricité V (estremo prossimo del cilindro) *redevvenue libre* ne suffit plus pour neutraliser complètement » K, et l'on trouve le conducteur B chargé d'un excès d'électricité » résineuse.

III

Prima di esporre alcuni fenomeni che concorrono sempre più a riformare la nuova dottrina, toccherò alquanto le obbiezioni fatte ad essa, e che sono a mia notizia.

Il primo fatto, come innanzi dissi, il quale per lungo tempo illuse i fisici, e che fu invocato dal celebre Riess, e dipoi da altri, per impugnare il principio di dissimulazione, è appunto la divergenza dei

pendolini legati all'estremo dell'indotto prossimo all'inducente, o, che torna lo stesso, la divergenza di quelli dell'elettroscopio indotti inferiormente, la quale svela, senza alcun dubbio, una forza laterale diversa dalla diretta dello inducente.

Noi ci occupammo di questo fatto a proposito dei conduttori comunicati col suolo, nei quali, per opera certamente della medesima causa, pur si ravvisa, ma più pronunziato e spiccato; e però mi limiterò ora a rammentare che la causa che io credo che lo produca stia nella posizione dei pendolini rispetto al flusso o atmosfera elettrica nella quale sono immersi, e di cui, la massima parte occupa appunto le parti laterali di essi, mentre la media è impegnata alla induzione sul conduttore; e ricorderò di più come con tal principio si dà ragione dell'attrazione che mostrano i pendolini verso un corpo elettrizzato di elettricità omologa che lateralmente si avvicina, e dell'apparente ripulsione verso un corpo elettrizzato contrariamente; fenomeni che trassero i fisici nell'errore. Ed in fatti, nel primo caso l'attrazione si spiega col venir rinforzata la causa attirante, e nel secondo col venire indebolita dalla contraria elettricità.

Resta ora a dar ragione degli effetti non meno illusorii che produce il saggiaiore o corpo elettrizzato, col quale si induce nella parte superiore dei pendolini; e di ciò pur vittoriosamente da ragione il medesimo principio da noi allegato. Se il saggiaiore è elettrizzato di elettricità contraria all'inducente principale, si sa che le parti inferiori dei pendolini vengon caricati della medesima elettricità contraria libera, e divergono di più; e se invece, il saggiaiore col quale si induce superiormente vien caricato di elettricità simile a quella dell'induttore principale, i pendolini medesimi si caricano della stessa elettricità e scema la divergenza. I fisici hanno spiegata la divergenza che si manifesta nel primo caso, con un accrescimento della elettricità contraria supposta libera nei pendolini, e l'effetto inverso che si appalesa nel secondo caso, colla neutralizzazione di tutta o parte della stessa supposta elettricità. Ma noi riteniamo questi fenomeni come effetti della medesima allegata atmosfera elettrica laterale. Imperocchè, nel primo caso, caricandosi i pendolini di elettricità contraria a quella dell'atmosfera medesima, debbono in conseguenza venir attratti da essa, e però divergere; e nel secondo, caricandosi di elettricità omologa, debbono venir respinti, e quindi avvicinarsi tra loro.

IV

Nella prima parte di questo lavoro facemmo parola di un carattere singolare che presentano i pendolini messi all'estremo dell'indotto prossimo all'inducente, o quelli di un elettroscopio indotto inferiormente: il quale carattere consiste in una maniera di abbassamento, o allontanamento dei medesimi pendolini da un conduttore non isolato che ad essi si avvicina. Questa singolarità, ben diversa, anzi contraria a quella che si osserva nei pendolini remoti dall'inducente, e in quelli dell'elettroscopio indotto superiormente, e tutte le altre considerazioni esposte nella 1^a parte intorno all'assenza di elettricità libera nei conduttori comunicanti col suolo, escludono la possibilità di una carica di elettricità libera nei primi pendolini. Una tal singolarità noi la facemmo dipendere dallo scaricarsi nel suolo, per mezzo del conduttore, una parte di quella elettricità laterale a cui attribuiamo la divergenza. Movemmo eziandio il dubbio se, quell'effetto contrario alla reazione di una elettricità libera, si debba ad una tal cagione o, almeno in parte, allo indebolimento della elettricità dell'inducente per opera di quel conduttore che si approssima ai vicini pendolini; ed esponemmo sufficienti ragioni per non abbandonare totalmente la nostra supposizione.

Aggiungerò ora altri fatti, ed altre considerazioni, non solo perchè questa supposizione acquisti maggior lume, ma ancora perchè si abbia un'analisi più compiuta del fenomeno di cui ci occupiamo.

Per conoscere se quel fuggire dei pendolini prossimi all'inducente da un conduttore non isolato che ad essi si avvicina, si debba allo indebolimento temporario o dissimulazione di una parte della elettricità dell'inducente medesimo, presi ad esplorare ciò che avviene nei pendolini lontani quando quell'avvicinamento si opera su i vicini: la divergenza dalla perpendicolarità scema ad un tempo sì negli uni che negli altri, ma molto meno nei primi che nei secondi; e riesce curioso il vedere come reiterando l'avvicinamento e l'allontanamento successivo, si hanno corrispondenti oscillazioni nelle due coppie di pendolini, o per dir meglio, corrispondenti avvicinamenti ed allontanamenti di essi.

Se dunque un tal fenomeno procedesse unicamente da quella causa, cioè dall'indebolimento diretto della carica dell'inducente; e se tutti i quattro pendolini fossero carichi di elettricità libera, in vece di veder quel fenomeno più pronunziato nei prossimi che nei remoti, dovrebbe avvenire precisamente il contrario; imperocchè nei primi, l'effetto di quell'indebolimento dovrebbe esser compensato dalla reazione della supposta elettricità libera in presenza di un conduttore non isolato.

Tutto ciò dimostra ad evidenza, doversi quell'abbassamento dei pendolini prossimi (quando ad essi si avvicina un conduttore non isolato) in parte allo indebolimento diretto e temporario che subisce l'inducente, ma più di tutto a quello che si ha dallo scaricarsi nel suolo la elettricità laterale ai pendolini medesimi.

Vien ciò rifermato da altra considerazione. Se l'abbassamento dei pendolini prossimi all'inducente, in virtù di un corpo non isolato e conseguentemente privo di elettricità libera, che ad essi si avvicina, dipendesse unicamente da influenza diretta di questo corpo su la elettricità dell'inducente, dovrebbe necessariamente aver luogo uno scemamento simultaneo ed eguale nei due pendolini quando lateralmente ad un solo di essi, si avvicina la punta di un conduttore non isolato. Ma ciò non avviene: quest'ultimo pendolino in fatti perde totalmente la sua divergenza, allontanandosi molto dal conduttore, mentre l'altro si abbassa di poco.

Non sarà, forse, inopportuno di esporre qui un'altro semplicissimo esperimento che, per avventura, porge ad un tempo un argomento dello stato diverso delle due elettricità nei conduttori isolati ed indotti, e una pruova di tutto ciò che innanzi dissi intorno alle cagioni della divergenza dei pendolini situati all'estremo dell'indotto prossimo all'inducente, o di quelli dell'elettroscopio inferiormente indotti.

Sul dischetto di un elettroscopio a foglie d'oro, ho poggiato l'estremità di un cilindro di ottone, il quale è situato alla estremità di una bacchetta di vetro in maniera che si possa muovere a cerniera in un piano verticale, e distaccare o ricongiungere, a piacere, coll'elettroscopio.

Il cilindro e l'elettroscopio, quando sono in contatto, formando un solo conduttore isolato, se, per mezzo di un corpo elettrizzato si in-

duca su l'estremo del cilindro lontano dall'elettroscopio, le foglioline di questo strumento, come è noto, divergeranno. Se, restando le cose in questo stato, si distacchi il cilindro dall'elettroscopio, premendolo dal lato opposto per mezzo di una bacchetta di ceralacca e si allontanano l'inducente, si vedrà che le foglioline rimangono divergenti come prima.

Ripetasi di nuovo la medesima esperienza, ma questa volta si procuri che la induzione si eserciti dal lato dell'elettroscopio o delle foglioline. Queste subito divergeranno; ma distaccando, come prima, il cilindro dall'elettroscopio, e dipoi allontanando l'inducente, si vedranno le foglioline medesime, prima abbassarsi e poi aprirsi, e però mettere in evidenza non solo una cagione diversa delle due divergenze successive, ma ancora che la prima abbia origine dalla atmosfera elettrica, e la seconda dalla elettricità indotta che divien libera coll'allontanamento dell'inducente.

V.

Le illusioni che cagiona il piano di prova usato alla maniera di Coulomb vennero attribuite, come dissi, dal Melloni alle doppie fasi a cui quel piano si assoggetta quando si applica al conduttore indotto, e quando vi si distacca per esporlo all'elettroscopio. Alcuni fisici intanto hanno impugnato questa semplice e bella spiegazione, o almeno, non ne hanno tenuto alcun conto. Nondimeno questa spiegazione è conseguenza di fatti irrepugnabili e però da gran tempo ammessi dai Fisici.

Quando un conduttore comunicante col suolo si tiene presso ad una sorgente elettrica, si isola, e poscia si allontani da questa, si trova esso carico di una elettricità libera contraria, la quale da prima era dissimulata. Perchè dunque non supporre che avvenga la medesima cosa nei due conduttori congiunti e divisibili di Wilke, e nel piano di prova carico di elettricità dissimulata quando formava parte del conduttore indotto prossimo all'inducente? Le esperienze dimostrano che la mole o la grandezza del conduttore che si applica a questo estremo, non cambia la natura della elettricità; ma solo la intensità della carica.

Le obbiezioni non è guari messe innanzi dal Chiarissimo Professore Belli, se non vado errato, anzi che svelare l'ordinaria sagacia ed esattezza che caratterizzano tutte le produzioni del suo ingegno, mostrano, in vece, una troppa adesione all'antica dottrina. Nondimeno le esperienze ch'egli mette innanzi in opposizione alla nuova, possono vittoriosamente da questa venir spiegate. Io aveva in animo di intrattenermi alquanto intorno alle obbiezioni dell'Illustre Fisico di Pavia, ma avendo ciò fatto con fino giudizio, anzi maestrevolmente il Dott. Fabri in una recente pubblicazione, ben volentieri me ne passo.

VI.

Altrove dissi, che, quando il Melloni, prima di pubblicare la nuova rettifica al concetto su la induzione elettrostatica, me ne fece parola, io l'ebbi come una verità, perchè armonica con tutti i fatti dai fisici ammessi, e perchè tali da emergere dai fatti medesimi. Se non che le esperienze colle quali egli intese di provare il suo assunto, non appagavano il mio spirito. Fu questa la ragione per cui, in altra mia pubblicazione sul medesimo argomento, non parlai punto degli esperimenti dell'Illustre nostro Collega, e tenni altro cammino per raggiungere lo scopo. Ma poichè alcuni fisici che hanno appurato di inesattezza il principio di Melloni hanno altresì impugnate le esperienze ch'egli fece per via dei ripari metallici, e per quanto mi è noto, non ne hanno addotte le vere ragioni, non sarà forse inutile lo esaminare e ridurre al vero valore l'uso dei ripari e le conseguenze che possono trarsene.

I ripari o schermi di materia conduttrice dell'elettrico e comunicanti col suolo, al dir di De la Rive, furono impiegati per la prima volta dal Faraday per riparare dalle influenze elettriche i corpi o istrumenti che ne potevano essere affetti. E veramente, un elettroscopio, quando è convenevolmente riparato da una lamina o anche da una rete di materia conduttrice (di cui soleva far uso il Faraday) non manifesta segni di elettricità, se la parte opposta della lamina riceve la induzione di un corpo elettrizzato; e ciò avviene appunto dal che, scaricandosi nel suolo la elettricità omologa all'inducente, rimane nella lamina l'elettricità contraria, ma rimane presa e renduta dissimulata

ed inattiva rispetto ai circostanti corpi dalla elettricità dell'inducente.

Il Melloni, come è noto, per esplorare la elettricità di un cilindro indotto, usava riparare dall'influenza dell'inducente i pendolini annessi al cilindro, e l'elettroscopio, per via di lamine metalliche comunicanti col suolo. Or, se si ponga ben mente a ciò che innanzi dicemmo intorno alla influenza che hanno i conduttori comunicanti col suolo su i conduttori isolati sottoposti al flusso elettrico, la quale consiste in esaltare la elettricità omologa delle parti dei medesimi conduttori alle quali si approssimano i primi, è facile scorgere, che l'avvicinamento dei ripari ai pendolini, o a qualunque parte dell'indotto, ne cambia l'equilibrio elettrico, richiamando, per così dire, ed esaltando in quella parte il principio omologo all'inducente; e però la distribuzione della elettricità sulle parti che si vogliono esplorare, diviene certamente diversa da quella che importa conoscere. Né, situando i ripari prima di sottoporre il conduttore isolato all'influenza elettrica, vien rimosso quest'inconveniente; imperocchè la distribuzione elettrica e l'equilibrio torna come il caso precedente, e sempre diverso da quello che vuolsi esaminare.

Il Melloni adunque, esaminando una parte qualunque del conduttore isolato, o le sue appendici, tenendovi in prossimità un conduttore non isolato, richiamava in quelle parti la elettricità come quella dell'inducente, e però non conseguiva intieramente il suo scopo, o, almeno, non otteneva una pruova diretta di ciò che egli intendeva dimostrare. Ma se ci facciamo a considerare semplicemente la natura della perturbazione che subisce la elettricità del conduttore indotto coll'avvicinamento di un corpo comunicante col suolo, in qualunque parte di esso, e quella esaltata manifestazione della sola elettricità omologa, non possiamo non ammettere che questa sola elettricità, è quella che trovasi libera nei conduttori isolati sottoposti all'induzione. Le esperienze adunque del Melloni, se non danno una pruova diretta a cui erano destinate, ne porgono una indiretta; ma essa non è diversa da quella che si ha dal semplice fatto della surriferita esaltazione di elettricità omologa, e non dimostra più di questo fatto medesimo, e di quelli che innanzi esponemmo.

VII.

In un mio precedente lavoro , come innanzi ho detto, feci parola di alcune prove, tratte da antiche e nuove esperienze, per appoggiare il principio della dissimulazione ; ma il Volpicelli in varie sue pubblicazioni e segnatamente nell'ultima , ha accumulate tante svariate prove sì razionali che sperimentali, da lasciar poco a spigolare in questo campo.

Tuttavia poichè importa che venga messo in sodo il vero principio fondamentale della induzione elettrostatica, e che in una maniera più diretta si conosca la distribuzione e lo stato delle due elettricità nei conduttori isolati ed indotti, io ho creduto opportuno ritornare su le esperienze del Coulomb fatte col piano di prova metallico non è guari rievocate in dubbio , e ripetere le mie eseguite con piano di prova di materia coibente.

Queste esperienze , benchè sembrino semplicissime , han mestieri nondimeno molta accuratezza e pazienza ; e , quel che è più , opportune circostanze atmosferiche nel praticarle : l'umidità dell'aria , il troppo avvicinamento dello sperimentatore o di altri corpi al conduttore da esaminarsi, una troppa vicinanza dell'inducente all'indotto, ed altre cagioni indeterminate , e che sarebbe bene a determinare , possono spesso condurre a risultati illusorii , e non debbo tacere che molte volte ho colto risultamenti del tutto contrarii ai principii bene assodati e alle esperienze di Celebri osservatori ; e non mancano dei casi in cui ho trovato più elettricità omologa a quella dell'inducente nel capo del cilindro prossimo all'inducente medesimo che nel remoto ; il che , certamente doveva provenire da trasporto di elettricità. Non mi arreca quindi maraviglia se un fisico di gran merito abbia , non è guari rievocato in dubbio le esperienze ed i risultati del Coulomb. Intanto , quando questi casi , queste anomalie avvengono, possono bene venir spiegate col trasporto della elettricità della sorgente, o con altre condizioni che producono il medesimo effetto, ma non mi sembra che siavi ragione da sospettare alterazioni irregolari , quando il piano di prova metallico ne porge manifestazioni di elettricità indotta nel capo prossimo all'inducente. E però io son di credere che

questi ultimi risultati si abbiano a ritenere esatti , e quali la vera natura della induzione li porge.

Ho esposto all'induzione elettrica un cilindro di legno bene indorato , lungo centimetri 39 , terminato da due mezze sfere di un diametro eguale a quello del cilindro , cioè di centimetri 5 1/2. La sorgente elettrica era un cilindro di ceralacca , alla maniera del Volpicelli , ad un di presso del medesimo diametro dell'altro cilindro.

I cilindri furono situati in modo che gli assi fossero su la medesima retta , e i capi prossimi distanti circa 6 centimetri.

In opportune circostanze , impiegando dei piani di prova , e propriamente diversi dischi sottilissimi di carta indorata di varii diametri, da un mezzo centimetro fino a 2 , e tutti convenevolmente situati all'estremità di lunghe bacchettine di vetro e di ceralacca, ho ottenuto segni evidenti di elettricità contraria a quella della sorgente, dall'estremo capo dell'indotto prossimo all' inducente fino alla distanza di circa centimetri 3.

Altra volta , in vece di adoperare piani di prova metallici , volli usare quelli di materia coibente, e ciò, non solo per evitare, in qualche maniera , le appendici e le leggiere perturbazioni nell'equilibrio elettrico che sull' indotto può cagionare un piccolo conduttore , ma ancora scemare le illusioni che provengono dalle doppie fasi che subisce il piano di prova metallico , quando trovasi sul conduttore e quando se ne allontana, e più di tutto perchè i coibenti, i quali non patiscono le medesime influenze dei conduttori, e non scemano anzi accrescono l' induzione , prendono e ritengono la elettricità libera nei punti di contatto.

Ottenni allora , in qualunque punto del cilindro , senza eccezione , segni di elettricità omologa all'inducente.

Ho ripetuto ora le medesime esperienze, facendo uso di un piccolo disco di gomma lacca del diametro di 3/4 di centimetro e di spessore meno di 1/2 millimetro, ed ho conseguito, col medesimo apparato innanzi descritto, i seguenti risultamenti: 1°, niuna elettricità dall'estremo del cilindro prossimo allo inducente , fino a circa due centimetri, e qualche volta , segni piccolissimi appena riconoscibili di elettricità omologa all'inducente : 2°, in tutto il resto del cilindro solo elettricità omologa, ma debole.

UN GENERE DI MOLLUSCHI

DELLA FAMIGLIA DELLE NERITIDE

DESCRITTO

da GUGLIELMO GUISCARDI

Fra i numerosi fossili del Gargano, la più parte di Molluschi appartenenti ai generi Hippurites, Radiolites, Caprina, Nerinaca etc. etc. ve ne ha uno, donatomi dal Prof. Scacchi, il quale, per quanto avessi ricercato nelle più recenti Opere di Conchiologia, non ho trovato descritto. Io non dubito che sia della famiglia delle Neritide, e per nominare il nuovo genere, dal luogo ove fu rinvenuto lo dirò *Gargania*.

La conchiglia della *Gargania* è simmetrica, conica, con l'apice poco incurvo ed ottuso sporgente alquanto dal margine posteriore. La base è ovale, e, dal suo minor diametro si può intenderla divisa in due metà quasi uguali—l'una, alla quale sopresta l'apice, è chiusa da una lamina piana posta sul margine—l'altra metà è l'apertura.

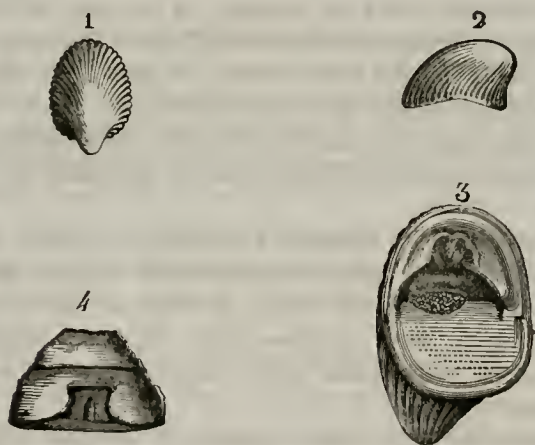
A partire dal detto minor diametro il margine anteriore gradatamente si estende seguendo la superficie conica, onde le due metà della base fanno angolo rientrante fra loro. Consegue da ciò che la conchiglia poggiata per la base sopra un piano lo tocca solo nel mezzo dei margini anteriore e posteriore.

L'apertura o bocca è angusta, e come in tutta la famiglia, può ben dirsi semilunare; se non che il labbro esterno che è incassato, soprattutto nella parte mediana, ha nel mezzo un seno ro-

tondato largo poco meno che la terza parte dell' intiera curva ed è diviso in due da una plica longitudinale poco rilevata. L' insieme delle tre curve somiglia a quel contorno assai noto e comunissimo fra gli ornati della gotica architettura; del resto la figura mostrerà assai chiaramente questo che parmi lungo e difficile a dirsi.

Il labbro interno che è l'estremo della lamina anzidetta, è infranto nel mezzo nel solo individuo che ho, e presso ai margini laterali lascia due angusti seni o rime, una per ciascun lato, le quali cominciano a mostrarsi su la lamina per due solchetti poco profondi.

Ove fosse dritto e dentellato questo labbro interno come nel genere *Pileolus* Sby. ed in altri della famiglia, le due rime potrebbero anche essere lo spazio fra due denti; ma io ho ragioni per non crederlo e le ritengo come rime.



L' esterno della conchiglia è ornato da coste che partono dall' apice, rotondate, alquanto nodose e quasi uguali ai solchi che le separano.

La calcarea che ne ha riempito l'interno mi ha tolto di riconoscere l'impressione muscolare; nè ho l' opercolo.

Stabilisco pertanto così i caratteri del genere *Gargania*.

Testa conica, vertice posterius inflexo, submarginali. Basi ovata, postice lamina plana, marginali, clausa; margine antico ita producto ut angulum eum postico efficiat intrantem. Apertura angusta; labro incrassato praesertim medio, ibique sinu rotundato excavato; labio. . . . hinc inde a margine rimula disjuncto. Impressio muscularis? Operculum?

Gargania Brocchii

G. testa crassa, convexoconica, costis longitudinalibus rotundatis, apice obtuso, laevi (crosi?); labro sulco marginali sculpto; sinu plica longitudinali, lineari bipartito.

Testa 12, 5^{mill.} lata, 14, 9 longa, 10, 6 alta. Angulus intrans fere 150°; costae circiter 42, subnodulosae interstitia subaequant. Ad M. Garganium Appuliae unicum specimen.

È agevole osservare come questo genere abbia stretti rapporti col genere *Pilcolus* Shy. fossile della Oolite di Bath (Woodward), dei piani Bathoniano, Corallino, Cenomaniano e Parigino (d'Orbigny), col quale ha comuni alcuni caratteri, altri gli sono affatto proprii.

Hanno comune l'aspetto patelliforme, la mancanza di spira, la lamina che ne chiude in parte la base, l'apertura piccola. Nel genere *Pilcolus* poi, l'apice è subcentrale, il margine della conchiglia si espande producendo un largo continuo peristoma onde la lamina o disco rimanendo nell'interno del cono la base risulta concava: mentre nel genere *Gargania*, l'apice è eccentrico tanto da uscir dal margine posteriore; il margine non si espande, si prolunga soltanto ed in parte, il che dà origine all'angolo rientrante che fanno la parte boccale e la posteriore della base; la lamina è del tutto marginale. La forma della bocca in fine è assai caratteristica di questo genere.

Le figure non abbisognano di altra dichiarazione se non che la 1^a e la 2^a sono di grandezza naturale e la 4^a è un frammento dimostrante la struttura del labbro esterno.

Napoli 24 novembre 1856.

SOPRA UN MINERALE DEL MONTE SOMMA

MEMORIA

DI

GUGLIELMO GUISCARDI

I Minerali Vesuviani allo studio dei quali intesero Breislak, Brooke, de Bournon, Covelli, Monticelli, Scacchi ed altri ancora, non potrebbe asserirsi che fossero già tutti noti. La condizione della loro giacitura, per la più parte nei massi rigettati nelle eruzioni antistoriche, è chiaro argomento del potersene incontrare ancora dei nuovi; ma senza questo, solo l'accurato ricercare fra quelli già conosciuti è talora hastedevole a chi è abituato a studiarli per farne trovare di non ancora descritti.

Lo Sfenò (*Séméline Fl. de Bellevue*) da gran tempo annoverato fra i minerali del Vesuvio, trovasi abitualmente nei massi testè menzionati, bianchi, granitoidi, composti principalmente di Feldispato vitreo e di Nefelina. Sempre cristallizzato, il suo costante colore è il giallo di miele, ed i suoi cristalli si riconoscono piuttosto agevolmente a due estremi opposti acuti come punta di lancia.

Con lo Sfenò erasi confusa un'altra specie, sol per essere anche essa di color giallo, e pel trovarsi nella stessa matrice. È questa che io chiamo *Guarinite*, e, in questa Accademia non è mestieri ricordare donde le derivi il nome (1).

(1) Dal Prof. G. Guarini di onorevole ricordanza.

Eminentemente cristallina, la Guarinite è dimetrica, e gli angoli fra le diverse facce dei suoi cristalli sono i seguenti (1):

Osservati	Calcolati
$M : M = 90^\circ$	90°
$M : e = 45^\circ 7'$	45°
$M : e' = 26^\circ 42'$	$26^\circ 33' 55''$
$M : e'' = 63^\circ 30' \text{ (di sopra } e)$	$63^\circ 26' 5''$
$M : e''' =$	$18^\circ 26' 55''$
$M : e'''' = 71^\circ 24' \text{ (di sopra } e)$	$71^\circ 33' 5''$
$e : e =$	90°
$e' : e' =$	$36^\circ 50' 10''$
$e'' : e'' =$	$53^\circ 6' 10''$
$P : M =$	90°
$M : o = 69^\circ 38'$	$69^\circ 38'$
$M : o' = 53^\circ 33'$	$53^\circ 24' 36''$
$o : o =$ (opposta)	$40^\circ 44'$
$o' : o' =$ (opposta)	$73^\circ 10' 48''$
$o : o' =$	$16^\circ 13' 24''$

$$a : a : b :: 1 : 1 : 0, 3712.$$

$$M, \quad a \propto a \propto b$$

$$e, \quad a \quad a \propto b$$

$$e', \quad a \quad 2 a \propto b$$

$$e'', \quad a \quad 3 a \propto b$$

$$P, \quad \infty a \propto a \quad b$$

$$o, \quad a \propto a \quad b$$

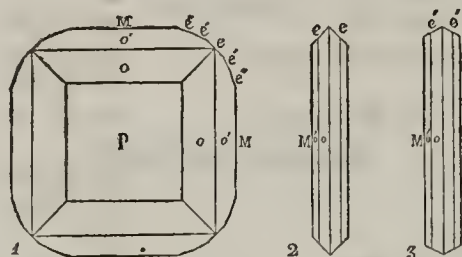
$$o', \quad a \propto a \quad 2 b$$

Ha clivaggio non troppo facile nè molto nitido parallelamente alle facce M , le quali talvolta sono striate nella direzione dell'asse b , ed alquanto incurve. Spesso per queste stesse facce più cristalli si aggruppano.

Il colore della Guarinite è giallo di solfo, spesso più chiaro, di rado meno. Ha splendore subadamantino, adamantino nelle superficie di clivaggio. È traslucida o trasparente; la segnatura è matta, e la polvere di color bianco sudicio. La frattura è irregolare. In durezza uguaglia l'Adularia, e la densità, presa su cristalli, è 3,487.

(1) Gli angoli riportati sono quelli che le normali alle facce comprendono.

I suoi cristalli presentano due notevoli varietà. Alcuni somigliano a sottili tavolette per avere estesissime due facce M opposte, e pel mancare affatto le altre due; delle altre facce laterali poi esistono solo le e in alcuni, in altri solo le e' . In questi cristalli tabulari sol-



tanto ho trovato le o ed o' , ed in una zona sola, forse per esser minime le altre, attesa la forma compressa di essi, o perchè *emiedriche*; in queste condizioni le loro proiezioni orizzontali sono quali le rappresentano le figure 2 e 3, per modo che chi non avesse altri cristalli li reputerebbe trimetrici; e per tali io li ritenni innanzi che conoscessi l'altra varietà di forma. In questa, che è tipica, le facce M sono quasi ugualmente sviluppate fig. 1, e la faccia P , che manca nell'altra varietà, guardata in una certa direzione è destituita di splendore, in altra ha splendore sericeo, per essere sottilmente striata, come d'ordinario si osserva nella Thomsonite, e con l'aiuto della lente vi si veggono dei punti splendenti. Talvolta ancora, in luogo della faccia P ve ne esistono due, matte anche esse, le quali sembra che sieno ugualmente inclinate su le M e che comprendano tale angolo da doversi riferire alle o . Questo mi conferma nella idea di emiedria accennata parlando dei cristalli tabulari. Finalmente in qualche cristallo ho notato delle facce piccolissime manifestamente inclinate a tutti e tre gli assi, ma non mi è stato possibile di misurarne le inclinazioni.

Fra i cristalli che posseggo, quelli più adatti ad esser misurati non eccedono un millimetro nella massima dimensione. Uno che ha tutte le facce della zona dell'asse b non ha più che 0,7^{mill}; ed il solo tabulare avente le facce o ed o' misurabili, ha le seguenti di-

mensioni 3,5—1,6—0,6 millimetri. Fra i cristalli tabulari ve ne ha di più grandetti ancora, ma come d'ordinario, imperfetti.

Esanrita così la parte morfologica della Guarinite passo ai suoi caratteri chimici.

Nelle pinzette esposta al dardo della fiamma del cannello (lampada a spirito) si fonde senza troppo mutar ~~li~~ colore. I piccoli frammenti nuotano nella perla fusa di sal di fosforo o di borace senza alterarsi. Nell'acido cloroidrico concentrato si scioglie in parte e la soluzione è colorata in giallo.

Le sostanze che in essa si appalesano, la parte insolubile essendo silice, sono l'acido titanico, la calce e gli ossidi manganico e ferrico.

Raccolto quanto potei del minerale, non più che grammi 0,288, lo polverizzai sottilmente nè lo sottoposi alla levigazione per non scemarne la ben scarsa quantità. Tenni la polvere in digestione per un sei ore nel clorido idrico concentrato, riscaldando a bagno-maria senza oltrepassare i 50° C. Dopo di che la sostanza si decompose totalmente lasciando la silice in forma di fiocchi. Allungata la soluzione e raccolta la silice, dal liquore feltrato precipitai con l'ammoniaca l'acido titanico. Questo fu alquanto colorato in bruno, ed era ben naturale, precipitandosi con esso ancora gli ossidi manganico e ferrico. Io non curai di separar questi, e per i lunghi ed intricati metodi di separazione, e soprattutto per essere il primo in tale quantità da dare alla fiamma del cannello la sua reazione caratteristica col carbonato sodico, solo con l'aggiunta del nitro; e l'altro in quantità non maggiore, sebbene variabile. Nè è facile riconoscere l'ossido ferrico per essere la sua reazione col ferro-cianuro di potassio mascherata da quella dello stesso reagente con l'acido titanico. Dopo aver raccolto questo feltrandolo, dal liquore precipitai la calce in forma di ossalato.

Le quantità risultate dall'analisi sono

SiO_2	TiO_2	CaO	$\text{Fe}^2\text{O}^3\text{Mn}^2\text{O}^3$
33,638	33,923	28,011	tracce = 95,572
$= 2\text{SiO}_2, 2\text{TiO}_2, \text{CaO}.$			

E lasciando le vane speculazioni di combinare in una maniera più o meno probabile questi risultamenti — di indagare qual parte prenda

la calce nella composizione del minerale — se esistano silico-titanati o no; farò solo notare che essi non diversificano troppo da quelli che danno le analisi dello Sfeno, soprattutto del Piemonte, per Mari-gnac, (1) (Greenovite *Duf.*).

Dello Sfeno Vesuviano non si hanno analisi, nè io ho voluto farne non avendone ancora tanto raccolto da avere risullamenti non equivoci; ma ritenendo per esso la composizione che generalmente danno le analisi, io non dubito di conchiudere che la combinazione della calce e degli acidi silicico e titanico, negli indicati rapporti, dia un altro esempio di dimorfismo — *Sfeno* monoclinicoedrico, *Guarinite* dimetrica. Questo sembrami trovar sostegno nelle due modificazioni isomere dell'acido titanico e nel trimorfismo di che esso offre un notevole esempio.

Noterò intanto che la perdita dell'analisi debba attribuirsi parte alla silice che in piccola quantità si discioglie nell'acido cloridrico concentrato, e più ancora all'acido titanico alquanto solubile nell'ammoniaca, di che mi avvenne aggiungere un leggiero eccesso.

Oltre la roccia nella quale ho già detto trovarsi la Guarinite, la s' incontra ancora in una trachite d'un bigio-violetto carica di cristalli di Feldispato vitreo e con Anfibolo e Melanite, nelle picciole cavità della quale trovasi insieme a cristalli di Feldispato vitreo e di Nefelina su cui i suoi cristalli stanno sovente impiantati, e di rado vi si aggiungono cristalli di Fluorina e di Circone. In questa trachite non la ho mai rinvenuta accompagnata dallo Sfeno; ed un solo esempio conosco del trovarsi in quel comunissimo impasto di Pirossene e Mica nel quale incontrasi anche lo Sfeno, e con la solita compagnia del Feldispato e della Nefelina.

E quì mi piace riportare poche parole del fondatore della cristallografia. . . . « et c'est une nouvelle occasion de remarquer combien il est intéressant de porter la plus grande précision possible dans la détermination des formes cristallines. La nature a placé certaines productions sur des lignes très-peu divergentes, tandis que les directions qui aboutissent à d'autres font des écarts très-sensibles. ». Haüy. *Traité de minéralogie*. 1^{re} edit. tom. 3. pag. 190.

(1) Ann. de Ch. et de Phys. (3) XIV. 47.

MEMORIE
PER LE
SCIENZE MORALI

PRESENTATE
DA' SOCI ALL'ACCADEMIA NELL'ANNO 1857.

E DA ESSA APPROVATE.

CRITICA FILOSOFICA DEL LUSSO

MEMORIA

DEL SOCIO ORDINARIO

GIORGIO MASDEA

A quale delle tre scienze filosofiche, l'Etica la Politica e l'Economia, ogni scrutinio legittimo, ogni perentoria decisione tocca, intorno al Lusso? — In più schietti e brevi termini io credo non poter esprimere l'assunto di questa Memoria, onde l'importanza propria sta in ciò, che laddove tutt' e tre, l'Etica la Politica e l'Economia, abbiano uguale competenza ideologica sul Lusso; quindi dovranno riconoscer falsi i dommi di una, ovvero due fra esse, rispetto a quei dell'altra, cui contradicono: e per l'opposto, che laddove i medesimi si ritengano del pari infallibili ed irrecusabili, uopo sarà quindi, com'erroree spurie torte, disapprovar le induzioni, sul conto del Lusso, tratte da' cultori esclusivi delle due prime, o invece da que' dell'ultima di cotali scienze. Mi è dunque parso, che in tanta perplessità ed incertezza, ogni poco e impronto fosse a me concesso di avvertire circa l'assunto, non saprebbe demeritare l'attenzione di coloro, cui premono l'andamento insieme, e l'emendamento continuo del Sapere umano: nè per altro motivo ho intitolato l'esame, cui mi accingo, una *Critica filosofica*.

2. Il Lusso, col cortèo delle sue scelleratezze e turpitudini, che in Roma succedè alla parsimonia antica, durante la lunga ed ignobile pace, cui riuscite erano le sue fiere e pericolose guerre, fu da

Giovenale asserito un flagello grave abbastanza, da vendicare il mondo conquiso della dominazione di essa.

*Nunc patimur longae pacis mala: saevior armis
Luxuria incubuit, victumque ulciscitur Orbem.
Nullum crimen abest, facinusque libidinis, ex quo
Paupertas Romana perit ... (1).*

Del resto e prima e dopo le invettive dell'insigne Poeta, gli Elici e i Politici abborrono parimente il Lusso, come un *male*, alla privata vergognoso, alla vita pubblica ruinoso eziandio; un male però evitabile o coercibile, sia mediante la tutela di forti Costumi, sia col freno di opportune Leggi (2).

3. Sol da non guari una Dottrina quasi nuova, la detta Economia, ha impreso a redimere il Lusso da ogn'impulazione, e fino a vantarlo come un *bene*, gradevole nella privata, ottativo benanche nella vita pubblica (3). Giacchè (discutono i seguaci di essa) un simile Bisogno manoduce all'immegliamento di ogni civile uso; non solo ampliando il giro di tutte le specie di Ricchezza, ma promovendone l'indefinito sviluppo. Dietro qual motivo anzi (se pur la Ricchezza certo segno si accondiscende dalla prosperità dello Stato, o piuttosto sua condizione fondamentale) il Lusso, al contrario, vuolsi proteggere non avvilirlo, eccitare non comprimerlo: insegnamento subalterno al canone supremo in tale Dottrina, che fa egli mestiere di accrescere o fomentare la Consumazione, acciò la Produzione vie più si estenda e s'invigorisca (4)... Or avvi, soggiungono, chi ignori i

(1) *Satyr. VI. 292.*

(2) Il cel. Muratori (*Della Pub. Felicità, oggetto de' buoni Principi, ec.*) e l'Ab. Roberti (*Intorno al Lusso, ec.*) sono forse i due ultimi scrittori, che in Italia disputato ne hanno; quello, morto nel 1750, sotto una mira *politica*, e questo, morto nel 1780, sotto un' *etica*.

(3) Egli è vero, che pochi (Ganilh, per es. *Dictionnaire d' Economie politique, ec.*) non l'acconsentirono, come *bene*, se non in *particolare*.... Esiste dunque Lusso in *generale*, a rigor d'idee? Ma è giusto di confessare, che siffatta ipotetica separazione delle due specie di Lusso, tragga origine da Helvetius (*De l'homme*, Sect. VI, Chap. 5). E qui taccio dell'altre separazioni sue in *attivo*, e *passivo*, a mente del nostro Filangieri (*Scienza della Legislazione*) e in *colpevole* ed *innocente*, a senno di Hume (*of refinement in the Arts*) ec.

(4) Ad. Smith, *Inquiry into the nature, and causes of the Wealths of nations, ec.*

rapporti diretti e immediati dell'una, onde gl'indiretti e mediati dell'altra, co' vantaggi della vita comune? Che se poi amisi di riferire al Lusso l'accidentale *malessere* di una piccola parte d'individui o di famiglie nello Stato, niente (ei proseguono) questa opinione scemeranne il merito, a confronto del assiduo *benessere* della costoro maggior parte, in cui Nazione Civiltà Ricchezza, e comprendosi e descrivonsi e fioriscono insieme (1) — Per siffatto giudizio assoluto ognun vede, che la Dottrina degli Economisti di oggigiorno (maestri, e discepoli) non solo di lungo intervallo si scosta dall'assennatezza degli Etici e Politici di tutt'i paesi e di tutt'i secoli; ma vie più, che le si contrapponga, che la combatta, e la rovesci. Ed essendo tornata essa a gusto intero, ed estremo favore della società moderna, quindi non dobbiamo sorprenderci, se le ammonizioni morali, e i dettati legislativi di altra volta, riguardo al Lusso, omai sien caduti in dimenticanza, e fino in dileggio (2) quali, o misure di una prudenza tutt'or limitata ne' suoi propositi, od immagini di un sapere spess' obbliquo nelle sue viste.

4. Non pertanto, da che tornò applaudita e diffusa la dottrina, cui mentovamo, pretenderebbesi inconcutibil' ed inappellabile? Uno scrittore prolisso d'ordinario e involuto nello sue considerazioni, questa profonda nondimeno e succosa inculcava; cioè, che seriissimi e diuturni abusi ognora scaturiscono, sia quanto alle regole, sia quanto a' disimpegni di nostra vita, da un'incomplet' analisi de' fatti, sovra i quali sorreggonsi gli altrui concetti più famigerati (3)..... Mi è però venuto in animo, che fra la discrepanza enorme, fra la renitenza scambievole, nella quale ci si parano le idee degli Economisti, a riscontro di quelle de' Politici ed Etici, su la quistione del Lusso, ci riuscirebbe a non lieve profitto, quando io tentassi di ricondurl' entrambe sotto un esame scrupoloso e maturo: avvegnacchè non mai puote o deve stimarsi prescritta la causa della Verità, quantunque non di rado, e la sospenda il voto improvvido di esimj dotti, e più spesso la precluda il consenso temerario di un volgo spregevole.

5. Or meglio, e prima di tutto gioverammi a tal uopo di svol-

(1) Errore (*private vices, public benefits*) sparso dalla vecchia Favola delle Api, ec. di B. Mandeville, non ancora nauseato da' dotti plateali.

(2) Voltaire, *Dict. phil. Art. Luxe.*

(3) Ch. Comte, *Traité de legislation*, ec. Liv. II.

gere nella più acconcia, e di chiarire nella più netta guisa la *nozione* medesima di Lusso, intorno a cui verserà ogni nostra disamina: così perchè noi vagamente e superficialmente non ne contendesimo, come perchè simile *nozione* (o troppo io m'illudo!) unqua non è stata abbastanza espressa da' sommi autori d'Economia (1) e con molta minor sufficienza ripetuta da' loro adetti. Pochi, e semplici postulati ne soccorreranno ad esporla nell'esattezza, e genuinità sua non solo, ma benanche a tradurla da quindi in poi sotto varj aspetti, nè più ambigui o promiscui.

6. I *Bisogni* umani vogliono scorgersi per diversi *Modi* a un tempo, e per *Gradi*. Riguardo a' *Modi*, ei si sceverano (economicamente capi) in *a*) *Vitto*, *b*) *Ricovero*, e *c*) *Vestito*, come sa ognuno: e riguardo a' *Gradi*, a tutti è noto parimente, che dessi riflettono *a*) alla *Necessità*, *b*) *Comodità* del sussistere e consistere nostro, e inoltre *c*) al *Lusso* — Ch'è Lusso dunque?... Tuttociò, che in provveder noi al Vitto al Ricovero ed al Vestito, onde senza tregua abbisognamo, trasgredisce i limiti della *Necessità* e della *Comodità* ben intese: ovvero, in più franchi e precisi termini, Lusso è il *Bisogno* dell'*Ostentazione*, della *Ricercatezza*, della *Superfluità*; *Bisogno*, cui nativo niun disferma in noi, e 'l più sovente coetaneo a que' della *Necessità* più legittima, e della *Comodità* più discreta... *Bisogno* fuori dubbio, ma non attendibile, nè graziabile del pari, laddove al Lusso gli uomini soddisfaccino con onta e discapito della *Comodità*, e della loro *Necessità* medesima.

7. Così n'è dato riconoscere, senza tema di paradosso alcuno, che il Lusso determini quasi, e stabilisca, mediante la sua forma ovvia ed esplicita, quell'indole astrusa ed implicita di *Vanità* e di *Ambizione* (2) nella quale si appalesa il nostro maggior numero (pochi eccetto) quandunqu'è ovunque gli esempj tiranneggino, e servano i costumi: quell'indole, io dico, di piccola *Vanità*, e di *Ambizione* stolidi, per cui da ultimo interessi ed abitudini, rapporti e guarentie di vivere, tutto cede allo spettacolo, nulla più rimane al consiglio. Eppure, diciannove secoli addietro, Tacito (3) esponendo i corrotti e

(1) Vedi Genovesi (*Lezioni di Commercio* ec. Parte 1, Cap. 4) il quale ciò notava, omai da un secolo.

(2) Vedi Tracy. *Commentaire sur Montesquieu*, ec. Cap. 7.

(3) *Ann. XV, 18.*

stemprati usi di Roma , colla sua vibratezza solita insegnava.... *dum aspectui consulitur , conscientia spreitur*... Se non che le lezioni dei grand' ingegni discuoprono, non correggono la fatalità delle sorti, entro le quali ogni uomo , ogni città, ogni popolo, ansia raminga soccombe!

8. Ed omai pianamente deciferata, e precisamente definita la *nozione* di Lusso , una *prima Verità* emerge agli occhi altrui , cardinalissima nella quistione , cui agiamo ; vale a dire, che la Consumazione *lussuosa* contribuir non possa, nè debba, in qualunque maniera e per qualunque patto , se non alla *lussuosa* Produzione, mentre solo ad essa è analoga e reciproca. Laonde il Lusso, proclive e idoneo a proteggere o commendare le Arti ed Industrie, che sopperiscono alla proterva *Ostentazione*, alla spesosa *Ricreatezza*, ed all'inquieta *Superfluità*, vuol qui notarsi onninamente scemo e inetto a spandere o soffocare le altre tutte, che appartengono alla Necessità molteplici , e Comodità dell'esistenza umana più ordinaria, sotto la ragion tripla di Vitto Ricovero e Vestito — Così, dove agli Economisti lo si accondiscendesse pur , come un *Bene* (a dispetto degli Etici e Politici , da cui fu sempre avuto , come un *Male*) risulterebbe dalle premesse argomentazioni , che il Lusso in se non offra, se non certo *Bene* assai modico e ristretto ; non essendogli accordato in niun caso , in niun periodo della nostra civile orbita, di rendersi congruo e propizievole, sia alle Necessità, sia anche alle Comodità parecchie, le quali da ogni verso, in ogni attimo ci occorrono , e sempre perseveranti e imminenti per noi, uomini di tutte l'età e fortune, di tutt'i ceti e sessi — Nè riducesi mica a questa Verità unica ciò, con cui mi trovo in balia di risospignere, o sfidar l'attacco degli Economisti ; avvegnacchè, dove altrui piaccia meco di proseguire , quindi agevole negozio diverrammi di ratificare, con prove solide e larghe , come il Lusso non solo inabile sia , ma svogliato e ritroso , nè tanto a promuovere, quanto a sostenere quell'Arti od Industrie, le quali schiettamente alle Necessità e Comodità della vita suffragano ; o piuttosto , com'ei sia il Lusso, che di proprio genio le convella, e fin le adugge. In ciò fare , per altro, esso a perdizione e disastro di se medesimo evade: mentre, da ultimo, sniunge d'ogni Ricchezza i Consumatori, e trambalza in una Povertà spasmodica e calamitosa i Produttori suoi..... *Seconda Verità* sulla stessa controversia, cui negligen non debbo , nè dalla prima dividere.

9. E che? ... Non è forse ripetuto ad esuberanza, e con evidenza di ragguagli statistici, o di tradizioni storiche, esibito, come lo sciupo la gajezza e lo scialo mai sempre si conjughino alla penuria alla doglia ed allo squallore, nell'insieme di ogni Popolo; il quale, o vecchia fama autentica, od illustrazione ammessa in presente, ci affigurano provetto lungo gli stadj orrevoli di nostra Civiltà? Avvi dunque nulla di nuovo (sebbene ciò non si tenga, che strano affatto, e quasi assurdo) in un simile perpetuo, e fin' indissolubile consorzio, della Miseria più languente, e del Lusso più tracotante; nuovo a tal segno, che mi avvinca l'obbligo di mallevarlo con qualche citazione del Mondo di altra volta, dove io creda partito cauto e discreto d'ingannare le accatastate narrative dell'odierno? Oimè!.. In ogni contrada, in ogni epoca, onde si applaudono gli entusiasti di così mostruosa Civiltà, noi, fuori dubbio, vediamo il Lusso colorire i dintorni, l'umeggiar gli accessorj del quadro della cosa pubblica; ma la Miseria eziandio (una miseria spesso di sotto alla più grossolana, non che mediocre contentatura) comporne il fondo, descriverne il prospetto (1). Fondo tristo e minaccevole, per le varie sembianze, in cui si atteggia l'invidia e'l cruccio, la desolazione e l'affanno: prospetto cupo e lurido, il qual solo attesta la massima e impreteribile, la prossima ed irreparabile influenza, che dal Lusso piove sopra tutte le Arti od Industrie, cui la saggezza divina compromise alle Comodità e Necessità dell'umano Essere, acciò una tranquilla e robusta valetudine procurino ad ogni Stato (2)!

10. Vero è, che il Lusso, più di offendere la Produzione - Consumazione generale, in certa specialissima guisa, e preliminarmente affligge la Produzione - Consumazione lussuosa.... *Terza Verità*, la quale rincalza gli avvisi da me espressi! Infatti niuno è inconsapevole, in 1.^o luogo, che i Lavorieri - caporani di arnesi, di mercerie, di suppellettili, ec. consacrati all'Ostentazione, alla Ricercatezza, ed alla Superfluità, di ora in ora, e senza confronto a quelli di manifatture, cui la Necessità rende indispensabili, o la Comodità irreprensibili, soggiacciono ad ingombro di magazzini, attrasso di rimborsi, diffalta di commessioni, ristagno di traffichi, ec. Nè qui conto l'al-

(1) Mably, *Doutes sur les Sociétés*, ec.

(2) Briganti, *Esame economico del sistema civile*, ec. Napoli 1780.

to (fra repentine vicende) o basso prezzo delle materie fabbricate, le moine o le angarie de' bruschi doganali editti , ec. Nè tampoco bado agli azzardi perenni di ogn' insolito ripiego chimico, meccanico, o tecnico ; per cui vedonsi frequentemente , inopinatamente , ed ingentemente combiare la moda , lo spaccio , e la domanda di simili prodotti (1)..... In 2.^o luogo non ignorasi vie più, che i Lavorieri - operaj de' generi su riferiti, dopo aver disertato le campagne, ed esausto i natii villaggi (2) a fine di attorcersi ed agglomerarsi entro le città, ricello degli opifizj , onde descrorriamo (quivi attratti e illusi dalla facile occupazione , da' guadagni pronti, o almeno da un salario convenuto) lantosto se ne riedano e pentiscano ; ma indarno, e già tardi; quando gli hann' oppressi e immolati, sieno i capriccj del cotidiano gusto , sieno le versatili negoziazure, sien le furbesche mene de' competitori principali. Allora le vacanze di fatica, la riduzione, ovvero la deficienza della mano d'opera , l'incertezza omai durevole in essi di campar mediante il servizio delle proprie braccia , surrogansi, con funesta ed angosciosa realtà, a tutte le lusinghevoli aspettative di un interesse mal calcolato.—Oltre io mi taccio, mentre tai scene per buona sorte unqua non isvelaronsi agli occhi nostri ; ed è bello decente e onesto preterire quei disordini o tumulti , fra cui non di rado , nell' atrocità e frenesia del cordoglio, qualche perfida insinuazione, o qualche cattivo istinto, costoro ha involto... Or che ci replicheranno, a schermo del Lusso , i più devoti o fervidi proseliti dell'Economia? È ben forse egli dire , che congiunture critiche siffatte , pe' Produttori lussuosi , alterninsi con sempre identiche condizioni di luero e di calma?... Ma costa, dietro mille ricerche all' uopo instituite e da' Governi più culti, e dalle più celebri Accademie a gara, come ogni fortuito e instabil' emolumento dell'altrui speculazione o travaglio, sia appunto ciocchè si vuole, a fin di proibire al rozzo e debole umano giudizio di equilibrarsi fra l'eccessivo presente, e lo scarso o nulla eventuale.

11. Arrogì, che il Lusso percuote i lussuosi Consumatori con aggravio e danno simultaneo... in 1.^o luogo , a motivo del valore degli

(1) Si legga l'esteso *Rapporto* del Blanqui (*Situation des Classes Ouvrieres en France, en 1848*) per ciò soprattutto, che riguarda le fabbriche di Lione.

(2) Una pubblicazione periodica, famosa col titolo di *Morale chrétienne*, ci porge questo singolar documento, nel suo Vol. VI. relativo all'anno 1856.

oggetti, cui essi anelano e preferiscono, e cui il disegno, il tessuto, l'origine, l'occasione, la singolarità, ec. ec. di lor natura effimeri e caduchi, rendon cimentoso e ancipite per chi li foggia o vende, e con dritfo esagerano per chiunque se ne diverte, comprandogl' in fondaci artatamente corredati... e in 2.^o luogo, a motivo soprattutto della mollezza, della scioperaggine, della balorderia, le quali nello Stato s' introducono, e vi soffogano in breve, o prostituiscono, ogni sentimento ingenuo gagliardo contegnoso, insomma *civile*. E qui udiamo Sallustio Crispo, da cui ricevea precetti di sano e giusto impero lo stesso Cesare (1) - *Dux, atque imperator vitae mortalium, animus est: qui ubi ad gloriam virtutis via grassatur, abunde pollens potensque, et clarus est, neque fortuna eget; quippe, quae probitatem, industriam, aliasque artes bonas, neque dare, neque eripere cuiquam potest. Sin captus pravis cupidinibus, ad inertiam et voluptates corporis pessumdatus est, perniciose lubricine paullisper usus; ubi per socordiam vires, tempus, ingenium defluxere, naturae infirmitas accusatur: suam quippe culpam auctores ad negotia transferunt. Quod si hominibus bonarum rerum tanta cura esset, quanto studio aliena, ac nihil profutura, multumque etiam periculosa petunt; neque regerentur magis, quam regerent easus, et eo magnitudinis procederent, ubi, pro mortalibus, gloria aeterni fierent. Nam uti genus hominum compositum ex corpore et anima est, ita res eunctae, studiaque omnia nostra, corporis alia, alia animi naturam sequuntur. Igitur praeclara facies, magnae divitiae, ad hoc vis corporis, et alia omnia hujusemodi, omnia brevi dilabuntur: at ingenii egregia facinora, sicuti anima, immortalia sunt. Postremo corporis, et fortunae bonorum, uti initium, sic finis est; omniaque orta occidunt, et aucta senescunt. Animus incorruptus, aeternus, rector humani generis agit atque habet euncta, neque ipse habetur. Quo magis pravitas eorum admiranda est, qui dediti corporis gaudiis, per Luxum atque ignaviam aetatem agunt. Ceterum ingenium, quo neque melius, neque amplius aliud in natura mortali est, incultu atque socordia torpescere sinunt; eum praesertim tam multae, variaeque sint artes animi, quibus summa claritudo paratur, etc. (2).*

(1) *De Republica ordinanda.*

(2) *Bellum Jugurt. I.*

12. Sagacissime considerazioni su' micidiali rapporti del Lusso colla vita civile, e ad un tempo redarguizioni mordacissime contro tutti coloro, i quali per nero ossequio all'immunità teoriche e pratiche della Produzione-Consumazione, insursero a propugnarlo con baldanza, o a difenderlo con indulgenza almeno! In che furon essi corrivi di un assai circoscritto sistema d'idee, nè scusa hanno; eziandio per forza di altri argomenti, di cui m'intratterrei, quando fossemi concesso ragionare circa l'assetto economico dello Stato. Intanto convien quà di ribattere indilatatamente, con brevi parole, un loro sofisma rimarchevole, a salvaguardia di questo medesimo sistema d'idee: imperocchè, se io il trasandassi, quantunque per ischifiltà, potrebbe inferirsi come da me in gran parte ammesso... Ei protestano dunque, che riflessioni o declamazioni uguali a quelle d'anzi addotte, colla sentenza dell'egregio Romano Storico, quanto alle brutture del Lusso, non concernano, ed anche in maniera esclusiva, se non all'Elica, onde la *morigeratezza*, ed alla Politica, onde la *sicurezza* dello Stato, formano rispettivamente lo scopo: mentre l'Economia un altro, ben diverso e proprio, ne contempla, vale a dire, la *ricchezza* dello stesso. Per tuttociò ei consentono, ed accettano lo Stato, in ogni relazione compreso (a' suoi *prineipi* arcani, a' suoi *fini* augusti, ed a' suoi *mezzi* supremi) quale bilico unico delle tre mentovate scienze filosofiche: lo che noi pure consentiamo ed accettiamo, sovvenendoci a tal uopo della vera e bella osservazione di Plinio (1) il giovane.... *quippe discretis quidem bonis omnium, sua cujusque ad singulos mala; socialis autem atque permixtis, singulorum mala ad neminem, ad omnes omnium bona pertinent* — Ebbene! Non ritraesi da ciò, quasi franco e semplice corollario, che la Ricchezza, la Morigeratezza e la Sicurezza debbano insieme, e con mutuo accordo fruire, o garbare allo Stato; e non già lo Stato, per lo contrario, di quà o di là cedere agli ordinamenti sempre tozzi se partiti, della Ricchezza della Morigeratezza e della Sicurezza? Infatti ognuna di simili condizioni meglio s'intende, e via via adempiesi, a riguardo dell'utilità e prosperità dello Stato; che non lo Stato a riguardo dello sviluppo ed incremento di ognuna di esse condizioni, incerta nello sviluppo e varia nell'incremento suo se dall'altre divisa. Son io costretto ad aggiungere, che forse, acciò gli

(1) *Paneg. XXXII.*

arringhi studiosi dell'Etica, la quale a' Costumi caparra della Morigeratezza, della Politica, la quale alle Leggi baluardo della Sicurezza, e dell'Economia, la quale alla Produzione - Consumazione gremio della Ricchezza, con divergenti criterj incombono, attraversati fra loro unqua non si fossero, troppo giovato sarebbe di renderli convergenti ad una mira sola e comune, il vantaggio dello Stato, in cui riponesi il nostro Ben-Vivere; cosa, che ambita, gioverebbe di ottener tuttavia? — Vuolsi nondimeno badare, come nè gli Etici, nè i Politici mai contradissero, che la Ricchezza fornisca, in tutte le guise attuabili e presumibili un puntello civile: quantunque preteso sempre abbiano per la felicità dello Stato, ovvero pel nostro Bene (queto (1) fiducioso ed agiato) Vivere una pari equivalenza e prestanza dal lato della Morigeratezza seco, e della Sicurezza unite; senza cui nulla il consorzio umano distingue da ogni brutale aggregazione, non privilegiata da solerti Leggi, non accudita da probi Costumi, non ostante che non vedasi priva di quanta Ricchezza le è confacevole. Laonde non abbominarono il Lusso eglino, nè si rimangono dall'abbominarlo, se non perchè, o vizio da se medesimo, o di tutt' i vizj cardine nello Stato, è il Lusso appunto, il quale sgomina, corrompe e imbastardisce il Ben-Vivere, di cui favellamo. Così di rimbrotti fortissimi, invece, condegni sembrati sonomi gli Economisti, non già per avere con zelo sulle molle della Produzione-Consumazione insistito; ma sibbene da che, o pervicacemente ei sconobbero, od arrogantemente violarono que'sacri limiti, fra'quali può soltanto il nostro materiale Benessere col morale accoppiarsi, e fino costruirsi, in tutte le civili società possibili ed immaginabili. E però lode meritano i più sezzaj espositori della Dottrina della Produzione-Consumazione, col non oltre aver pialito intorno al Lusso; briga, che in realtà, e comunque svolgasi, loro non compete.

13. Or poichè riuscito sono a descrivere gli *effetti* del Lusso, rintracciando le sole attenenze sue Economiche, potrebbe altrui parer estraneo e soverchio al mio tema, che io ne discorressi benanche le *cause*, o piuttosto (se meglio piace) le *occasioni*, le quali riferiscono invero a circostanze, onde per niun proprio errore dee rispondere, o correggersi la volgar' Economia. Nondimeno ragionerò di esse brevemente; vie più da che mi fia quindi schiusa, e indiritta la strada (in

(1) *Bene, id est recte, frugaliter, honeste vivere*, Cic. de Fin. I.

altra più tempestiva congiuntura) ad esibirne, e discuterne i *rimedi* efficaci e normali. Nè qui hommi per intrapresa malagevole di additare tai *cause* od *occasioni*, purchè mi si conceda scernerle sotto i tre aspetti di Ostentazione, di Ricchezza, e di Superfluità, in cui avvertimmo da principio, che il Lusso si refrange ed esprime. — Quai pungoli o conforti dunque, atteso la smania complessa di tutt' e tre, derivano agli urgenti e incessanti Bisogni nostri di Vitto, Ricovero, e Vestito?... Ognuno può da se presumergli, e quasi affiggerli.

14. *Ostentazione* — Non è da contrastare, come le Città più dei Borghi; e le più delle meno accentrate (in cui riseggono, o si adunano i doviziosi, i nobili, gli autorevoli personaggi; e'l popolo si affolla di conseguenza, onde servir loro, e provvedere a se) per modo e grado peculiari mantengano, se non inducono, uno spirito di Ostentazione; cioè la gara di Onoranze esterne, dalla Ricchezza poco a poco sostituita all'Emulazione d' illustri prerogative, di magnanimi pensieri, e di civili opere. Avvegnacchè ivi, a un cosiffatto meschino spirito, i Maritaggi, le Nascite, e le stesse Morti somministrano un continuo fomite; senza dir delle Festività annversarie, de' giornalieri Spettacoli, e delle parecchie altre urbane Consuetudini, le quali al tripudio collimano, ed alla pompa. Laonde accade, che solo in mezzo a simili vaste congerie di uomini di tutta indole, e fortuna, prorompendo il Lusso, via via in *abbigliamento* gliribizzosi l'acconcio Vestito, in *abitazioni* splendide il modesto Ricovero, e in laute *mense* il Vitto sobrio si tramuti; al certo con bello spicco di coloro, cui la Ricchezza ne dà l'arbitrio, ma con brutto sfregio di quanti altri una comparativa Povertà deprime, indispettisce, e di volta in volta esaspera, fra l'inverecondia de' Costumi, e l'obbrobrio delle Leggi (1) — Per la quale severa ammonizione, che agli Etici ed a' Politici similmente appartiene, non intesero questi già, secondo gli Economisti accusano entrambi, di abolir la Ricchezza, con paralizzarne l'uso (mentr' Ei nulla di meglio richiedono, che l'una assicurare, e aggrandir l'altro) ma alla jattanza la prudenza, al fasto il decoro, in somma alla dissipatezza la liberalità di preporre. *Expetantur divitiae*, scrivea Tullio, interprete di tutto il greco, maestro di tutto il latino sapere, *quum ad usus vitae*

(1)

Quid Leges sine Moribus

Vanae proficiunt?... Hor. Od. III, 24.

*

necessarios, tum ad perfruendas voluptates. In quibus autem major est animus, in iis pecuniae cupiditas spectat ad opes, et gratificandi facultatem.... Nec solum nobis divites esse velimus, sed liberis, propinquis, amicis, maximeque reipublicae, etc. (1).

15. *Ricchezza* — Siccome il Lavoro feconda in certa guisa la Materia, da se medesima sterile, od almeno rozza e torpida; così l'Industria a suo torno emancipa il Lavoro, per se medesimo increscioso e duro: segreto ammirevole di Dio, che dalla creazione avendo il Lavoro stabilito in perpetua guarentia dell'umana famiglia (2) volle, mediante l'appannaggio dell'Industria, a cadauno aperto, compensare il patrimonio della Materia, a' pochi devoluto! Però vediamo di passo in passo l'Industria colla Materia dividere ogni dritto ingenuo di questa sulla Ricchezza, nel più ampio significato suo concepita:.. Verità, degli Economisti non solo in capital maniera espressa, ma con esageratissimi comenti profferta. Ed esageratissimi, torno a dire, conciosacchè l'Industria non può meglio, nè devesi scorgere, se non come il talento atto a crear la Ricchezza; mentre la Materia sola è, in opposto, che si porge con uso prossimo a' Bisogni nostri, e sola, che s'impronta nel Vitto, nel Ricovero, e nel Vestito. La quale considerazione, senza più diffondermi, basta a rivelarci il divino consiglio, e quasi a farne acconsentire il profondo motivo di quel fascino di Ricchezza (tutto collocato in peregrine, squisite, e talor anche posticcie o bisbetiche galanterie) che impadronendosi delle brame del Consumatore lussuoso, con se lo trasporta entro una perenne vertigine di allettative, soddisfatte appena, e fastidite a misura, che altri ne divengano con lui partecipi, secondo il più spesso, tardi o tosto succede:

*... non vulgo nota placebunt
Gaudia, non usu plebeio trita voluptas (3).*

Il motivo poi, di cui ho parlato, è l'assiduo guadagno, è l'uberoso pascolo, nè di rado il beneficio enorme del Produttore, sul qual veglia la Provvidenza; guadagno, pascolo, beneficio, che l'Industria a lui proc-

(1) *De Off.* 1.

(2) *Adae vero dixit... In laboribus tuis comedes ex ea (terra) cunctis diebus vitae tuae... In sudore vultus tui vesceris pane tuo. Genes. III. 17, 18, 19.*

(3) *Petr. Arb. Satyr.*

cura, e sostiene le veci di *censo* (1) ovvero di rendita inscritta sul censo del Consumator rispettivo.

16. *Superfluità* — Da ultimo quel vizzo irresistibile, quella cupidigia insaziabile di addobbi, monizie, treni, divise, balocchi, ecc. cui agl' idolatri del Lusso persuade l'albagia di una Ricchezza strabocchevole, o la fatuità di simularne il possedimento agli occhi altrui (da Seneca (2) col motto di *Superfluità* vituperata) non è meno l'acuto loro continuo stimolo, che il loro luttuoso final gastigo. Ma non obbiamo in questo incontro la differenza, che intercede dalla *Superfluità* o profusione, onde si litiga, alla *Copia* od abbondanza de' pretti anminicoli della vita; i quali niuno ha in tedio, nè deve o puote averli. Infatti per la *Copia*, a cui la *Searsezza* ovvero parità contrasta, gli uomini s'ingentiliscono, e quasi spandonsi, in appagare Bisogni facili e discreti: mentre nella *Superfluità*, e'l Vitto e'l Ricovero e'l Vestito si esagerano di ora in ora, e fin si pervertono a segno, che la Comodità propria di chi elusa, di chi la stessa Necessità risulti defraudata — Altro provvidenzial consiglio, in virtù di cui nell'opulenza il lussuoso peggio si trova del gramo nella mancanza di più sorte di ajuti; dove tale mancanza inonesta non sia, ed ingiurievole!

17. Nè quà mi oppongano gli Economisti, che di tutto ciò a onta, la Ricchezza nello Stato via via si accresce od accumula; mercè le Arti, cui il Lusso moltiplica, o sempre in meglio erudisce (3): da-

(1) *Ars illi sua Censur erat...* Ovid. *Metamorph.* III, 587.

(2) *Epist.* XXXIX.

(3) Hume, partigiano del Lusso, arma tale obbiezione, con positivi ragguagli, nella sua *Storia d'Inghilt.* onde io trascriverò un brano, a fine di porre in luminoso rilievo l'imperfetto e vago sentir di lui (non più, nè meno degli altri partigiani) sull'argomento — « Il s'étoit introduit l'abus d'avoir des espèces des clients externes, « aux quels on donnoit des gages, et sa livrée. Il s'enrolaient ainsi sous la protection, « et au service des grands Seigneurs, à condition d'être à leurs ordres en tems de guerre, et même de revolte, en toute occasion de debauches et de violence. Cet abus c'étoit profondément enraciné, etc. Il ne falloit, que toute la vigilance, et la rigueur de « Henry VII, pour l'extirper, etc. Le progrès des Arts et du Luxe arrêta ce pernicieux « usage plus efficacement, que la sévérité des Loix; les grands Seigneurs cessèrent « de se disputer l'avantage de cette sorte de faste, lorsque les nouvelles recherches « dans la splendeur et l'élégance des équipages, des maisons, et de la table leur offrirent des sujets d'émulation plus agréables. Les gens oisifs, qu'ils tenoient auparavant à leur solde, ne restèrent plus dans une molle indolence; ils furent obligés

poichè io ho di sopra marcato i confini, assai angusti, entro i quali ogni sua efficacia si raccoglie. Ma importa or vedere di più... in 1.^o luogo, come il Lusso della privata Ricchezza bensì, non dalla pubblica rincorato e nutrito vadi... In 2.^o luogo, come pur mentre la prima si accumola ed assorge, la seconda al contrario dechini e diminuisca; di tal che ogni favor delle Leggi o delle Consuetudini all'una, pernicioso torna all'altra... E in 3.^o luogo, come tra gli abbaglî delle precipue dottrinali esegesi degli Economisti, vuol riputarsi gravissimo e lamentevolissimo quello di aver confusi o equivocati, di equivocare o confondere tuttora, l'*accrescimento* e la *cumulazione* della Ricchezza, e la Ricchezza *pubblica* e *privata*. Nè prescindo, in ciò dire, dal total loro numero, che un solo Autore (1) di niun altro, di niuna scuola pedissequo; indarno occupatosi a tor di mezzo questo abbaglio, cui è troppo aver denunciato per adesso. Trattando de' Rimedj del Lusso, io mi propongo altrove di sottometerlo consecutivamente ad ogni austera, e minuta refutazione.

18. Ho già più volte i Rimedj del Lusso ventilato; conciosacchè io ne 'l credo suscettivo, al paro della Miseria sua consorte: quantunque arduo conato siami di appresentarli, e non temere per tutto guiderdone l'altrui repugnanza, o l'altrui diffidenza a riguardo loro. Nondimeno penso di essere a me lecito, nè discaro a chicchessia mi abbia finora udito, che io anticipi una, ovvero due brevi osservazioni, sul conto di tai Rimedj, quasi gagliarde e lontane scolte lungo il cammino delle dispute, cui c'imbatteremo in appurarli; eziandio per sottrarci dalle più inutili e impicciose fra esse — Dunque stabilisco a bella giunta, com'ei dovranno, se Rimedj, mostrarsi qual semplice, pronta e facile appendice di tutti gli argomenti circa la natura del Lusso, fin qui raccapitolati, ed omai condotti a termine. Quindi non potranno rinvenirsi per noi nell'*ostruzione* della Ricchezza, giusta il parere degli Economisti; ma nè tampoco nella sua *inanizione* frugarsi, giusta l'avviso di alcuni Etici e Politici, in che al certo fallirono. Di

« de se rendre capables de quelques professions, de quelque emploi, utiles à eux mêmes, et à l'Etat. Il faut convenir, en dépit de ceux, qui déclament si violemment contre le raffinement des Arts agréables, ou contre ce qu'il leur plaît de nommer *Luxe*, qu'un Artiste, ou un Commerçant industriel, est à la fois un homme plus estimable, et un meilleur citoyen, que n'étoient ces fainéants gagistes, etc. Introd. Henry VII, Chap. III.

(1) Lauderdale, *Inquiry into the nature, and origin of public Wealth*.

poi affermo, come i suddetti Rimedj, laddove si condescendessero quanto al Lusso, perciò non saprebbero non accettarsi insieme quanto alla Miseria: mentre se germane (dietro le cose dette) si ritengono, piùchè affini, le cause dell'uno e dell'altra, mestier sarà, che, pe'validi ripieghi contro il Lusso forniti, insieme un argine saldissimo contro la Miseria si alzi — Così, quali spedienti inetti, sia a precidere o reprimere il Lusso, sia ad inibire o redimere la Miseria, io stimo e addito, pur da adesso, ben tre categorie di Rimedj pretesi, e di secolo in secolo, di contrada in contrada tentati; di cui mi accingo a somministrare un cenno lieve e rapido, giacchè non ignoti d'altronde, a fine di non perdere oltre ogni mio studio in chiarirne, coll' inadeguatezza della teorica, il pericolo della pratica. Eccoli....

19. a) *Leggi agrarie* — Discorrerne egli è rammentare i dissidj, gli scandali, i palpiti, cui dier luogo a Roma e in Grecia (1) tanto la crudele promulgazione, quanto la feroce esecuzione loro; su che, del resto, non ha titolo, se non la Storia. Alla Filosofia unicamente spetta d'incutere, come Leggi simili, con qualunque giudizio si restaurassero, non mai attingerebbero la meta d'impedire, e molto meno di vendicare una *cumulazione* odiosa della *privata* Ricchezza; avvegnacchè le medesime non esercitano verun' influenza, o preponderanza propria, sull' *accrescimento* della Ricchezza pubblica, qual fora a ciò uopo.

b) *Leggi suntuarie* — Chi consapevole non è dell'alternata voga, ed estremo abbandono di esse; al paro negli Stati popolani e principeschi, e così moderni come antichi? Può addursene per motivo la loro aspirazione onninamente fiscale, appo alcuni, nè già occulta, in bandirle: ma deve accusarsene, appo altri, l'applicazione vessatoria, senza un retributivo computo proporzionato — Aggiungasi, che mediante tai Leggi (con ripigiarle) unqua non si soccorrerebbe alla Miseria dei molti, quando anche si arrivasse a contenere il Lusso de' pochi — Per altro, cadute elleno, fin vilipese nella rimembranza di tutti, e rejette dalla sperienza de' medesimi Governi, da lunga pezza sonosi, o diligentemente risarcite con tasse sopra qualche abitudine di oziose dilettazioni (2) ovvero placidamente nelle tariffe daziarie trasfuse, riguardo a certi generi d' *importazione* esotica.

(1) Consultisi Plutarco, *Vite degli uomini illustri* (Volg. di Pompei) Agide e Cleomene, Tiberio e Cajo Gracco, e lor paragone.

(2) Vedi *Encyclopédie methodique* (Finances) art. *Luxe*.

c) *Rassettamenti civili diversi* — Li cito insieme, e non pertanto si vogliono in due serie distinguere; mentre alcuni a svellere, altre a palliare le infermità dello Stato furono intesi: ed alcuni volgonsi al morale regime di esso, nulla curando il materiale, altri al materiale invece, affatto il moral neglignendo — Una considerazione sola metterà in palese il torto e 'l falso, maggiore o minore di tutti: mentre tutti hanno, o mal intuito i principj eterni, del nostro comun vivere, o non ben esplorato l'impiego ed accordo loro.

20. In conclusione il Lusso (anche indipendentemente dalla Miseria) è un *Male*, atteso le turpitudini, le sconcezze, le colpe eziandio che seguono, dove non si accompagnino alla mania di Ostentazione, di Ricchezza, e di Superfluità, in cui lo stesso consiste. Un *Male*, ripetuto, nòd ostante il patrocinio, onde gli si offerser larghi i ciechi e troppo avventati fautori del domma della Produzione-Consumazione. Il qual domma cospicuo e solenne, io nego che riesca compatibile o conciliabile, se non per grandi riserve e parecchj temperamenti, colla disciplina del Lusso; mentr'essa poggia su' i rapporti, cui l'Industria e la Ricchezza deon mantenere, e possono strignere col Benessere, anzi colla medesima (1) Dignità umana — A dritto gli Etici e i Politici dunque se ne sono ingeriti, e con più ragione dagli Economisti ne han deciso; ciocchè l'obbietto circoscriveva alle mie indagini attuali, omai compiute, o raccapitolate (2) almeno.

(1) *Quid est homo, quod memor es ejus? Aut filius hominis, quoniam visitas eum? Minuisti eum paula minus ab Angelis, gloria et honore coronasti eum, et constituisti eum super opera manuum tuarum.* Psal. VIII. 6, 7 — Una riflessione del sommo Tullio può stimarsi quasi commento delle parole del santo Re... *Si considerare velimus, quae sit in natura Hominis excellentia et dignitas, intelligemus, quam sit turpe diffundere Luxuria, et delicate ac molliter vivere; quamque honestum, parce, continenter, severe, sobrie...* De Off. II.

(2) In dare alle stampe questa Memoria, qualche mese dopo letta, sonosi cominciati a conoscere, fra noi, gli sbilanci commerciali degli Stati Uniti d'America; onde le cause (almeno più redarguite ivi stesso) siccome autenticano in meravigliosa maniera i miei detti, così mi è parso non doverle qui trasmettere in silenzio — *Il valore integrale delle importazioni negli Stati Uniti, durante l'anno finanziario spirato col 30 Giugno 1856, è stato di 314, 639, 492 doll. de' quali 43 mil. di doll. per per articoli di toletta femminina — 43 milioni di dollari!... cioè, quasi tutto il prodotto (dice il New-York Herald) delle mine d'oro di California, durante un anno: e questa somma sarebbe stata piucchè sufficiente, per risparmiare la crisi!!!*

PRIME LINEE

DI UNA NUOVA TEORICA INTORNO ALLA PROBABILITÀ E COLPABILITÀ
DEGLI ATTI IMPUTABILI

DI

GIUSEPPE MASTRIANI *

Assai giustamente maravigliavasi il Vico di vedere che tanto studio si ponesse intorno alle scienze fisiche e matematiche, e sì poco fosse coltivata l'antropologia. E maraviglia dovea ciò recare allo illustre filosofo napolitano; dappoichè egli sapeva quanto alla materia so-
prastasse lo spirito, e quanto più sublimi e degne di studio fossero quelle discipline, che alle cose dello spirito si attengono, rimpetto a quelle che le cose della materia e del corpo riguardano. Se non che, vuolsi considerare che in tempi segnalati pel trionfo degl' interessi materiali natural cosa è gl'ingegni e gli studi, volgersi a quelle discipline ed a quelle applicazioni, che siano per fruttare più pronto e più egoistico guadagno.

L'argomento di questa scrittura non porta che io mi allarghi a dimostrare che le scienze morali tengono un posto assai più eccellente di quello delle scienze fisiche; nè potendo, imprenderei a dimostrarlo, ricordandomi a quale insigne collegio ho l'onore d'indirizzare le mie parole. Non però lascerò di pensare e di aver per fermo essere sacro dovere di chiunque attende alle lettere ed alla filosofia lo esporre i propri concetti; e, sottoponendoli allo esame dei dotti, fare che quelli profitassero alla civile convivenza.

* Per effetto dell'approvazione data dall'Accademia a tal Memoria l'autore venne aseritto a nostro corrispondente nazionale.

Per la qual cosa, essendomi fino dalla prima giovinezza occupato nelle lettere e nella moral filosofia , ed applicato alla giurisprudenza ed alla medicina, m'è avvenuto, stando sopra alla teorica degli indizi, escogitare una nuova teorica intorno al modo di scorgere e di misurare la probabilità e la colpabilità degli atti imputabili; la quale siccome frutto di molto studio delle scienze fisiologiche e psicologiche , voleva esser porta allo esame di un collegio , il quale nel suo seno avesse di tali uomini, che potessero in ogni generazione di dottrina dare giudizi finitivi.

Ed innanzi tratto invito gli egregi e chiari Accademici a considerare di quanto assoluta necessità vogliasi stimare nello studio dell' antropologia l' alleanza tra la psicologia e la fisiologia , e quanto universalmente e dannosamente sia stata quest' alleanza negletta da tutti quelli, i quali avvisandosi di studiar l' uomo , ricercarono unicamente nel corpo, o contemplarono unicamente nello spirito. Ma il corpo lasciato dall' anima è cadavere , e non uomo : e l' anima fuori del corpo è puro spirito , e non uomo ; epperò errore gravissimo mi sembra lo studiare l' uomo, considerandolo separatamente in due distinte individualità , le quali separatamente ricercate non posson mai dare il vero concetto di quest' ente. Laonde si dee saper qualche grado agli sforzi frenologici , ed allo ingegno di Gall , che incitò gl' intelletti a non separare, studiando l' uomo, la parte fisica dalla parte spirituale, nè questa da quella. Nel che la frenologia dovrebbe dagl' imparziali avere la sua parte lode: la frenologia, che alcuni vorrebbero rigettata fra le ipotesi , altri ritenuta come scienza di fatto, dove che pare non sia nè tutto l' una, nè tutto l' altra. Certo la indagine fisica è richiesta nel ricercamento dei fenomeni morali; massimamente là dove si ha a ricercare, considerare, e giudicare gli affetti le passioni , gli atti e le azioni dell' uomo , non essendoci , a mio giudizio , cosa più strana e forse ridevole che un ideologo o tale , che non abbia piena conoscenza dell' uomo fisico-morale, segga a scranna per giudicarne le azioni, ed assolverlo o condannare.

Lo studio per tanto della volontà , la quale si addentro sente lo impero dello stato organico del corpo e delle efficienze fisico-morali in cui si trova, è di altissima importanza nei giudizi penali , siccome quella che, potendo dare maggiore o minore elemento alla colpabilità,

vuol essere dal giudice riposatamente considerata. Il danno e la intenzione sono in generale i due fattori, che secondo la legge penale, costituiscono l'atto imputabile; epperò non è chi non veggia quanto sia necessario ed importante il venir penetrando la intenzione, e pesando il grado della malizia, chi voglia con esatta bilancia applicare la pena al reato.

Non entrero' qui nel campo vastissimo della filosofia legislativa per ricercarvi quale dei due sopra cennati elementi debba essere meglio preso in considerazione nella statica penale. La legge dee vegliare perchè siano adempiute le obbligazioni, e sia spedito lo esercizio dei dritti di tutt' i cittadini sottoposti al suo impero. Ora a me pare che meglio del solo danno sia per ostare a dette cose la intenzione malvagia; e che perciò sia forse più da punire quel reato, in cui è maggiore la intenzione che il danno, di quello in cui sia il danno maggiore della intenzione. Imperocchè se è principio di cristiana filosofia legislativa che la legge debba intendere più a prevenire, che a punire i delitti, non iscorgo altro migliore spediente, che, diminuendo il numero dei malvagi colla pubblica educazione, provvedere che i medesimi temano il rigore della legge, e siano condotti nella impossibilità di nuocere altrui.

Due cose intanto pare che siffatti espedienti osteggino: la clemenza, alla quale deve inclinare il legislatore, e per la quale conviene nei casi dubbj decidere in favore dello imputato, e la difficoltà di esattamente misurare la malizia della intenzione.

Lasciando stare la quistione della clemenza, mi accingo fiducioso a dire qualche parola intorno alla maniera di misurare la colpabilità e probabilità dell'atto imputabile. So che il giudice non può uscire dai limiti segnati dalla legge; e che perciò il suo giudizio deve qualche volta non in tutto seguire il consiglio del criterio morale: il che è savia provvidenza della legge, la quale non può interamente lasciarsi andare all'arbitrio del giudicante. Ma se la medesima non può del tutto allentare il freno all'arbitrio, concede al giudice nella considerazione delle *attenuanti* e delle *aggravanti* la facoltà di sminuire o crescere la pena, secondo maggiore o minore gli parrà scorgere di colpabilità nell'atto imputabile.

Egli non può negarsi che non ci ha colpa senza malizia, cioè

senz'animo deliberato al male. Ora a cogliere il grado di malvagità dell'animo di un colpevole fa di mestieri l'occhio scrutatore del filosofo, che sappia bene addentrarsi nel processo psicologico del pensiero e dell'affetto; ricordandosi che questo processo non costa di atti di uno spirito puro, ma di atti di una volontà libera, ma non fuori la influenza dello stato organico del corpo. Fa di mestieri inoltre indagare l'origine e lo svolgimento di certe idee e di certi affetti, e vederne le attinenze col temperamento, colla età, collo stato fisiologico, e con le concomitanze esteriori della persona, del cui atto imputabile è questione. Egli fa d'uopo di por mente che la colpabilità può di tanto scemarsi, di quanto valga a rendere non più imputabile l'atto commesso. E dove si consideri che la imputabilità poggia sopra fatti psicologici, i quali non presentano punto una linea terminativa spiccata tra la volontà libera e sana, e la inferma e sforzata; si vedrà quanto importa questo studio della volontà, e quanto sia grave ad un tempo e malagevole la piena ed intima conoscenza dalla intenzione di una persona, che dev'essere assoluta, o più o meno gravemente punita di un atto imputato.

Se in questo mio ragionamento potessi allargarmi a parlare della statica penale, argomento non ultimo fra quelli, in che si occupa la filosofia legislativa, verrei qui toccando di parecchie e speciali cose, a cui è necessità guardare nell'applicazione della pena. Certo non si potrà mai rettamente giudicare del *dolo*, siccome molti giuristi fanno, senza essere conoscitori di quella dottrina (quasi direi) fisico-morale, di cui nel principio feci qualche cenno: e quello, che qui dico del dolo negli atti colpevoli da punire, può dirsi eziandio del merito degli atti lodevoli da premiare, siccome spero dimostrare in altra scrittura. Romagnosi ha parlato del *dolo*, e dato alcuni principii intorno alla volontà; Gioja più minutamente è venuto investigando la influenza dei motivi a muovere la volontà, e degli ostacoli, ch'essa dee vincere al di fuori: Pellegrino Rossi pare che ponga nei reati l'elemento subbietivo in quanto al *dovere* più o meno violato, e lo elemento obbietivo in quanto alla *lesione* del dritto: finalmente, oltre a vari altri statisti e filosofi, Gall, parlando della influenza del fisico sul morale, ha toccato del vario grado d'interno impulso a commettere una colpa qualunque. A questa dottrina del-

l'alemanno frenologo in parte mi accosto, siccome quella che reputo la migliore e più evidente; perocchè nella considerazione e nello studio dei fatti psicologici non lascia totalmente da canto la considerazione e lo studio della parte materiale dell'uomo.

In altro mio lavoro (1) venni toccando alla sfuggita del modo, onde si possa con molta sicurezza misurare il grado non pure della malizia e della bontà di una passione, di un sentimento, e di un atto libero, ma eziandio della loro probabilità: e posi questo modo nello indagare e misurare la loro naturalezza. Ora quello, che ivi quasi per incidente cennai (una più lunga e particolare disquisizione non essendomi dalla materia di quel libro consentita) in ingegnerò più ampiamente venire sponendo in questo scritto; perocchè il concetto mi sembra nuovo, e punto non indegno di essere presentato alla meditazione degli eletti ingegni, onde si abbelli la preclara Accademia delle Scienze di Napoli.

La dottrina degli esimii personaggi, ai quali vengo sponendo le mie idee, mi fa reputar non necessario il dimostrare come lo stato fisico-morale dell'uomo, e le concomitanze esteriori predispongano l'animo a corrispondenti passioni e sentimenti; e quindi ad atti, che da quelle passioni e da quei sentimenti sogliono scaturire. Nè mi fa mestieri lo allargarmi a mostrare che il cennato stato fisico-morale è costituito dal temperamento, dalla età, dal sesso, dalle assuetudini, dallo stato della salute, e dal carattere: e le concomitanze esteriori dal clima, dalla stagione, dall'ora del giorno, dallo stato dell'atmosfera, e dalle altre efficienze cosmotelluriche; conciossiachè basti essere alquanto versato nella fisiologia, ed essersi alquanto messo a meditare sopra se medesimo per tosto venire nella persuasione che l'uomo, non essendo un puro spirito sciolto da ogni ceppo e fuori di qualunque influenza esteriore, debba (non invincibilmente ma efficacemente) essere tratto dalle menzionate concause più verso certe passioni e certi sentimenti, che verso certi altri; epperò sotto l'opera delle dette concause più corrivo e facile a certi atti ed azioni, che a certe altre. — Naturali per tanto io penso doversi reputare quella passione,

(1) *NOTOMIA MORALE*, ossia calcolo di probabilità dei sentimenti umani. — Napoli 1835.

quel sentimento , e quell'atto , che sono consonanti allo stato fisico-morale ed alle concomitanze esteriori delle persone : e non naturale quella passione , quel sentimento , e quell'atto , che non sono consonanti al detto stato ed alle dette concomitanze. Quali siano poi particolarmente queste passioni , questi sentimenti , e questi atti non potrete dire , senza farmi da capo a discorrere buona parte della fisiologia dei temperamenti , delle età , del sesso ec: cosa di cui a bastanza ho parlato nella *Notomia Morale*. Mi basta qui stabilire che la naturalezza dei sentimenti e degli atti può con assai precisione ed esattezza dare il grado della colpabilità e della probabilità di un atto imputabile , siccome siamo per vedere qui appresso.

Se non che , egli vuolsi innanzi tratto avvertire che il libero arbitrio dell'animo umano non vien punto distrutto da questa teorica , siccome ai poco diligenti può parere a prima vista. Lo stato fisico-morale di una persona può disporre la volontà di lei ad atti rispondenti ad esso , massime dove questi atti fossero voluti eziandio dalle concomitanze esteriori ; ma il detto stato , e le dette concomitanze mai non saranno da tanto che riescano a sforzare così la volontà , che ne venga annientato il libero arbitrio. Queste cose efficacemente (ho detto più sopra) dispongono a determinate passioni ed atti , non invincibilmente ; meno il caso della malattia mentale , la quale non ha per altro confini certi ed evidenti sì che sempre sia data abilità al giudice di dire : Qui finisce o comincia il libero arbitrio e la imputabilità.

Voi sapete che tutti i filosofi moralisti convengono nella opinione una virtù essere tanto più grande e meravigliosa, quanto maggiore fu lo sforzo che uomo sostenne a farsene bello ; e più eroiche essere da giudicare quelle azioni , che fatte da alcuni uomini straordinari e singolari non sono facili , anzi quasi non possibili nella natura comune degli uomini. Ma e' pare che questi filosofi non siano andati più oltre speculandovi , nè investigando come , quando , e dove siano facili o difficili le virtù ed i vizi. Nè alcuno ci ha , il quale si fosse avvisato di porre sopra questa facilità o difficoltà l'argomentazione della loro colpabilità e probabilità. Ora io mi penso essere facile e probabile quella virtù e quel vizio che procede da sentimento o da passione naturale ; e difficile e non probabile quella virtù o quel vizio , che deve nascere da sentimento o da passione non naturale. Epperò ad es-

ser virtuoso per sentimenti non naturali fa bisogno una forza di volontà maggiormente buona; e ad essere vizioso per passione non naturale fa bisogno di una forza di volontà maggiormente malvagia — Dal che rampolla con evidenza essere più lodevole e meno probabile di qualunque altra quella virtù che può dirsi non naturale, e più di qualunque altro biasimevole quel vizio che non è naturale, val dire non facilitato dalle concomitanze di età, di temperamento, di sesso, di stato fisiologico, ed altre cose somiglienti sopra discorse. Laonde con moltissimo fondamento di ragione io dissi altrove essere vizio e delitto sopra ogni altro vituperevole e condannabile il lenocinio nell' uomo, ed il furto nella donna; perocchè sono tali, che contrastano evidentemente alla natura della persona; essendo che l' uomo, dove snaturato non sia, non così facilmente si volge alle turpi arti eivettesche, nè la donna al calcolo ed alla cupidigia sleale del ladro.

Ecco una dottrina che può senza dubbio mettere molta luce nella considerazione della colpabilità degli atti imputabili; e dare dippiù un gravissimo argomento al giudizio intorno alla loro probabilità. Certo nessuno ci sarà che voglia negarmi la novità di questo concetto, cioè fondare il giudizio della colpabilità e della probabilità di atti imputabili sulla naturalezza dell' affetto e dell' azione; ed avere per più probabile e meno lodevole quell' atto virtuoso che (secondo le regole poste) dovesse reputarsi naturale, per meno probabile e più ammirabile quell' atto similmente virtuoso, che dovesse reputarsi non naturale; e così al contrario avere più probabile e meno colpevole quel reato che dovesse reputarsi naturale, e meno probabile e più colpevole quell' altro reato, che dovesse reputarsi non naturale.

Ed a proposito di questa teorica, che pone minore la probabilità dove maggiore sia l' atrocità di certi misfatti (considerata però quest' atrocità nella naturalezza o non naturalezza della passione, donde scaturì il misfatto), si osservi la prudenza dell' antichissimo legislatore greco Solone; il quale non istatui pene contro il parricidio, però che un tanto vituperoso atto pareva a quell' uomo illustre così non naturale anzi contrario alla natura, che il giudicò non probabile. Ancora pongasi mente a quanto errasse in ciò lontano dal vero la romana sapienza legislativa, laddove pose che *in atrocissimis leviores provae sufficiunt*; salvo che questo principio non fosse stato, sicco-

me a me pare , stabilito , perchè i misfatti atrocissimi non isfuggissero alla pena : cosa assai più utile che giusta.

Delle altre considerazioni intorno alla probabilità null'altro occorre qui dire , avendone diffusamente discorso nella enunciata opera , dove a fondamento generale della probabilità dei sentimenti e degli atti corrispondenti posi la dottrina delle *affinità morali*.—Non senza ragione adunque le ingiurie , per esempio , e le percosse recate altrui da persona briaca , trovano una *scusante* nello stato di ebbrezza ; perocchè con ragione si pensa che in detto stato sono naturali e facili tutte quelle passioni e tutti quegli atti , che sono segnalati per violenza e per inconsideratezza : atti perciò più probabili e meno colpevoli. Ma se poi la persona briaca aspetti per lunga pezza il nemico al varco , e stia tranquillamente in agguato per colpirlo traditorescamente alle spalle , questo atto per quanto è meno probabile , tanto è più colpevole , e tale che non merita la *scusante* dell' ubbriachezza ; imperocchè non essendo naturale che il calore dell' ubbriachezza patisca indugio al compimento della vendetta , dee conchiudersi grandi dover essere stati l' odio e la perversità dell' animo , onde il colpevole , mettendo freno allo stesso impeto dell' ira e allo stesso bollore del sangue , ha fatto forza a se stesso per compiere più sicuramente il misfatto.

Questo breve esempio potrà all' egregio consesso fare in certa guisa intendere il modo di riguardare la naturalezza della passione e dell' affetto , che ha potuto muovere il reato ; e da quella argomentare la maggiore o minore colpevolezza e probabilità dello stesso ; le quali saranno sempre del resto cresciute o scemate dalla considerazione di tutti gli altri casi e circostanze , che trovar si possono accompagnati all' atto imputabile.

INDICE

DE' LAVORI ACCADEMICI CONTENUTI NEL PRESENTE II. VOLUME

Per le Notizie Preliminari, e le Memorie

ANNO 1855.

MATEMATICHE

	Notiz. prel.	Memorie
1. FLAUTI (V.). <i>Sulla vera nozione delle quantità negative, risultanti dalla risoluzione de' problemi.</i>	VI	3 a 36
2. — <i>Su'tre MSS. di Lionardo Pisano, rinvenuti nella Biblioteca Ambrosiana di Milano, dal sig. B. Boncompagni</i> , e pubblicati in Firenze.	VII a IX	
3. — <i>Nota letta all'Accademia all'occasione dell'Esame della biografia del Galilei scritta da F. Arago, pubblicato dal cav. E. Alberi</i> , nel Supplimento all' <i>elaboratissima sua edizione completa di tutte le opere del Galilei</i> . .	IX a XI	
4. <i>Sulle funzioni generatrici di alcune rimarchevoli serie trascendenti</i> —Memoria dell'ab. del Grosso		37 a 50
5. DEMBOWSKI (har. G.) — <i>Misure micrometriche di 127 stelle doppie e triple del Catalogo di Struve, fatte dal 1852 al 55.</i> XI		51 a 93

(*) La 1^a colonna indica in numeri romani le pagine delle *Notizie Preliminari*; la II^a in numeri arabi le pagine corrispondenti a ciascuna Memoria.

SCIENZE NATURALI

	Notiz. prel.	Memorie
1. COSTA (O. G.). <i>Descrizione di alcuni pesci fossili del Libano</i>	XII	97 a 112
2. — <i>Su i Foraminiferi fossili delle marne blu del Vaticano, e delle terziarie di Messina.</i>	XII	113 a 147
3. GIARDINI (M.). <i>Di una gran Calamita temporanea animata dal solo Magnetismo terrestre</i> (Trovata pubblicata nel <i>Rendiconto</i> pel 1855)	XII e XIII	

NOTA — Tutte le relazioni per le Memorie finora indicate leggonsi nel *Rendiconto* pel 1855.

ANNO 1856.

MATEMATICHE

1. GASPARIS (cav. A. DE). <i>Formole, e Tavole per la soluzione del problema di Keplero. Relazione accademica per es</i>	XIV a XVI	151 a 155
2. FLAUTI (V.). <i>Continuazione alla precedente Memoria, per la soluzione diretta di tale importante, e difficile problema, estratta da' MSS. del Ferrogola (N), e da carte del fu G. Scorza.</i>	XVI a XX	156 a 174
3. BATTAGLINI (G.). <i>Sulla dipendenza scambievole delle figure</i> - Memorie due.	XXI e XXII	175 a 196
4. FLAUTI (V.). <i>Relazione accademica sulla</i> NOTA <i>dal cav. Alberi inserita in fine del suo</i> <i>Supplimento</i> <i>all'edizione compiuta delle opere del Galilei, riguardante il costui Orologio a pendolo.</i>	XXIII a XXV	

Notiz. prel.

Memorie

5. — Altra *Sulla novella pubblicazione fatta in Parigi del commercium epistolicum de Analysis promota ee., dal Lefort*; e sulle costui *Aggiunte*. . . XXV a XXXI

SCIENZE NATURALI

1. COSTA (A.). *De quibusdam insectorum generibus descriptis, iconibusque illustratis*. XXXII 220 a 233
2. NOBILE (A.). *Sul teorema fondamentale per l'Induzione elettrostatica*. . . XXXII a XLI
3. COSTA (O. G.). RELAZIONE sulla descrizione, da lui presentata, di un gran pesce scavato in Pielraroja. XLI e XLII 234 a 238
4. GASPARRINI (G.). Motivo pel quale non veggonsi inserite nel volume le due sue Memorie presentate all'Accademia nel settembre 1856, l'una: *Ricerche sugli organi assorbenti delle radici, e sulle loro eserezioni* — l'altra: *Osservazioni sull' origine dell' embrione seminale della Lemna minor*. . . XLII e XLIII
5. GUSCARDI (G.). *Di un nuovo genere di Molluschi della famiglia delle Neritidi*. XLIII a XLV 404 a 407

SCIENZE MORALI

1. Rocco (cav. N.). *Come il vero e il falso indirizzo delle scienze Metafisiche influisce sugli studi del dritto* — Dissertazioni quattro. XLVI a XLVIII 243 a 293

ANNO 1857.

MATEMATICHE

	Notiz. prel.	Memorie
1. FERGOLA (E.). I ^a <i>Sopra la condizione per la possibilità dello sviluppo di qualunque funzione in serie ordinata, secondo le potenze ascendenti della variabile sopra un valore costante</i> — II ^a <i>Ricerca dell'espressione di una derivata qualunque di una funzione, in termini delle derivate delle funzioni inverse</i> — III ^a <i>Ricerche per esprimere in serie le radici di un'equazione qualunque</i> . Memorie tre con le corrispondenti relazioni.	XLIX a LII	197 a 216
2. NOBILE (A.). <i>Sull'occultazione di Giove dietro la Luna</i> , cc., con la corrispondente relazione, ed un' Aggiunta.	LII a LVII	298 a 307
3. PADULA (cav. F.). <i>Ricerche sulle superfeie curve</i>	LVII e LVIII	308 a 314
4. FERGOLA (E.). <i>Sopra lo sviluppo della funzione $\frac{1}{ce^x-1}$; e sopra una nuova espressione de' numeri di Giac. Bernoulli</i>	LVIII a LX	315 a 324
5. GASPARIS (cav. A. DE). I. <i>Sopra un'equazione di grande importanza nella teoria de' movimenti de' pianeti</i>		
II. <i>Formole e Tavole numeriche, per calcolare prontamente la distanza di un corpo celeste dalla Terra</i>	LXI a LXII	325 a 334
III. <i>Formole e Tavole per trovare la distanza di un Pianeta o di una Come-</i>		

- la dalla Terra, con quattro osservazioni mancanti delle latitudini estreme.*
- IV. *Formole per la determinazione delle orbite relative delle stelle doppie.* LXV a LXVIII 335 a 352
6. BATTAGLINI (G.). *Sulla partizione de' numeri.* LXIII a LXIV 353 a 363
7. PROPOSTA DEL PROGRAMMA, e discussioni per esso LXVIII a LXXXIII
8. FLAUTI (V.). *Sull' Archimede, e l' Apollonio del Maurolico* — *Ricerche critico-storiche.* LXXXIII a XCIV

SCIENZE NATURALI

- COSTA (O. G.). *Genere Frondicularia.* XCV e XCVI 367 a 373
- MARTINO (A. de). *Sull' Anatomia fisiologica del Diabete.* XCVII a C
- *Sulla distinzione organica del senso della temperatura dal senso del tatto.* C1 a CIII
- NOBILE (A). *Intorno a' fenomeni dell' elettricità indotta ne' conduttori non isolati, o isolati — Dell' influenza dei conduttori isolati, e non isolati su i conduttori indotti ed isolati, e su lo stato elettrico di questi ultimi.* Mem.2. CIII a CVI 374 a 404
- GUISCARDI (G.). *Sulla Guarinite.* CVII e CVIII 405 a 412

SCIENZE MORALI

1. CENNI (G. e.). *Sul lusso, e sulla sua morale e meritevole influenza.* CX a CXIV
2. MASDEA (G.). *Critica filosofica sul lusso* — Mem. 1^a. CXV a CXVIII 416 a 430
3. MASTRIANI (G.). *Prime linee di una nuova teoria intorno alla probabilità e colpabilità degli atti imputabili.* CXVIX e CXX 431 a 438
- Relazione su' lavori de' soci, dal 1852 al 1857 contenuti ne' due volumi ora pubblicati, letta dal segretario perpetuo, nella pubblica assemblea della Società Reale, in fine dell' anno 1857.* CXXI a CXXXIV

AVVERTIMENTO

Quelli che conoscono cosa importi la stampa di un' opera loro, e che hanno sperimentato cosa sieno in generale i *compositori* di stampa, principalmente presso noi, compatiranno quegli errori, che potranno incontrare ne' due volumi di Memorie finora pubblicati, nel breve tempo di meno che l'anno e mezzo; avendo anco riguardo alla diversità de' caratteri manoscritti delle Memorie, e non della più bella forma, ed alla diversità delle materie di esse. Che però chiunque avvertirà qualche errore essenziale a correggersi, potrà dinotarlo al segretario perpetuo, affinchè, raccolte dopo un tempo, tali indicazioni, si potesse aggiungere in fine di ciascun volume un cartellino di *Errata*. Per ora non possiamo indicare che le seguenti correzioni pel vol. II.

ALCUNE CORREZIONI

<i>Pag.</i>	XIII.	<i>v.</i>	1	negli	<i>corr.</i>	degli
		—	6	queste		questa
	XXX.	—	9	durate		durata
<i>Pag.</i>	6	<i>v.</i>	25	proposizione		proporzione
	7	—	14	altre		altra
	8	—	32	<i>malheurese</i>		<i>deplorable</i>
	18	—	1	le OC		la OC
				OC		Oc
		—	21	tangente,	<i>aggiungasi</i>	del punto A
	20	—	17	labenoso	<i>corr.</i>	laberinto
	22	—	12	LK		SR
		—	19	le rette		la retta
	23	—	<i>ult.</i>	stabilite		stabilita
	35	—	6	<i>Si cancelli</i> (fig. 2.)		
	35	—	20	<i>unica</i>		<i>conica</i>
	116	a	125	quell' I della Tav.	vale <i>unica</i>	
	137	—	10	NOTEVOLE		MATERIALE

SOCI ORDINARI DELL' ACCADEMIA

NELLA FINE DELL'ANNO 1857

Epoca della nomina			
1808 , maggio	20	FLAUTI *	V. — Professore di Matematiche nella R. Università degli Studi dal 1803, al presente <i>emerito-Segretario interino</i> dell'Accademia dal giugno 1808 al novembre seguente — Da tale epoca <i>segretario aggiunto</i> di essa, per la Classe delle Matematiche, fino al 1845, che divenne <i>segretario perpetuo</i> .
1811 , aprile	9	TENORE, M.	— <i>Professore</i> di Botanica nell'Università dal 1811; <i>Direttore</i> del Real Orto Botanico, ec.
1826 , luglio	24	LUCA, F.	<i>dc, c.</i> — <i>Professore</i> di Matematiche nel R. Collegio Militare — <i>Segretario generale della Società Reale Borbonica</i> .
1829 , agosto	28	MASDEA *	G. — <i>Archivario</i> dell'Accademia, e conservatore degli oggetti e de' libri che ad essa appartengono.
1831 , agosto	24	GUSSONE, G. c.	— <i>Direttore</i> in 2° del Real Orto Botanico; Membro del Consiglio di Pubblica Istruzione, ec.
		CAPOCCI, E. c.	— Già <i>Astronomo</i> direttore del Reale Osservatorio di Capodimonte.
1832 , agosto	1	COSTA *, O. G.	— <i>Professore</i> di Zoologia.
1835 , dicembre	8	BRUNO, F.	— <i>Professore</i> di Matematiche nella R. U. degli studi; Membro del Consiglio di Pubblica Istruzione, ec.
1837 , marzo	27	CILIAJE, S. delle	— <i>Professore</i> di Anatomia Patologica nella R. U., e <i>Direttore</i> del Gabinetto corrispondente.
1839 , marzo	22	SENNOLA, G.	— <i>Professore</i> in Medicina.
1841 , aprile	1	NOBILE *,	A. — <i>Astronomo</i> nel Reale Osservatorio di Capodimonte, ed <i>Ajutante</i> del segretario perpetuo dell'Accademia.
		GRIMALDI	G. CEVA, <i>marchese</i> . — Già presidente del Consiglio de' Ministri di Stato; G. C. d'insigni Ordini Cavallereschi nazionali e stranieri.

446 SOCI ORDINARI DELL'ACCADEMIA NELLA FINE DELL'ANNO 1857.

1843 , ottobre	26	TUCCI, F. P. — <i>Professore emerito</i> di Matematiche nella R. U. degli studi ec.
1846, settembre	20	BÖZZELLI, F. P. e. — <i>Attual Presidente generale</i> della Società Reale Borbonica.
1850 , agosto	22	AGOSTINO, F. d'—C. — <i>Generale di Artiglieria</i> , Segretario del Consiglio di Stato ec. ec.
		PALMIERI L. — <i>Professore di Filosofia</i> nella R. U. degli studi.
1851 , luglio	18	FORTUNATO, G. marchese. — <i>Già Presidente</i> del Consiglio de' Ministri di Stato — G. C. di più ordini cavallereschi nazionali e stranieri.
1853, settembre	14	PADULA, F. e. — <i>Professore di Matematiche</i> nella Scuola di Ponte e Strade, ed ingegnere in questo corpo.
	18	TRUDI *, N. — <i>Professore di Analisi sublime</i> nella R. U. degli studi, ec.
dicembre	19	VALLE, C. MONTICELLI della — <i>Consigliere</i> della G. C. de' Conti.
		Rocco *, N. e. — <i>Procuratore Regio sostituto</i> presso la G. C. Civile di Napoli.
1854 , maggio	9	SCACCHI, A. — <i>Professore di Mineralogia</i> , e direttore del Gabinetto corrispondente nella R. U. degli studi.
		GASPARIS * A. de, e. — <i>Professore di Astronomia</i> nella R. U. degli studi, ed <i>Astronomo aggiunto</i> nel R. Osservatorio di Capodimonte.
novembre	4	MARTINO *, A. de — <i>Professore</i> nel Real Collegio Veterinario.
1857 , agosto	21	MINICHIINI, D. — <i>Professore di Medicina</i> nella R. U. degli studi.

NOTA — Hanno pure contribuito a' lavori accademici i soci corrispondenti — Fergola E., Battaglini G., Costa A., Guiscardi G., Mastriani G., e l'Onorario c. G. Cenni.

AVV. — L'asterisco innanzi al nome indica coloro di cui contengono lavori nel presente volume; il c. dinota cavaliere, il C. Commendatore, il G. C. Gran Croce.

Vols. TTTI

Vol. 111



